

Exo 1: ① L'équation est définie sur $\mathbb{R}^+$ q.
 $x > 0$ et $x-1 > 0$

$$\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } x > 1$$

$$\Leftrightarrow x \in D =]1, +\infty[.$$

$$\text{Soit } x \in D, \quad \ln(x) + \ln(x-1) = 2\ln(\sqrt{2})$$

$$\Leftrightarrow \ln(x(x-1)) = \ln(2)$$

$$\Leftrightarrow x(x-1) = 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$\Delta(x^2 - x - 2) = 9$. Les solutions de $x^2 - x - 2 = 0$ sont

$$x_1 = \frac{1-3}{2} = -1 \notin D \text{ et } x_2 = \frac{1+3}{2} = 2 \in D.$$

L'ensemble solution à l'équation $\ln(x) + \ln(x-1) = 2\ln(\sqrt{2})$ est $S = \{2\}$

② $e^{2|x|} - 3e^{|x|} - 4 = 0$ est définie sur $D = \mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $y = e^{|x|}$, l'équation se écrit

$$y^2 - 3y - 4 = 0.$$

$$\text{On a } \Delta(y^2 - 3y - 4) = 9 + 16 = 25$$

Les solutions de $y^2 - 3y - 4 = 0$ sont

$$y_1 = \frac{3-5}{2} = -1 \text{ et } y_2 = \frac{3+5}{2} = 4$$

Or $y = e^{|x|}$ les solutions de l'équation satisfont ②

$$e^{|x|} = -1 \quad \text{ou} \quad e^{|x|} = 4$$

impossible car
 $e^{|x|} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow |x| = \ln(4) \Leftrightarrow x = \pm \ln(4)$$

L'ensemble solution est $S = \{\pm \ln(4)\}$.

Exo 2 Notons par D_f et D_f' les ensembles de définition et de dérivabilité, respectivement.

① $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x+1}}$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R} \neq -1$

$$x+1 \neq 0 \quad \text{et} \quad \frac{x}{x+1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \neq -1 \quad \text{et} \quad \frac{x}{x+1} \geq 0$$

x	$-\infty$	$-$	-1	$-$	0	$+$	$+\infty$
$x+1$		$-$		$+$		$+$	
$\frac{x}{x+1}$		$+$		$-$	0	$+$	

$$D_f =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[.$$

③

f est dérivable pour tout $x \in D_f$ t.o.q. $\frac{x}{x+1} > 0$.

$$D_{f'} =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{x}{x+1}\right)'}{2\sqrt{\frac{x}{x+1}}} = \frac{\frac{x+1-x}{(x+1)^2}}{2\sqrt{\frac{x}{x+1}}} = \frac{1}{2(x+1)^{2x}} \sqrt{\frac{x+1}{x}}$$

② $g(x) = \frac{1}{(\ln x)^2}$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$

t.o.q.

$$\ln x \neq 0 \text{ et } x > 0$$

$$\Leftrightarrow x \neq 1 \text{ et } x > 0.$$

$$\Leftrightarrow x \in D_g =]0, 1[\cup]1, +\infty[= \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}.$$

g est de la forme $\frac{1}{u^2}$. g' est de la forme $-\frac{2u'}{u^3}$.

$$\text{Donc } D_{g'} = D_g.$$

Soit $x \in D_{g'}$,

$$g'(x) = -\frac{2\left(\frac{1}{x}\right)'}{(\ln x)^3} = -\frac{2}{x(\ln x)^3}$$

Exo 3 | $\int_1^e \frac{(\ln n)^{2024}}{n} dn$

$$x \mapsto \frac{(\ln x)^{2024}}{x} = u' u^{2024}$$

$$u = \ln x$$

$$u' = \frac{1}{x}$$

$$= \left(\frac{u^{2025}}{2025} \right)'$$

$$= \left(\frac{(\ln x)^{2025}}{2025} \right)'$$

$$\int_1^e \frac{(\ln n)^{2024}}{n} dn = \left[\frac{(\ln n)^{2025}}{2025} \right]_1^e$$

$$= \frac{1}{2025}$$

$$\int_{\pi/12}^{\pi/6} \frac{1}{\tan(2x)} dx$$

$$x \mapsto \frac{1}{\tan(2x)} = \frac{\cos(2x)}{\sin(2x)}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{2\cos(2x)}{\sin(2x)}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{u'}{u}$$

$$u = \sin(2x)$$

$$u' = 2\cos(2x)$$

$$= \left(\frac{1}{2} \ln|u| \right)'$$

$$= \left(\frac{1}{2} \ln |\sin(2x)| \right)'$$

⑤

$$\Rightarrow \int_{\pi/12}^{\pi/6} \frac{1}{\tan(2x)} dx = \left[\frac{1}{2} \ln |\sin(2x)| \right]_{\pi/12}^{\pi/6}$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \sin \frac{\pi}{3} \right| - \frac{1}{2} \ln \left| \sin \frac{\pi}{6} \right|$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \ln(\sqrt{3})$$

