

Correction

Exercice 1 ROC

2 points

Démontrer, en utilisant l'inégalité de Bernoulli, que pour tout réel $q > 1$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$

Comme $q > 1$ alors il existe un réel a strictement positif tel que $q = 1 + a$.

On a donc, pour tout entier naturel n , $q^n = (1 + a)^n$.

D'après l'inégalité de Bernoulli, pour tout entier naturel n , $(1 + a)^n \geq 1 + na$

Donc $q^n \geq 1 + na$.

Or, comme $a > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + na = +\infty$

Donc, par comparaison (théorème de minoration), $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.

Exercice 2

2 points

On considère la fonction Python mystère ci-dessous :

```
def mystere(n):
    S=0
    u=10
    for i in range (n):
        S=S+u
        u=1/2*u
    return S
```

Déterminer sous forme de fraction irréductible le résultat renvoyé par mystere(10)

La réponse devra être clairement justifiée

La fonction mystère calcule la somme des premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 10 et de raison $\frac{1}{2}$.

La somme S_n des n premiers termes de cette suite est donnée par $S_n = 10 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}$.

Pour $n = 10$, cela donne $S_{10} = 10 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{\frac{1}{2}} = 20 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right) = 20 \times \left(1 - \frac{1}{1024}\right) = \frac{20460}{1024} = \frac{5115}{256}$.

Exercice 3

8 points

1. Déterminer les limites suivantes

a. $\lim_{n \rightarrow +\infty} -2 \left(\frac{10}{7} \right)^n$
 $\frac{10}{7} > 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{10}{7} \right)^n = +\infty$
 Par produit $\lim_{n \rightarrow +\infty} -2 \left(\frac{10}{7} \right)^n = -\infty$

b. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2}{n+5}$
 Les opérations sur limites conduisent à une forme indéterminée on factorise
 Pour tout entier n non nul, $\frac{3n^2}{n+5} = \frac{3n}{1+\frac{5}{n}}$
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3n = +\infty$ et par somme de limites
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{5}{n} = 1$
 Donc par quotient $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2}{n+5} = +\infty$

c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} + \frac{1}{n^2}$
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$
 Par somme de limites $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} + \frac{1}{n^2} = +\infty$

d. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-2^n}{1+3^n}$
 Pour tout entier n , $\frac{1-2^n}{1+3^n} = \left(\frac{2}{3} \right)^n \left(\frac{\frac{1}{2^n} - 1}{\frac{1}{3^n} + 1} \right)$
 $\frac{2}{3} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n = 0$
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n = 0$
 donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2^n} - 1 \right) = -1$
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^n = 0$
 donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3^n} + 1 \right) = 1$
 Par produit et quotient $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-2^n}{1+3^n} = 0$

e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{1+3n}$
 Pour tout entier n ,

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1$$

$$\frac{-1}{1+3n} \leq \frac{(-1)^n}{1+3n} \leq \frac{1}{1+3n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{1+3n} = 0 \text{ par quotient}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+3n} = 0 \text{ par quotient}$$

On peut conclure grâce au théorème d'encadrement (ou des gendarmes) que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{1+3n} = 0$$

f. $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n + 3 \sin(n)$
 Pour tout entier n ,

$$-1 \leq \sin(n) \leq 1$$

$$-3 \leq 3 \sin(n) \leq 3$$

$$2n - 3 \leq 2n + 3 \sin(n) \leq 2n + 3$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n - 3 = +\infty$$

Donc d'après le théorème de minoration (ou de comparaison) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n + 3 \sin(n) = +\infty$

2. Soit q un nombre réel tel que $-1 < q < 1$, on considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \sum_{k=0}^n q^k = q^0 + q^1 + q^2 + \dots + q^n. \text{ Étudier la convergence de la suite } (u_n)$$

Pour tout entier n , $u_n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Or $-1 < q < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} q \times q^n = 0$

Donc la suite (u_n) converge vers $\frac{1}{1-q}$

Exercice 4**8 points**

Fin 2020, un club de rugby comptait 7000 abonnés. A la fin de chaque année, le club constate que 20% des abonnés ne se réabonnent pas et que 4000 nouveaux abonnés arrivent. Le stade comporte 19000 places, et le club voudrait savoir s'il sera nécessaire de l'agrandir pour pouvoir accueillir tous les abonnés. On note a_n le nombre d'abonnés à la fin de l'année 2020 + n .

