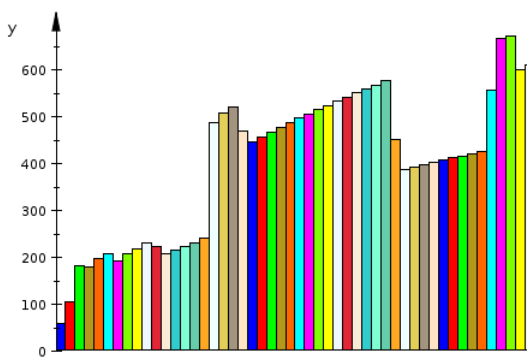


Cahier de Calcul - TG
Spécialité Mathématiques



Origine et contributions

Ce cahier de calcul correspond à une modification à la marge par Malek AIT KACI du cahier TG réalisé par une équipe composée de professeurs en classes préparatoires et de professeurs en lycée :

Conception et coordination

Colas BARDAVID

Aide à la coordination

Jérôme TROCHON

Équipe des auteurs

Colas BARDAVID
Romain BASSON
Ménard BOURGADE
Alain CAMANES
Carole CHABANIER
Mathilde COLIN DE VERDIÈRE
Geneviève DAVION
Éliane GAYOUT

Christopher GOYET
Hélène GROS
Benjamin GROUX
Jason LAPEYRONNIE
François LAURENT
Steven LU
Lionel MAGNIS
Quang-Thai NGO

Anthony OLLIVIER
Alan PELLÉ
Nicolas POPOFF
Jean-Philippe SPRIET
Jérôme TROCHON

Relecture

Rémy ALLOU, Van Bien BUI, Thibaut DEHEUVELS, Anne-Lucie DELVALLEZ, Pierre CAUCHOIS, Anne FOUBERT, Jérôme GÄRTNER, Éliane GAYOUT, William GREGORY, Jonathan HARTE, Marie HÉZARD, Sandrine et Hadrien LARÔME, Landry LAVOINE, Blaise LE MEAUX, Arthur MEYER, Pedro MONTOYA, Inès NEBZRY, Sébastien PELLERIN

On peut retrouver la version en ligne ici :

Page web du *Cahier de calcul*,
dernières versions



Généralités sur les suites

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 1.1 — Des puissances.



Écrire à l'aide d'une seule puissance les expressions suivantes.

a) $(-1)^4 \times (3^4)^5 \dots$ b) $-1^4 \times (3^{-1})^{-2} \dots$ c) $(-1)^5 \times 3^4 \times 2^4 \dots$

Calcul 1.2 — Des fractions.



Mettre sous même dénominateur les expressions suivantes.

a) $\frac{x+3}{3} + \frac{2x-1}{6} \dots$ b) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} \dots\dots\dots$ c) $2 + \frac{3x-8}{5} \dots\dots\dots$

Calcul 1.3 — Des carrés.



Développer les expressions suivantes.

a) $(3x+1)^2 \dots\dots\dots$ b) $(4x-3)^2 \dots\dots\dots$

Suites définies explicitement

Calcul 1.4



Soit $(u_n)_n$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 + 4n + 1$. Calculer :

a) $u_0 = \dots\dots\dots$ c) $u_2 = \dots\dots\dots$
 b) $u_1 = \dots\dots\dots$ d) $u_3 = \dots\dots\dots$

Calcul 1.5



Soit $(u_n)_n$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{4n-1}{n+1}$. Calculer :

a) $u_0 = \dots\dots\dots$ c) $u_2 = \dots\dots\dots$
 b) $u_1 = \dots\dots\dots$ d) $u_3 = \dots\dots\dots$

Calcul 1.6

Soit $(u_n)_n$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2n - 1$. Exprimer en fonction de n :

- | | | | |
|--------------------------------|----------------------|--------------------------------|----------------------|
| a) $u_{n+1} = \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> | c) $u_{2n} = \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> |
| b) $u_{n-1} = \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> | d) $u_n + 1 = \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> |

Calcul 1.7

Soit $(u_n)_n$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - n$. Exprimer en fonction de n :

- | | | | | | |
|-------------------------------|----------------------|--------------------------------|----------------------|---------------------------------|----------------------|
| a) $u_{2n} = \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> | b) $u_{n+1} = \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> | c) $u_{2n+1} = \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> |
|-------------------------------|----------------------|--------------------------------|----------------------|---------------------------------|----------------------|

Calcul 1.8

Soit $(v_n)_n$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $v_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Exprimer en fonction de n :

- | | | | |
|---------------------------------|----------------------|---------------------------------|----------------------|
| a) $v_{2n} = \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> | c) $v_{4n} = \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> |
| b) $v_{2n+1} = \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> | d) $v_{2n+2} = \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> |

Suites définies par récurrence

Calcul 1.9

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$. Calculer :

- | | | | |
|----------------------------|----------------------|----------------------------|----------------------|
| a) $u_1 = \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> | c) $u_3 = \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> |
| b) $u_2 = \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> | d) $u_4 = \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> |

Calcul 1.10

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = -1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -u_n - 1$. Calculer :

- | | | | |
|----------------------------|----------------------|----------------------------|----------------------|
| a) $u_1 = \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> | c) $u_3 = \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> |
| b) $u_2 = \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> | d) $u_4 = \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> |

Calcul 1.11

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (n+2)u_n$. Calculer :

- | | | | |
|----------------------------|----------------------|----------------------------|----------------------|
| a) $u_1 = \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> | c) $u_3 = \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> |
| b) $u_2 = \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> | d) $u_4 = \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> |

Calcul 1.12

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3^n \times u_n$. Calculer :

- | | | | |
|----------------------------|----------------------|----------------------------|----------------------|
| a) $u_1 = \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> | c) $u_3 = \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> |
| b) $u_2 = \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> | d) $u_4 = \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> |

Calcul 1.13

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 2n + 1}$. Calculer :

- | | | | |
|----------------------------|----------------------|----------------------------|----------------------|
| a) $u_1 = \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> | c) $u_3 = \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> |
| b) $u_2 = \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> | d) $u_4 = \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> |

Calcul 1.14

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \times u_n$. Calculer :

- | | | | |
|----------------------------|----------------------|----------------------------|----------------------|
| a) $u_1 = \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> | c) $u_3 = \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> |
| b) $u_2 = \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> | d) $u_4 = \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> |

Suites définies par récurrence avec paramètre

Calcul 1.15 — Une suite définie par récurrence avec paramètre.

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $(v_n)_n$ la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $\begin{cases} v_0 = a \\ v_{n+1} = 2v_n + 1. \end{cases}$ Exprimer en fonction de a :

- | | | | |
|----------------------------|----------------------|----------------------------|----------------------|
| a) $v_1 = \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> | c) $v_3 = \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> |
| b) $v_2 = \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> | d) $v_4 = \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> |

Calcul 1.16 — Une autre suite définie par récurrence avec paramètre.



Soient $a \in \mathbb{R}$ et $(w_n)_n$ la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $\begin{cases} w_0 = 1 \\ w_{n+1} = a^n \times w_n. \end{cases}$ Exprimer en fonction de a :

- a) $w_1 = \dots\dots\dots$ c) $w_3 = \dots\dots\dots$
 b) $w_2 = \dots\dots\dots$ d) $w_4 = \dots\dots\dots$

Calculs plus avancés

Calcul 1.17 — Suite et fractions.



Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1}$.

Calculer la moyenne des trois nombres u_2 , u_3 et u_4

Calcul 1.18



Dans chacun des cas suivants, donner la valeur de $n \in \mathbb{N}$ pour laquelle on a $u_n = 4$.