Exo 4 | ① Soit $x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = 8\cos^4(-x) - 8\cos^2(-x) + 1$$

$$\stackrel{\substack{\cos(x) \\ \text{est pair}}}{=} 8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1 = f(x).$$

On en déduit que f est paire.

② Soit $x \in \mathbb{R}$

$$f(x + \pi/2) = 8\cos^4(x + \pi/2) - 8\cos^2(x + \pi/2) + 1$$

$$\stackrel{\substack{\cos(x + \pi/2) \\ = -\sin(x)}}{=} 8\sin^4(x) - 8\sin^2(x) + 1$$

$$= 8(1 - \cos^2 x)^2 - 8(1 - \cos^2 x) + 1$$

$$= 8(1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) - 8 + 8\cos^2 x + 1 \quad (6)$$

$$= 8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1 = f(x)$$

Donc f est $\pi/2$ -périodique.

③ f est dérivable sur $[0, \pi/4]$ comme Σ de fcts dérivables sur $[0, \pi/4]$.

Soit $x \in [0, \pi/4]$,

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -32\cos^3 x \sin x + 16\cos x \sin x = 0$$

$$\Rightarrow 16\cos x \sin x (1 - 2\cos^2 x) = 0$$

$$\Rightarrow \sin x = 0 \text{ ou } 1 - 2\cos^2 x = 0$$

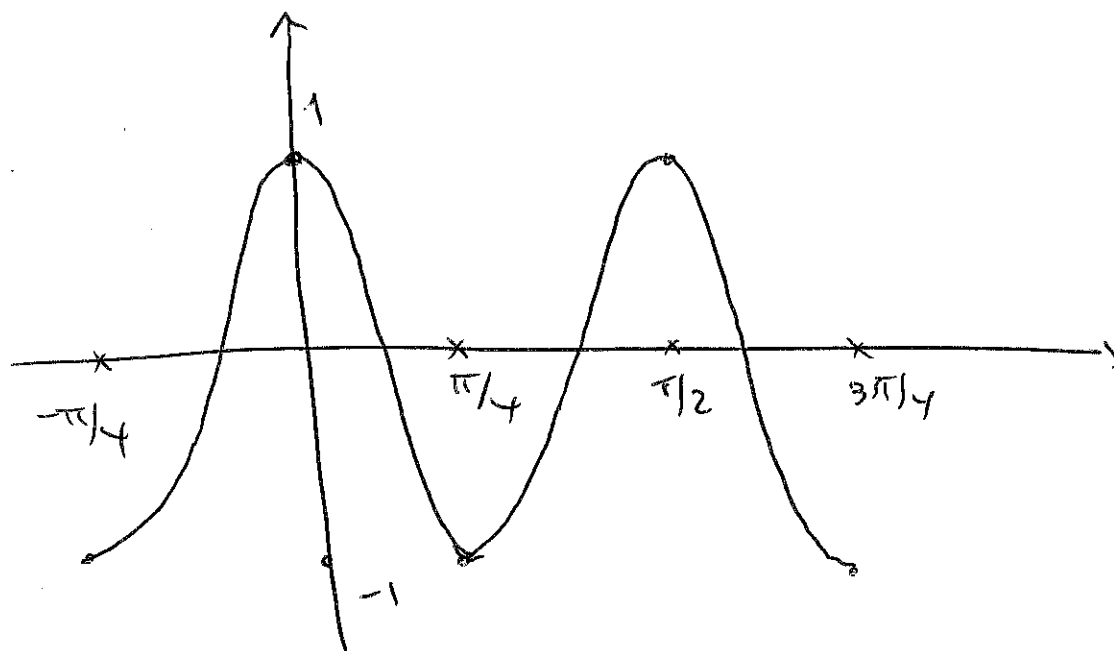
$$\Rightarrow x = 0 \text{ ou } \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = \pi/4.$$

④

x	0	$\pi/4$
signe f'	+	-
variation f	↑ 1 " $f(0)$	↓ -1 " $f(\pi/4)$

(7)



(5)