

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = v_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + v_n \end{cases}$$

Dans toute la suite de l'exercice, on admet que les suites (u_n) et (v_n) sont strictement positives.

1.
 - a. Calculez u_1 et v_1 .
 - b. Démontrer que la suite (v_n) est strictement croissante, puis en déduire que, pour tout entier naturel n , $v_n \geq 1$.
 - c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n \geq n+1$.
 - d. En déduire la limite de la suite (u_n) .
2. On pose, pour tout entier naturel n :

$$r_n = \frac{v_n}{u_n}.$$

On admet que :

$$r_n^2 = 2 + \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}$$

- a. Démontrer que pour tout entier naturel n :

$$-\frac{1}{u_n^2} \leq \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leq \frac{1}{u_n^2}.$$

- b. En déduire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}.$$

- c. Déterminer la limite de la suite (r_n^2) ~~on admet que~~ (r_n) converge vers $\sqrt{2}$.
- d. Démontrer que pour tout entier naturel n , ~~on admet que~~

$$r_{n+1} = \frac{2 + r_n}{1 + r_n}.$$

- e. On considère le programme suivant écrit en langage Python :

```
def seuil() :
    n = 0
    r = 1
    while abs(r-sqrt(2)) > 10**(-4) :
        r = (2+r)/(1+r)
        n = n+1
    return n
```

(abs désigne la valeur absolue, sqrt la racine carrée et $10^{**}(-4)$ représente 10^{-4}).

La valeur de n renvoyée par ce programme est 5.

À quoi correspond-elle?