- a) La suite $(u_n)_n$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = -6n + 64$
 b) La suite $(u_n)_n$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{n^2 - 20}{n + 3}$

Réponses mélangées

8	$4n^2 - 2n$	$\frac{5x}{6}$	$\frac{4x+5}{6}$	$2a+1$	7	10	63	-1	$\frac{-1}{2n+1}$
$4n^2 + 2n$	$\frac{13}{36}$	$\frac{1}{2n}$	1	6	729	$16x^2 - 24x + 9$	3	-6^4	-3^2
24	a^6	a^3	$4a+3$	120	$\frac{1}{2n+2}$	$\frac{1}{4n}$	3	0	$4n-1$
$2n-3$	$\frac{3x+2}{5}$	1	$\frac{11}{4}$	$2n$	0	31	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{3}$
$\frac{105}{16}$	2	2	a	27	15	$\frac{15}{8}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{2}$
$16a+15$	13	$9x^2 + 6x + 1$	22	-1	4	3^{20}	-1	$2n+1$	

► Réponses et corrigés page 149

Suites arithmétiques

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 2.1 — Des fractions.



Écrire sous forme de fraction irréductible les nombres suivants.

a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} \dots\dots \boxed{}$ b) $\frac{1}{3} - \frac{2}{5} \dots\dots \boxed{}$ c) $2 + \frac{2}{7} \dots\dots \boxed{}$ d) $2 - \frac{2}{7} \dots\dots \boxed{}$

Calcul 2.2 — Des petites équations.



Résoudre les équations suivantes, en donnant la valeur de leur unique solution.

a) $\frac{2}{3}x = 6 \dots\dots\dots \boxed{}$ b) $\frac{1}{3} - \frac{2}{5}x = 4 \dots\dots\dots \boxed{}$ c) $\frac{1}{3} - \frac{2x}{5} = -\frac{1}{5} + \frac{x}{3} \dots\dots \boxed{}$

Calcul 2.3



Résoudre les équations suivantes, en donnant l'ensemble de leurs solutions.

a) $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = 2 \dots\dots\dots \boxed{}$ c) $x^2 - 6x + 9 = 0 \dots\dots\dots \boxed{}$
 b) $\left(2x - \frac{1}{2}\right)^2 = 4 \dots\dots\dots \boxed{}$ d) $(x - 1)^2 = (x + 2)^2 \dots\dots\dots \boxed{}$

Premières suites

Calcul 2.4



Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite arithmétique de raison 4 et de premier terme $u_0 = 6$.

a) $u_1 = \dots\dots\dots \boxed{}$
 b) $u_2 = \dots\dots\dots \boxed{}$
 c) $u_3 = \dots\dots\dots \boxed{}$
 d) $u_{100} = \dots\dots\dots \boxed{}$

Calcul 2.5

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_1 = -5$.

- | | |
|--|--|
| a) $u_2 = \dots\dots\dots$ <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/> | c) $u_4 = \dots\dots\dots$ <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/> |
| b) $u_3 = \dots\dots\dots$ <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/> | d) $u_{100} = \dots\dots\dots$ <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/> |

Calcul 2.6

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite arithmétique de raison -2 et de premier terme $u_1 = \frac{10}{3}$.

- | | |
|--|---|
| a) $u_2 = \dots\dots\dots$ <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/> | c) $u_4 = \dots\dots\dots$ <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/> |
| b) $u_3 = \dots\dots\dots$ <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/> | d) $u_{10} = \dots\dots\dots$ <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/> |

Calcul 2.7

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite arithmétique de raison 3 telle que $u_5 = 8$.

- | | |
|---|--|
| a) $u_1 = \dots\dots\dots$ <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/> | c) $u_{101} = \dots\dots\dots$ <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/> |
| b) $u_{20} = \dots\dots\dots$ <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/> | d) $u_{201} = \dots\dots\dots$ <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/> |

Secondes suites**Calcul 2.8**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite arithmétique de raison r telle que $u_3 = 23$ et $u_8 = 7$.

- | | |
|--|---|
| a) $r = \dots\dots\dots$ <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/> | c) $u_{10} = \dots\dots\dots$ <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/> |
| b) $u_5 = \dots\dots\dots$ <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/> | d) $u_0 = \dots\dots\dots$ <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/> |

Calcul 2.9

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite arithmétique de raison r telle que $u_7 = \frac{4}{3}$ et $u_{13} = \frac{17}{9}$.

- | | |
|----------------------------|---|
| a) $r = \dots\dots\dots$ | <input style="width: 60px; height: 25px;" type="text"/> |
| b) $u_0 = \dots\dots\dots$ | <input style="width: 60px; height: 25px;" type="text"/> |

Calcul 2.10



Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite arithmétique de raison a telle que $u_0 = a$.

Exprimer en fonction de a et de n :

a) $u_{10} = \dots\dots\dots$ b) $u_n = \dots\dots\dots$

Calcul 2.11



Soit $a \in \mathbb{R}^*$. On considère $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite arithmétique de raison r définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$u_n = \frac{a^2 + (n-1)}{a}.$$

a) $r = \dots\dots\dots$ b) $u_1 = \dots\dots\dots$

Calcul 2.12



Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \frac{3 + 5an}{2}$.

Déterminer la valeur de a pour que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit arithmétique de raison 2

Calcul 2.13



On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , par :

$$u_{n+1} = \sqrt{3 + u_n^2}.$$

On admet que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a tous ses termes positifs.

Puis, pour tout entier naturel n , on pose $v_n = u_n^2$. On admet que la suite $(v_n)_n$ est arithmétique.

a) Déterminer la raison de la suite $(v_n)_n$

b) Exprimer v_n en fonction de n

Réponses mélangées

$\frac{83}{5}$	$-\frac{55}{6}$	$\frac{8}{11}$	$\frac{5}{54}$	$(n+1)a$	$\frac{163}{5}$	$\frac{4}{3}$	53	$\left\{\frac{1}{3}-\sqrt{2}, \frac{1}{3}+\sqrt{2}\right\}$		
$\{3\}$	$\frac{3}{5}$	$1+3n$	$-\frac{2}{3}$	296	$\frac{7}{6}$	406	596	$-\frac{44}{3}\left\{-\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right\}$		
	18	10	$11a$	-4	$-\frac{16}{5}$	$\frac{1}{a}$	$\frac{12}{7}$	$\frac{4}{5}$	$a\left\{-\frac{1}{2}\right\}$	
	3	9	292	14	$\frac{16}{7}$	$-\frac{8}{3}$	1	4	-2	$-\frac{1}{15}\frac{37}{54}$

► Réponses et corrigés page 151

Suites géométriques

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 3.1 — Des développements.



Développer les expressions suivantes.

a) $(2x - 3)^2$

c) $-3(-x + 2)(6 - 5x)$...

b) $(7 - 8x)(8x + 7)$

d) $5\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$

Calcul 3.2 — Des factorisations.



Factoriser les expressions suivantes.

a) $4x^2 - 49$

d) $\frac{4}{9}x^2 - \frac{25}{4}$

b) $(5 - 3x)^2 - 16$

e) $121x^2 - 110x + 25$

c) $-\frac{3}{2}x^2 - 6x$

f) $(3x - 7)(x + 5) - (3x - 7)(-4x + 3)$

Calcul 3.3 — Images.

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{5}$ pour tout réel x .

Calculer les images de :

a) $\frac{3}{4}$

b) $\frac{2\sqrt{2}}{5}$

Calcul 3.4 — Antécédents.

On considère la fonction f définie par $f(x) = -\frac{1}{4}x + 5$ pour tout réel x .

Déterminer les antécédents de :

a) 0

b) $-\frac{3}{2}$

Calcul de termes

Calcul 3.5



La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = 3$.

a) Calculer u_4

b) Calculer u_6

Calcul 3.6



La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \sqrt{3}$ et de premier terme $u_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

a) Exprimer u_n en fonction de n

b) Calculer u_{123}

Calcul 3.7



On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ géométrique de raison $q = \frac{3}{2}$ telle que $u_6 = 16$.

a) Donner l'expression de u_n en fonction de n

b) Combien vaut u_{10} ?

On donnera le résultat sous la forme d'une fraction de puissances.

.....

Calcul de raisons et de termes

Calcul 3.8



On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ géométrique de raison q telle que $u_3 = \sqrt{2}$ et $u_6 = 27\sqrt{2}$.

a) Déterminer la valeur de la raison de la suite

b) Calculer u_0

Calcul 3.9



Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 telle que $u_2 = \frac{3}{4}$ et $u_4 = 12$.

a) Déterminer les deux valeurs possibles de la raison q

b) Calculer u_0

Calcul 3.10



Soit a un nombre réel.