1. Préciser a_0 et expliquer pourquoi, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 0,8a_n + 4000$. On va ensuite, par deux méthodes différentes, déterminer la limite de (a_n) .

On a $a_0 = 7000$. De plus, une diminution de 20% du nombre d'abonnés correspond à une multiplication par 0,8 et un apport de 4000 nouveaux abonnés correspond à une addition de 4000.

Donc pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 0,8a_n + 4000$

2. Méthode 1 :

- a. Démontrer par récurrence que pour tout entier n , $a_n \leq a_{n+1} \leq 20000$

Démontrons par récurrence que pour tout entier n , $a_n \leq a_{n+1} \leq 20000$

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $P(n)$ la proposition : « $a_n \leq a_{n+1} \leq 20000$ »

Initialisation : $a_0 = 7000$ et $a_1 = 0,8 \times 7000 + 4000 = 9600$ donc $a_0 \leq a_1 \leq 20000$

Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : On suppose $P(n)$ vraie pour un entier n fixé.

Montrons que $P(n+1)$ est vraie c'est à dire $a_{n+1} \leq a_{n+2} \leq 20000$

Par hypothèse de récurrence,

$$a_n \leq a_{n+1} \leq 20000$$

$$0,8a_n \leq 0,8a_{n+1} \leq 0,8 \times 20000$$

$$0,8a_n + 4000 \leq 0,8a_{n+1} + 4000 \leq 20000$$

$$a_{n+2} \leq a_{n+1} \leq 20000$$

Donc $P(n+1)$ est vraie

Conclusion :

La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ $a_n \leq a_{n+1} \leq 20000$

- b. En déduire que la suite (a_n) est convergente.

D'après la question précédente la suite (a_n) est croissante et majorée par 20000, d'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers une limite l inférieure à 20000.

- c. En utilisant l'unicité de la limite et l'égalité $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1}$ déterminer la limite de la suite (a_n)

Par opération sur les limites $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} = 0,8 \times \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n + 4000$ Donc par unicité de la limite, l est solution $0,8l + 4000 = l$ ce qui équivaut à $0,2l = 4000$ donc $l = 20000$

3. Méthode 2 :

- a. On pose, pour $n \geq 0$, $b_n = a_n - 20000$. Justifier que (b_n) est une suite géométrique, et préciser sa raison et son premier terme.

Pour tout entier n ,

$$b_{n+1} = a_{n+1} - 20000$$

$$= 0,8a_n + 4000 - 20000$$

$$= 0,8a_n - 16000$$

$$= 0,8 \left(a_n - \frac{16000}{0,8} \right)$$

$$= 0,8(a_n - 20000)$$

$$= 0,8b_n$$

La suite (b_n) est bien géométrique de raison $q = 0,8$ et de premier terme $b_0 = a_0 - 20000 = -13000$

b. Déterminer la limite de la suite (b_n) .

Pour tout entier n , $b_n = b_0 \times q^n = 13000 \times 0,8^n$

$0 < 0,8 < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,8^n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$

c. En déduire la limite de la suite (a_n) .

Pour tout entier n , $a_n = b_n + 20000$ donc par somme de limites $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 20000$

4. Le club devra-t-il agrandir son stade? Si oui, écrire une fonction Python **Rugby** afin de déterminer quand débiter l'agrandissement.

Le stade ne comporte que 19000 places et la suite (a_n) qui modélise le nombre d'abonnés a pour limite 20000 donc il existe un certain rang à partir duquel le nombre d'abonnés dépasse 19000. Le club devra donc agrandir le stade.

```
def rugby():  
    a=7000  
    n=0  
    while a<19000:  
        a=0.8*a+4000  
        n=n+1  
    return n
```

$a_{11} \approx 18883 < 19000$ et $a_{12} \approx 19106 > 19000$ donc en le stade devra être agrandi en 2032