On considère $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $u_{41} = a$, $u_{42} = a - 2$ et $u_{43} = a + 1$.

a) Déterminer la valeur de a pour que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit géométrique

b) Calculer dans ce cas u_0

Calcul 3.11



Soit $q \in \mathbb{R}$. On considère la suite géométrique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de raison q telle que $u_6 = -5$ et $u_9 = 10\sqrt{2}$.

a) Déterminer q

b) Calculer u_0

c) Exprimer u_{2n} en fonction de n

d) Exprimer u_{3n} en fonction de n

Réponses mélangées

$\frac{\sqrt{2}}{27}$	3	$\left(\frac{2x}{3} - \frac{5}{2}\right)\left(\frac{2x}{3} + \frac{5}{2}\right)$	4 ou -4	3^4	$\frac{\sqrt{2}-3}{5}$	$-3x\left(\frac{x}{2} + 2\right)$	20
$3(1-3x)(3-x)$	192	$(11x-5)^2$	$4x^2 - 12x + 9$	$-\frac{4}{5} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{41}$	$49 - 64x^2$	-3^{61}	
$-\sqrt{2}$	$16 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-6}$	$-\sqrt{3}^{n-1}$	$(3x-7)(5x+2)$	$\frac{4}{5}$	$(2x-7)(2x+7)$	$\frac{3}{64}$	$-\frac{5}{8}$
$-15x^2 + 48x - 36$	26	48	$\frac{(-1)^{n+1} \times 5}{\times 2^{n-3} \times \sqrt{2}^n}$	$-\frac{9}{40}$	$5x^2 - 5x + 2$	$-5 \times 2^{n-3}$	

► Réponses et corrigés page 153

Calcul de sommes I

Prérequis

Dans cette fiche, on utilisera la notation suivante : si $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}$, on note

$$\sum_{k=1}^n u_k = u_1 + u_2 + \dots + u_n.$$

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 4.1 — Quelques simplifications.



Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$, avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}$, les nombres suivants.

a) $\sqrt{45} - 7\sqrt{5}$

c) $5 - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$

b) $3\sqrt{98} - 5\sqrt{2}$

Calcul 4.2 — Avec la quantité conjuguée.



Écrire sans radical au dénominateur les nombres suivants.

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

c) $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$

b) $\frac{2 - \sqrt{6}}{\sqrt{3}}$

d) $\frac{\sqrt{2} - 1}{3 - \sqrt{2}}$

Calcul 4.3 — Quelques fractions.



Soit $m \in \mathbb{R}$ un nombre réel différent de -1 , 1 , 0 , et 2 .

Effectuer les calculs suivants.

a) $\frac{m-1}{m} - \frac{1}{m+1}$

b) $\frac{m-3}{2m-4} + \frac{3}{2m}$

c) $\frac{4m}{m^2-1} - \frac{m+2}{m(m+1)}$

Premières sommes

Rappel

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Calcul 4.4 — Sommes d'entiers consécutifs.



Calculer les sommes suivantes.

a) $\sum_{k=1}^{n+1} k$

d) $\sum_{k=1}^n (k-1)$

b) $\sum_{k=2}^n k$

e) $\sum_{k=n}^{2n} k$

c) $\sum_{k=2}^{n+1} k$

Secondes sommes

Rappel

- La somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique vaut

$$\frac{\text{nombre de termes} \times (\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{2}.$$

- La somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q (où $q \neq 1$) vaut

$$\text{premier terme} \times \frac{(1 - q^{\text{nombre de termes}})}{1 - q}.$$

Calcul 4.5



Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r .

Dans chacun des cas suivants, calculer :

a) $\sum_{k=0}^{15} u_k$, si $u_0 = 2$ et $r = 4$

b) $\sum_{k=5}^{18} u_k$, si $u_0 = -1$ et $r = -3$

Calcul 4.6



Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q .

Dans chacun des cas suivants, calculer :

a) $\sum_{k=0}^8 u_k$, si $u_0 = 2$ et $q = 4$

b) $\sum_{k=5}^{12} u_k$, si $u_0 = -1$ et $q = -3$

Calcul 4.7 — Utilisation du symbole de somme (I).



Écrire à l'aide du symbole $\sum$ les expressions suivantes.

a) $\frac{2}{3^2} + \frac{2^2}{3^3} + \frac{2^3}{3^4} + \cdots + \frac{2^{10}}{3^{11}}$

b) $\frac{2}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{2 \times 3^4} + \cdots + \frac{1}{2^8 \times 3^{11}}$

c) $-1 + 2 - 2^2 + 2^3 - 2^4 + \cdots + 2^{35}$

d) $1 + 2^2 + 2^4 + 2^6 + \cdots + 2^{2n}$

Calcul 4.8



Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer :

a) $\sum_{k=1}^n 1$

d) $\sum_{k=n}^{2n} 2^k$

b) $\sum_{k=1}^n 2^k$

e) $\sum_{k=0}^n 3^k$

c) $\sum_{k=0}^{2n} 2^k$

f) $\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k$

Calcul 4.9 — Utilisation du symbole de somme (II).



Écrire à l'aide du symbole $\sum$ les expressions suivantes.

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}$, où $n \in \mathbb{N}^*$

b) $1 - 2 + 4 + \cdots + (-2)^n$, où $n \in \mathbb{N}$

c) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}$, où $n \in \mathbb{N}$

d) $\frac{2}{3} + \frac{4}{15} + \frac{8}{75} + \cdots + \frac{2^{n+1}}{3 \times 5^n}$, où $n \in \mathbb{N}$

Calcul 4.10



Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer :

a) $\sum_{k=1}^n (3 + 2^k)$

d) $\sum_{k=1}^n (2k + 3^k)$

b) $\sum_{k=0}^n (2 + 5 \times 3^k)$

e) $\sum_{k=0}^n (1 - 4^k + 5k)$

c) $\sum_{k=1}^n (2^k + 3^k)$

Calcul 4.11



Calculer la somme de tous les entiers impairs compris entre 1 et 2 000

Réponses mélangées

$$\begin{array}{ccccccc}
 n & 2^n(2^{n+1} - 1) & \sum_{k=0}^n \frac{2^{k+1}}{3 \times 5^k} & -4\sqrt{5} & n(n+1) + \frac{3}{2}(3^n - 1) & \frac{7 - 2\sqrt{10}}{3} & \\
 1\,000\,000 & 2n + 2 + \frac{5}{2}(3^{n+1} - 1) & \frac{m^2 - 6}{2m(m-2)} & \frac{3n(n+1)}{2} & -398\,520 & & \\
 \frac{3^{n+1} - 1}{2} & \sum_{k=0}^{35} (-(-2)^k) & 16\sqrt{2} & 2(2^n - 1) + \frac{3}{2}(3^n - 1) & 2^{n+1} - 2 & & \\
 \frac{(n+1)(n+2)}{2} & \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} & \frac{n^2 + n - 2}{2} & \frac{m^2 - m - 1}{m(m+1)} & 0 & -497 & \sum_{k=1}^{10} \frac{2^k}{3^{k+1}} \\
 \sum_{k=0}^n 2^{2k} & 512 & \frac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{3} & \sum_{k=0}^n (-2)^k & \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} & \frac{3m^2 - m + 2}{m(m+1)(m-1)} & \\
 \frac{2\sqrt{2} - 1}{7} & 3n + 2(2^n - 1) & 174\,762 & n + 1 + \frac{1 - 4^{n+1}}{3} + \frac{5n(n+1)}{2} & & & \\
 \sum_{k=0}^9 \frac{2^{1-k}}{3^{k+2}} & \frac{n(n-1)}{2} & 2^{2n+1} - 1 & \frac{n(n+3)}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 2\sqrt{6} &
 \end{array}$$

► Réponses et corrigés page 156

Calcul de sommes II

Prérequis

Dans cette fiche, on utilisera la notation suivante : si $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}$, on note

$$\sum_{k=1}^n u_k = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

- Pour une suite arithmétique $(u_n)_n$, on a

$$\sum_{n=n_0}^{n_1} u_n = (n_1 - n_0 + 1) \times \frac{(u_{n_0} + u_{n_1})}{2}.$$

- Pour $q \neq 1$, on a
$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 5.1



Développer, réduire et ordonner par puissances croissantes de x les expressions suivantes.

a) $(x+1)(x-2)$

b) $(2-x)\left(\frac{1}{3} + \frac{5}{2}x\right)$

Calcul 5.2 — Quelques fractions.



Soit x un réel distinct de 1. Écrire les expressions suivantes sous forme d'une seule fraction simplifiée.

a) $x + 1 - \frac{1}{1-x}$

b) $x - 4 - \frac{(x-5)(2+x)}{x-1}$

Sommes et écritures littérales

Calcul 5.3



On considère deux réels a et b .

a) Combien y a-t-il de termes dans la somme $\sum_{k=0}^4 a^k b^{4-k}$?

b) Écrire $\sum_{k=0}^4 a^k b^{4-k}$ sous sa forme développée

c) Calculer $(a-b) \sum_{k=0}^4 a^k b^{4-k}$

Calcul 5.4



On considère deux réels a et b .

- a) Combien y a-t-il de termes dans la somme $\sum_{k=0}^6 (-1)^k a^{6-k} b^k$?
- b) Écrire $\sum_{k=0}^6 (-1)^k a^{6-k} b^k$ sous sa forme développée
- c) Calculer $(a+b) \sum_{k=0}^6 (-1)^k a^{6-k} b^k$

Calcul 5.5



On considère un réel a .

- a) Combien y a-t-il de termes dans la somme $\sum_{k=0}^6 a^k (-1)^{6-k}$?
- b) Écrire $\sum_{k=0}^6 a^k (-1)^{6-k}$ sous sa forme développée
- c) Calculer $(a+1) \sum_{k=0}^6 a^k (-1)^{6-k}$

Calcul 5.6 — Une formule phare.



Calculer, en fonction de b et n , $(1-b) \sum_{k=0}^n b^k$

Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

Calcul 5.7



On considère une suite $(u_n)_n$, qui est arithmétique, de premier terme $u_0 = 1$ et dont la raison vaut $r = 2$.

Calculer :

- a) $\sum_{n=1}^{10} u_n$
- b) $\sum_{n=5}^{15} u_n$
- c) Calculer $\sum_{n=0}^N u_n$ en fonction de N

Calcul 5.8



On considère une suite $(u_n)_n$, qui est arithmétique de premier terme $u_0 = -2$ et dont la raison vaut $r = \frac{3}{2}$.

Calculer :

- a) $\sum_{n=1}^5 u_n$
- b) $\sum_{n=0}^{15} u_n$
- c) Calculer $\sum_{n=0}^{4N} u_n$ en fonction de N

Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

Calcul 5.9 — Un QCM.



On considère une suite $(u_n)_n$, qui est une suite géométrique de raison q avec $q \neq 1$. On note $S = \sum_{k=5}^{10} u_k$.

Choisissez la bonne réponse :

- Ⓐ $S = u_5 \frac{1 - q^{11}}{1 - q}$ Ⓑ $S = u_6 \frac{1 - q^6}{1 - q}$ Ⓒ $S = u_5 \frac{1 - q^6}{1 - q}$ Ⓓ $S = \frac{1 - q^{11}}{1 - q}$

.....

Calcul 5.10 — Des sommes de termes d'une suite géométrique.



On considère une suite $(u_n)_n$, géométrique de premier terme u_0 et dont la raison vaut q .

Dans chacun des cas suivants, exprimer S en fonction de n .

- a) $u_0 = \frac{1}{3}, q = -2, S = \sum_{k=2}^n u_k$
- c) $u_0 = 3, q = \frac{3}{2}, S = \sum_{k=1}^{2n} u_k$
- b) $u_0 = 1, q = \sqrt{2}, S = \sum_{k=0}^{2n+1} u_k$
- d) $u_0 = 1, q = 2^p, S = \sum_{k=1}^n u_k$

Calcul 5.11 — Des calculs de sommes.



Calculer les sommes suivantes en fonction de n .

- a) $S = \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{3^{k+1}}$
- c) $S = \sum_{k=0}^n (3^k - 2^{k+1})$
- b) $S = \sum_{k=1}^{3n} \frac{3^{2k}}{2^k}$
- d) $S = \sum_{k=0}^n \frac{2}{3^k} + \sum_{k=0}^n \frac{2^{k-1}}{3^k}$

Cas des suites arithmético-géométriques

Calcul 5.12 — Une somme arithmético-géométrique (I).



On considère $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{4}{5}u_n + 1,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Les différentes questions de ce calcul sont liées.

a) Déterminer le réel α tel que $\alpha = \frac{4}{5}\alpha + 1$

On admet que la suite $(v_n)_n$ définie par $v_n = u_n - \alpha$ est géométrique de raison $\frac{4}{5}$.

b) Déterminer l'expression générale de v_n puis celle de u_n en fonction de n

c) Calculer $\sum_{k=0}^n v_k$

d) Calculer $\sum_{k=0}^n u_k$

Réponses mélangées

$$\begin{array}{ccccccc}
 a^6 - a^5 + a^4 - a^3 + a^2 - a + 1 & \frac{9}{7} \left(\left(\frac{9}{2} \right)^{3n} - 1 \right) & 1 - b^{n+1} & \frac{14 - 2x}{x - 1} \\
 a^5 - b^5 & a^7 + 1 & 5 - 4 \times \left(\frac{4}{5} \right)^n & \frac{4}{9} - \frac{1}{9}(-2)^{n+1} \\
 231 & \frac{3}{2} + \frac{3^{n+1}}{2} - 2^{n+2} & \frac{2^p(1 - 2^{np})}{1 - 2^p} & \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - \sqrt{2}} \\
 b^4 + ab^3 + a^2b^2 + a^3b + a^4 & \frac{9}{2} - \frac{1 + 2^n}{3^n} & 20 \left(\frac{4}{5} \right)^{n+1} - 20 & 9 \left(\left(\frac{3}{2} \right)^{2n} - 1 \right) \\
 a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6 & 5 & 12N^2 - 5N - 2 & \frac{25}{2} & 1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1} \\
 \textcircled{c} & -2 - x + x^2 & \frac{2}{3} + \frac{14}{3}x - \frac{5}{2}x^2 & 5n - 15 + 20 \left(\frac{4}{5} \right)^{n+1} & (N + 1)^2 & \frac{x^2}{x - 1}
 \end{array}$$

► Réponses et corrigés page 159

Calcul de produits

Prérequis

Si $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, on note

$$\prod_{k=1}^n a_k = a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n.$$

Notez bien que l'indice k qui intervient dans l'expression précédente pourrait porter un autre nom. Ainsi, on a $\prod_{k=1}^n a_k = \prod_{i=1}^n a_i$.

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 6.1 — Trois calculs.



Calculer :

a) $(-2)^5 - 1 \dots$

b) $\frac{1}{5} - 1 \dots\dots\dots$

c) $\sqrt{(-3)^4 \times 4^{-3}}$

Calcul 6.2 — Des carrés.



Soient a , b et c des nombres réels. Développer :

a) $(a + b)^2 \dots$

b) $(a - b)^3 \dots$

c) $(a + b - c)^2 \dots$

Premières manipulations

Calcul 6.3 — Écritures (I).



Écrire les expressions suivantes à l'aide du symbole « $\prod$ ».

a) $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 99 \dots\dots\dots$

b) $3^3 \times 4^4 \times 5^5 \times \dots \times 50^{50} \dots\dots\dots$

c) $3^5 \times 4^6 \times 5^7 \times \dots \times 15^{17} \dots\dots\dots$

d) $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \dots\dots\dots$

Calcul 6.4 — Écritures (II).



Écrire les expressions suivantes à l'aide du symbole « $\prod$ ».

a) $2x_1 \times 5x_2 \times 10x_3 \times \cdots \times (9n^2 + 1)x_{3n}$

b) $(x_1 + x_2) \times (x_2 + x_3) \times (x_3 + x_4) \times \cdots \times (x_{n-1} + x_n)$

c) $(x_1 + y_1) \times (x_2 + y_2) \times (x_3 + y_3) \times \cdots \times (x_n + y_n)$

d) $(x_0 + y_n) \times (x_1 + y_{n-1}) \times (x_2 + y_{n-2}) \times \cdots \times (x_{n-1} + y_1) \times (x_n + y_0)$

Calcul 6.5 — Un mélange de produits et de sommes.



Écrire les expressions suivantes à l'aide des symboles « $\prod$ » et « $\sum$ ».

a) $x_1 + x_1x_2 + x_1x_2x_3 + \cdots + (x_1x_2x_3 \cdots x_n)$

b) $x_1 \times (x_1 + x_2) \times (x_1 + x_2 + x_3) \times \cdots \times (x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n)$

Calcul 6.6



Déterminer la valeur de chacune des expressions suivantes.

a) $\prod_{k=1}^5 k$

b) $\prod_{k=0}^3 (2k + 1)$

c) $\prod_{k=1}^8 (k - 3)^2$

d) $\prod_{k=1}^{10} \frac{k}{k+1}$

Calcul 6.7 — Un produit constant.



Soit $n \in \mathbb{N}$. Que vaut $\prod_{k=0}^n 2$?

(a) $2n$

(c) $2(n - 1)$

(e) 2^{n+1}

(b) $2(n + 1)$

(d) 2^n

(f) 2^{n-1}

.....

Calcul 6.8



Soit $n \in \mathbb{N}$. Que vaut $\prod_{k=0}^{4n} 2$? Il y a deux réponses possibles.

(a) $8n$

(c) $2^{4(n+1)}$

(e) $4^{2(n+1)}$

(b) $2^4 \times 2^n$

(d) 2×2^{4n}

(f) 2^{4n+1}

Télescopage

Calcul 6.9 — Principe du télescopage (I).



On considère des réels non nuls $a_1, a_2, \dots, a_n$. Pour $1 \leq k \leq n-1$, on pose $b_k = \prod_{i=1}^k \frac{a_{i+1}}{a_i}$.

a) Que vaut b_1 ?

c) Que vaut b_3 ?

b) Que vaut b_2 ?

d) Que vaut b_{n-1} ?

Calcul 6.10 — Principe du télescopage (II).



On considère deux entiers naturels n et p tels que $2 \leq p \leq n$. On considère également des réels non nuls $a_1, a_2, \dots, a_n$.

À laquelle des expressions suivantes est égal $\prod_{k=p}^n \frac{a_{k-1}}{a_k}$?

(a) $\frac{a_1}{a_n}$

(c) $\frac{a_2}{a_n}$

(e) $\frac{a_{p-1}}{a_n}$

(g) $\frac{a_{n-1}}{a_p}$

(b) $\frac{a_n}{a_1}$

(d) $\frac{a_n}{a_2}$

(f) $\frac{a_n}{a_{p-1}}$

(h) $\frac{a_p}{a_{n-1}}$

Réponses mélangées

(e) $\frac{a_2}{a_1} \quad \frac{1}{11} \quad \prod_{k=1}^n (x_k + y_k) \quad \prod_{k=0}^n (x_k + y_{n-k}) \quad \frac{a_4}{a_1} \quad \prod_{k=1}^{n-1} (x_k + x_{k+1})$

$\prod_{k=1}^{3n} (k^2 + 1)x_k \quad \prod_{k=1}^n \sum_{i=1}^k x_i \quad \prod_{k=1}^{99} k \quad a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc \quad \prod_{k=3}^{50} k^k$

$\frac{9}{8} \quad -33 \quad 105 \quad 0 \quad a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \quad \frac{a_n}{a_1} \quad \frac{a_3}{a_1} \quad \prod_{k=1}^8 2$

$-\frac{4}{5} \quad \prod_{k=3}^{15} k^{k+2} \quad \sum_{k=1}^n \prod_{i=1}^k x_i \quad 120 \quad (e) \quad (d) \text{ et } (f) \quad a^2 + 2ab + b^2$

► Réponses et corrigés page 164

Limites de suites

Théorèmes de comparaison

Calcul 7.1 — Autour de $(-1)^n$.



Pour chacune des suites définies par les expressions suivantes, dire si « oui » ou « non », elle admet une limite (finie ou infinie).

- | | | | | | |
|------------------------|----------------------|-----------------------|----------------------|--------------------------|----------------------|
| a) $(-1)^n$ | <input type="text"/> | d) $n + (-1)^n$ | <input type="text"/> | g) $\cos((-1)^n \pi)$.. | <input type="text"/> |
| b) $(-1)^{2n+1}$ | <input type="text"/> | e) $2n(-1)^n$ | <input type="text"/> | h) $\sin((-1)^n \pi)$.. | <input type="text"/> |
| c) $n(-1)^n$ | <input type="text"/> | f) $n(-1)^{2n}$ | <input type="text"/> | | |

Calcul 7.2



Quelle est la limite des suites définies par les expressions suivantes ?

- a) $\left(\frac{13}{17}\right)^n \cos(n)$
- (a) $-\infty$ (b) $\frac{13}{17}$ (c) 1 (d) 0 (e) $+\infty$
-
- b) $(9 + (-1)^n) \times (0,2)^n$
- (a) -10 (b) -2 (c) -1 (d) 0 (e) 1 (f) 1,8
-

Calcul 7.3 — Des inégalités.



Soit la suite $(u_n)_n$ définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{n + (-1)^n}{n - (-1)^n}$.

a) Lequel des encadrements suivants est-il vérifié ?

- (a) $1 \leq u_n \leq 1$ (c) $\frac{n-1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{n+1}{n-1}$ (e) $\frac{n-2}{n-1} \leq u_n \leq \frac{n+2}{n-1}$
- (b) $\frac{n+1}{n-1} \leq u_n \leq \frac{n-1}{n+1}$ (d) $\frac{n-1}{n} \leq u_n \leq \frac{n+1}{n}$
-

b) Quelle est la limite de la suite $(u_n)_n$?

Formes indéterminées

Calcul 7.4 — Reconnaître une forme indéterminée .



Pour chacune des suites définies par les expressions suivantes, dire si « oui » ou « non », elle présente une forme indéterminée.

- a) $n^2 + 3n + 1$ c) $(1,001)^n \times \frac{1}{n^{19}}$
- b) $\sqrt{n} - n$ d) $\frac{3}{2} + \frac{7}{n} + \frac{49}{n^2} + \frac{1}{8n^3}$

Calculs de limites

Calcul 7.5



Déterminer les limites des suites définies par les expressions suivantes.

On pourra factoriser par le terme prépondérant pour lever les indéterminations.

- a) $\frac{2^n - \frac{1}{2^n}}{n^2 - \frac{1}{n^2}}$ b) $\frac{5^n - 1}{10^n + 5}$

Calcul 7.6



Déterminer les limites des suites définies par les expressions suivantes.

On pourra factoriser par le terme prépondérant pour lever les indéterminations.

- a) $\frac{3n^3 - n^2 - 17}{5n^3 + 9n^2 + n}$ c) $\frac{\left(\frac{8}{11}\right)^n}{\left(\frac{24}{121}\right)^n}$
- b) $\frac{(3-n)(2+\sqrt{n})}{9-n^2}$ d) $8^{7n} - 56^n$

Réponses mélangées

$+\infty$	non	0	$\frac{3}{5}$	non	1	non	0	oui	oui	$+\infty$
(d)	(c)	oui	non	oui	non	oui	oui	$+\infty$	oui	(d)

► Réponses et corrigés page 166

Révisions sur la dérivation

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 8.1 — Quelques fractions.



Écrire les fractions suivantes sous la forme d'une fraction irréductible.

a) $\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$

c) $\frac{25}{15} - \frac{4}{3}$

b) $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2}$

d) $\frac{16}{4} + \frac{2}{5}$

Calcul 8.2



Développer les expressions suivantes et les ordonner en fonction des puissances décroissantes de x .

a) $(x-3)(x^2-2x+1)$

c) $(x+4)(x+5) - x^2(x+1)$...

b) $(x-2)(x^2+3x+4)$

d) $x^2+6x+9 - (x-3)^2$

Calcul 8.3 — Quelques dérivées élémentaires.



Donner les dérivées des fonctions suivantes.

a) $x \mapsto 4x$

c) $x \mapsto \sqrt{x}$

e) $x \mapsto e$

b) $x \mapsto 5x+3$.

d) $x \mapsto e^{-3x}$...

f) $x \mapsto \frac{1}{x^5}$

Utilisation des règles de dérivation

Calcul 8.4 — Combinaisons linéaires de fonctions élémentaires (I).



Donner les dérivées des fonctions suivantes.

a) $x \mapsto 4x^3 + 5x^4$

c) $x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

b) $x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

d) $x \mapsto 3e^{3x} + \frac{1}{x}$

Calcul 8.5 — Combinaisons linéaires de fonctions élémentaires (II).



Donner les dérivées des fonctions suivantes.

a) $x \mapsto \frac{e^{3x}}{3} + \frac{2}{x}$

b) $x \mapsto 3e^{2x} - (4x)^4$

c) $x \mapsto (e^{5x})^2 + \frac{2}{x} - (3x)^4$

Calcul 8.6 — Produits et quotients de fonctions (I).



Donner les dérivées des fonctions suivantes.

a) $x \mapsto (x+1)e^{2x}$

b) $x \mapsto (x^2+1)e^{3x}$

Calcul 8.7 — Produits et quotients de fonctions (II).



Donner les dérivées des fonctions suivantes.

a) $x \mapsto \frac{e^x}{1+e^x}$

b) $x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

c) $x \mapsto \frac{x^2 + 2xe^x + 1}{1+x^2}$

Calcul 8.8 — Composition avec des fonctions linéaires (I).



Donner les dérivées des fonctions suivantes.

a) $x \mapsto (3x+2)^2$

c) $x \mapsto \frac{1}{(5-2x)^4}$

b) $x \mapsto \frac{1}{5x+2}$

Calcul 8.9 — Composition avec des fonctions linéaires (II).



Donner les dérivées des fonctions suivantes.

a) $x \mapsto (3x + 2)^2 e^{4x+5}$

b) $x \mapsto (x + e)^4 + 3(3x + 2)^3$

Dérivées secondes

Calcul 8.10



On considère la fonction $f : x \mapsto xe^x$. Déterminer :

a) l'expression de $f'(x)$..

b) l'expression de $f''(x)$..

Calcul 8.11



On considère la fonction $f : x \mapsto x + 1 - \frac{x}{e^x}$. Déterminer :

a) l'expression de $f'(x)$..

b) l'expression de $f''(x)$..

Calculs plus avancés

Calcul 8.12 — Calcul d'une somme par dérivation.



Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$.

a) Calculer $f'(x)$ sous la forme d'une somme

b) Pour $x \neq 1$, exprimer $f(x)$ sous la forme d'un quotient de polynômes.

On utilisera une formule du cours.

.....

c) En déduire, pour $x \neq 1$, une expression de $\sum_{k=1}^n kx^{k-1}$ sous forme de fraction.

.....

Calcul 8.13 — Dérivées successives d'une inverse.



Étant donné une fonction f , on note (sous réserve d'existence) f' , f'' , f''' puis $f^{(4)}$, $f^{(5)}$, $f^{(6)}$, etc. les dérivées successives de f . En général, la dérivée n -ième est notée $f^{(n)}$.

On considère la fonction f définie, pour $x \in \mathbb{R}$, par

$$f(x) = \frac{1}{3-2x}.$$

Déterminer les expressions de :

a) $f'(x)$		d) $f^{(4)}(x)$	
b) $f''(x)$		e) $f^{(5)}(x)$	
c) $f^{(3)}(x)$			
f) $f^{(n)}(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$			

Réponses mélangées

$$\begin{array}{llll}
 x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}} & \frac{1}{12} & \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2} & x \mapsto -\frac{5}{(5x+2)^2} & 12x & \frac{2-x}{e^x} \\
 x \mapsto \frac{2e^x(x^3-x^2+x+1)}{(1+x^2)^2} & x \mapsto \frac{e^x+e^{-x}}{2} & x \mapsto \frac{1-x^{n+1}}{1-x} & x \mapsto \frac{8}{(5-2x)^5} & & \\
 \frac{n! \times 2^n}{(3-2x)^{n+1}} & x \mapsto 2(3e^{2x}-2^9x^3) & x \mapsto 4x^2(3+5x) & 1 & x^3+x^2-2x-8 & \\
 (x+2)e^x & x \mapsto (3x^2+2x+3)e^{3x} & \frac{5! \times 2^5}{(3-2x)^6} & (x+1)e^x & x \mapsto e^{3x} - \frac{2}{x^2} & \\
 \frac{1}{3} & x \mapsto \frac{e^x}{(1+e^x)^2} & \frac{2^3}{(3-2x)^3} & x \mapsto 1+2x+3x^2+\dots+nx^{n-1} & \frac{e^x-1+x}{e^x} & \\
 x \mapsto 0 & \frac{22}{5} & x \mapsto 5 & x \mapsto 6(3x+2) & x \mapsto \frac{e^x-e^{-x}}{2} & x^3-5x^2+7x-3 \\
 x \mapsto -3e^{-3x} & x \mapsto 4 & x \mapsto (2x+3)e^{2x} & \frac{2}{(3-2x)^2} & \frac{4! \times 2^4}{(3-2x)^5} & x \mapsto \frac{4}{(e^x+e^{-x})^2} \\
 -x^3+9x+20 & \frac{3! \times 2^3}{(3-2x)^4} & x \mapsto 9e^{3x} - \frac{1}{x^2} & x \mapsto 2(3x+2)(6x+7)e^{4x+5} & & \\
 x \mapsto -\frac{5}{x^6} & x \mapsto 2\left(5e^{10x} - \frac{1}{x^2} - 2 \times 3^4 x^3\right) & x \mapsto 4(x+e)^3 + 27(3x+2)^2 & & &
 \end{array}$$

► Réponses et corrigés page 168

Dérivée des fonctions composées

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 9.1 — Développer.



Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes.

a) $(2x + 3)(3x - 7) \dots$

c) $(x + 1)^2(x - 3) \dots$

b) $(9x - 7)^2 \dots$

d) $(x^2 + 3x + 2)^2 \dots$

Calcul 9.2 — Mettre au même dénominateur.



Mettre les expressions suivantes au même dénominateur, puis réduire et ordonner les numérateurs.

a) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{3-x} \dots$

b) $\frac{2x+3}{x-4} + \frac{3}{x-7} \dots$

c) $\frac{1}{x^3} + \frac{2x+3}{x(x-4)} \dots$

Fonctions composées

Calcul 9.3 — Application des formules usuelles (I).



Déterminer l'expression de $f'(x)$, où f est définie, pour $x \in \mathbb{R}$, par :

a) $f(x) = 2e^{1-x^3} \dots$

c) $f(x) = \sqrt{1+e^x} \dots$

b) $f(x) = \frac{1}{1+e^{2x}} \dots$

d) $f(x) = \sqrt{1+x^2} \dots$

Calcul 9.4 — Application des formules usuelles (II).



Déterminer l'expression de $f'(x)$ où f est définie, pour $x \in \mathbb{R}$, par :

a) $f(x) = (x^2 + ex)^4$

b) $f(x) = \left(\frac{x^2 - 2x + 3}{2}\right)^2$

c) $f(x) = (4x^2 + 3x + 5)^3$

d) $f(x) = (3x^2 - 5x + 7)^{-2}$

Calcul 9.5 — Ensemble de dérivabilité.



On considère la fonction $f : \begin{cases} [-1, \frac{5}{2}] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{-2x^2 + 3x + 5}. \end{cases}$

a) Pour x dans le domaine de dérivabilité de f , que vaut $f'(x)$?

b) Sur quel intervalle la fonction f est-elle dérivable?

Ⓐ $\left[-1, \frac{5}{2}\right]$

Ⓑ $\left]-1, \frac{5}{2}\right]$

Ⓒ $\left[-1, \frac{5}{2}\right[$

Ⓓ $\left]-1, \frac{5}{2}\right[$

.....

Calcul 9.6 — Calcul numérique.



On considère la fonction $f : \begin{cases} [-3, -\frac{1}{2}] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x^3 + 2x^2 - 4x - 1}. \end{cases}$

On admet que la fonction f est dérivable sur son domaine de définition.

a) Que vaut $f'(-1)$?

b) Que vaut $f'(-2)$?

Calcul 9.7 — Équation de tangente.



On considère la fonction $g : \begin{cases}]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto e^{x-\sqrt{x}}. \end{cases}$

a) Rappeler l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative d'une fonction f en un point d'abscisse a où elle est dérivable.....

b) Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 1.

.....

Plusieurs opérations

Calcul 9.8 — Produit avec une fonction composée (I).



Déterminer l'expression sous forme factorisée de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $f(x) = (3x + 5)e^{x^2+3}$

b) $f(x) = (x - 3)\sqrt{1 + x^2}$

Calcul 9.9 — Produit avec une fonction composée (II).



Déterminer l'expression sous forme factorisée de $f'(x)$ pour f définie, pour $x \in]0, +\infty[$, par :

a) $f(x) = x^2 e^{\sqrt{x}}$

b) $f(x) = x \exp\left(\frac{1}{x}\right)$

Calcul 9.10 — Une dérivée seconde.



On considère la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto e^{x^2-5x+7}. \end{cases}$

Donner une expression de $f''(x)$ pour tout réel x

Calcul 9.11 — Produit de deux fonctions composées.



Déterminer l'expression sous forme factorisée de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $f(x) = \sqrt{1 + x^2} \times e^{x^3}$

b) $f(x) = \frac{e^{5-x^3}}{(x^2 - 2)^3}$

Calcul 9.12 — Composition d'un produit ou d'un quotient.



Déterminer l'expression sous forme factorisée de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $f(x) = \exp((x^2 + 2x + 3)\sqrt{x})$

b) $f(x) = \left(\frac{2x+5}{4x-1}\right)^2$

Calculs plus avancés

Calcul 9.13 — Un peu de calcul formel.



On considère une fonction f définie et quatre fois dérivable sur un intervalle I , et telle que

$$f' = 1 - f^2.$$

a) Exprimer f'' en fonction de f

b) Exprimer f''' en fonction de f

Réponses mélangées

$$\begin{array}{cccc} y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & \frac{2}{(3-x)(x-1)} & \frac{3-4x}{2\sqrt{-2x^2+3x+5}} & \frac{x^3-x^2-5x-3}{2x^3+3x^2+x-4} \\ \textcircled{d} \quad 0 & (x-1)(x^2-2x+3) & \frac{(x-1)\exp(\frac{1}{x})}{x} & \frac{x^3(x-4)}{x^3(x-4)} \\ \frac{(5x^2+6x+3)\exp((x^2+2x+3)\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} & \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} & -6x^2e^{1-x^3} & -2+8f^2-6f^4 \\ 81x^2-126x+49 & \frac{2x^2-8x-33}{(x-7)(x-4)} & (4x^2-20x+27)e^{x^2-4x+7} & \\ 4(2x+e)(x^2+ex)^3 & x^4+6x^3+13x^2+12x+4 & 6x^2-5x-21 & -\frac{44(2x+5)}{(4x-1)^3} \\ \frac{x(3x^3+3x+1)e^{x^3}}{\sqrt{1+x^2}} & 3(8x+3)(4x^2+3x+5)^2 & -\frac{3x(x^3-2x+2)e^{5-x^3}}{(x^2-2)^4} & \\ \frac{1}{2}x(\sqrt{x}+4)e^{\sqrt{x}} & \frac{-2(6x-5)}{(3x^2-5x+7)^3} & y=f'(a)(x-a)+f(a) & -2f+2f^3 \\ \frac{(2x-1)(x-1)}{\sqrt{1+x^2}} & -\frac{5}{4} & \frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}} & \frac{2e^{2x}}{(1+e^{2x})^2} \\ & & (6x^2+10x+3)e^{x^2+3} & \end{array}$$

► Réponses et corrigés page 172

Convexité

Reconnaître une fonction convexe

Calcul 10.1



Si f' est croissante sur I , alors ...

(a) f est positive

(c) f est convexe

(b) f' est positive

(d) f' est convexe

.....

Calcul 10.2



Si f'' est positive sur I , alors ...

(a) f'' est croissante

(c) f' est convexe

(b) f est convexe

(d) f'' est convexe

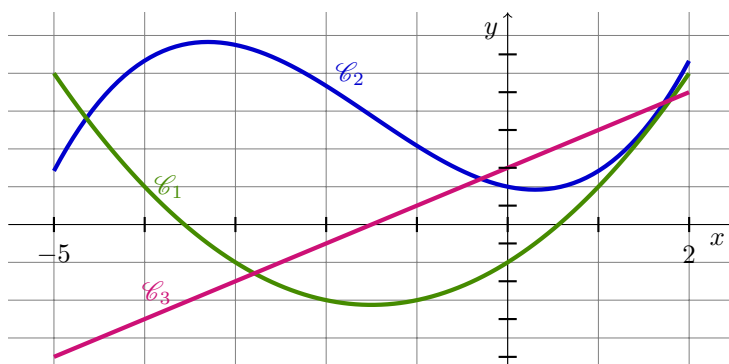
.....

Calcul 10.3 — Identification de courbes (I).



On considère f une fonction définie sur l'intervalle $[-5, 2]$.

On donne ci-dessous trois courbes : $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$. Elles correspondent aux fonctions f , f' et f'' , et il faut déterminer quelle fonction correspond à quelle courbe.



a) $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ ou $\mathcal{C}_3$: quelle est la courbe de f ?

b) $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ ou $\mathcal{C}_3$: quelle est la courbe de f' ?

c) La fonction f est

(a) convexe sur $[-5, 2]$

(c) convexe sur $\left[-\frac{1}{2}, 2\right]$

(b) concave sur $[-5, -1]$

.....

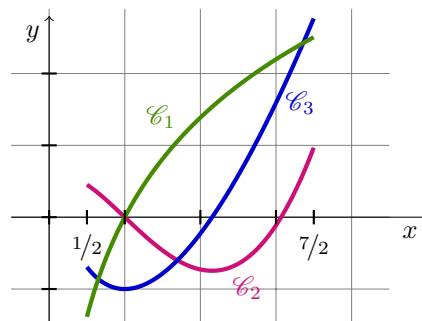
Calcul 10.4 — Identification de courbes (II).



On considère f une fonction définie sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right]$.

On donne ci-contre trois courbes : $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$.

Elles correspondent aux fonctions f , f' et f'' , et il faut deviner quelle fonction correspond à quelle courbe.



a) $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ ou $\mathcal{C}_3$: quelle est la courbe de f'' ?

b) $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ ou $\mathcal{C}_3$: quelle est la courbe de f ?

c) f est convexe sur ..

d) f est concave sur ..

Études calculatoires

Calcul 10.5 — En utilisant l'expression de la dérivée (I).



Dans chacun des cas suivants, déterminer les variations de f' et en déduire les intervalles sur lesquels f est convexe.

► Pour $f'(x) = x^3 + 2x$.

a) Variations de f'

b) Intervalles sur lesquels f est convexe

► Pour $f'(x) = e^{2x} - \sqrt{7}$.

c) Variations de f'

d) Intervalles sur lesquels f est convexe

Calcul 10.6 — En utilisant l'expression de la dérivée (II).



Dans chacun des cas suivants, déterminer les variations de f' et en déduire les intervalles sur lesquels f est convexe.

► Pour $f'(x) = x^2 - 7x$.

a) Variations de f'

b) Intervalles sur lesquels f est convexe

► Pour $f'(x) = -(2x + 6)^2$.

c) Variations de f'

d) Intervalles sur lesquels f est convexe

Calcul 10.7 — Des calculs de dérivée seconde (I).



Dans chacun des cas suivants, calculer $f''(x)$ et en déduire les intervalles sur lesquels f est convexe.

► Pour $f(x) = e^x + e^{-x}$.

► Pour $f(x) = e^x - e^{-x}$.

a) $f''(x)$

c) $f''(x)$

b) Intervalles sur lesquels f est convexe

d) Intervalles sur lesquels f est convexe

.....

.....

Calcul 10.8 — Des calculs de dérivée seconde (II).



Dans chacun des cas suivants, calculer $f''(x)$ et en déduire les intervalles sur lesquels f est convexe.

► Pour $f(x) = -e^{-3x^2+2}$.

a) $f''(x)$

b) Intervalles sur lesquels f est convexe

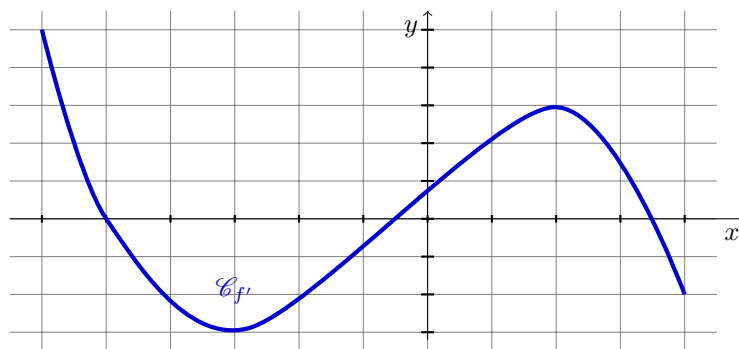
Études graphiques

Calcul 10.9



On considère f une fonction définie et dérivable sur $[-6, 4]$; on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

On donne ci-dessous la représentation graphique de sa dérivée f' .



a) f est convexe sur

b) f est concave sur

c) Déterminer l'abscisse des deux points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$

d) On note T_0 la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0. Quelle est la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T_0 ?

- (a) au-dessus de T_0 sur $[-6, 0]$
- (b) au-dessous de T_0 sur $[-2, 2]$
- (c) au-dessus de T_0 sur $[-2, 2]$
- (d) au-dessous de T_0 sur $[0, 2]$

.....

e) On note A et B les points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectives -1 et 1 .

Quelle est la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à la sécante (AB) ?

- (a) au-dessus de (AB) sur $[-3, 2]$
- (b) au-dessous de (AB) sur $[-1, 1]$
- (c) au-dessous de (AB) sur $[-3, 2]$
- (d) au-dessus de (AB) sur $[-1, 1]$

.....

Calcul 10.10



On considère une fonction f , définie et dérivable sur $[-5, 5]$.

On donne le tableau de variations de sa dérivée f' .

x	-5	-2	2	5
variations de f'	3	-2	2	0

La courbe représentative de f , notée $\mathcal{C}_f$, a deux points d'inflexion A et B.

On note x_A et x_B les abscisses respectives des points A et B. On convient que $x_A < x_B$.

a) f est convexe sur

b) f est concave sur

c) Déterminer x_A et x_B

On note T_A et T_B les tangentes à $\mathcal{C}_f$ respectivement aux points A et B.

d) Quelle est la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T_A ?

- (a) au-dessous de T_A sur $[-5, -2]$
- (b) au-dessus de T_A sur $[-2, 2]$
- (c) ni l'un ni l'autre
- (d) les deux à la fois

.....

e) Quelle est la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T_B ?

- (a) au-dessous de T_B sur $[-2, 2]$
- (b) au-dessus de T_B sur $[2, 5]$
- (c) ni l'un ni l'autre
- (d) les deux à la fois

.....

f) $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de (AB) pour x dans

Calculs plus avancés

Calcul 10.11 — Une étude théorique.



Soit f une fonction deux fois dérivable et convexe sur I . On pose

$$g : \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto e^{f(x)}. \end{cases}$$

a) Calculer $g'(x)$ en fonction de $f(x)$ et $f'(x)$.

.....

b) Calculer $g''(x)$ en fonction de $f(x)$, $f'(x)$ et $f''(x)$.

.....

c) Sur quel intervalle la fonction g est-elle convexe ?

(a) jamais

(c) I

(b) une partie de I

(d) on ne sait pas

.....

Réponses mélangées

-3 et 2	$[0, +\infty[$	$\left[1, \frac{7}{2}\right]$	$f'(x)e^{f(x)}$	$\mathcal{C}_2$	(b)	$[-6, -3]$ et $[2, 4]$	(c)
Croissante sur $] -\infty, -3]$			$e^x + e^{-x}$	$e^x - e^{-x}$	Croissante sur $\mathbb{R}$	(c)	$[-2, 2]$
décroissante sur $[-3, +\infty[$							
$[-2, 2]$	Décroissante sur $] -\infty, \frac{7}{2}]$		(c)	$\mathcal{C}_1$	$[-3, 2]$	$\left[\frac{1}{2}, 1\right]$	$6(1 - 6x^2)e^{-3x^2+2}$
	croissante sur $\left[\frac{7}{2}, +\infty[$						
$\mathcal{C}_1$	(d)	$\mathbb{R}$	(c)	(c)	$\left[\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right]$	$(f''(x) + f'(x)^2)e^{f(x)}$	-2 et 2
Croissante sur $\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	(b)	$] -\infty, -3]$	$[-5, -2]$ et $[2, 5]$	$\mathbb{R}$	$\mathcal{C}_2$	$\left[\frac{7}{2}, +\infty\right]$

► Réponses et corrigés page 175

Primitives I

Calcul 11.1 — Quelques calculs rapides (I).



Déterminer les primitives des expressions suivantes.

a) $3x^2 - 1$

b) $\frac{1}{2}x^3 - 3x^5 + 2$

Calcul 11.2 — Quelques calculs rapides (II).



Déterminer les primitives des expressions suivantes.

a) $\frac{1}{x^3}$

c) $\frac{-2}{x^4}$

b) $\frac{1}{\sqrt{x}} + 4x$

d) $5e^x - 6$

Calcul 11.3 — Primitives de fractions rationnelles .



Déterminer les primitives des expressions suivantes.

a) $\frac{2}{(x-2)^2}$

b) $\frac{6}{(2x-1)^3}$

Calcul 11.4 — Avec des fonctions composées .



Déterminer les primitives des expressions suivantes.

a) xe^{x^2}

c) $(x-1)^2$

b) $\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

d) $(3x-2)^5$

Réponses mélangées

$$\begin{array}{cccc}
 5e^x - 6x + C & \frac{-1}{2x^2} + C & \frac{1}{18}(3x-2)^6 + C & \frac{-3}{2(2x-1)^2} + C \\
 \frac{1}{3}(x-1)^3 + C & x^3 - x + C & \sqrt{2x+1} + C & \frac{2}{3x^3} + C \\
 \frac{-2}{x-2} + C & \frac{1}{2}e^{x^2} + C & \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^6 + 2x + C & 2\sqrt{x} + 2x^2 + C
 \end{array}$$

► Réponses et corrigés page 178

Probabilités - Révisions

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 12.1



Calculer :

a) $0,3 \times 0,04 \dots\dots\dots$ b) $1 - (0,07 + 0,2) \dots\dots\dots$ c) $\frac{21}{40} \times \frac{35}{9} \dots\dots\dots$

Calcul 12.2



Calculer :

a) $0,3 \times 0,6 + 0,7 \times 0,1 \dots\dots\dots$ b) $-2 \times \frac{1}{6} + 1,5 \times \frac{1}{3} + 10 \times \frac{1}{2} \dots\dots\dots$

Calcul 12.3

Soient p et a des nombres réels. Simplifier les expressions :

a) $p \times 0,05 + (1 - p) \times 0,6 \dots\dots\dots$ b) $-a(1 - a) + (1 - a^2) \dots\dots\dots$

Calculs de probabilités

Calcul 12.4 — Avec un tableau de probabilités.



On donne le tableau de probabilités suivant :

	A	$\bar{A}$
B	0,45	0,15
$\bar{B}$	0,07	0,33

Calculer les probabilités suivantes. On donnera les résultats sous forme décimale.

a) $P(\bar{A}) \dots\dots\dots$ d) $P(A \cup B) \dots\dots\dots$
 b) $P(B) \dots\dots\dots$ e) $P(\bar{A} \cap \bar{B}) \dots\dots\dots$
 c) $P(A \cap B) \dots\dots\dots$ f) $P(\bar{A} \cap B) \dots\dots\dots$

Calcul 12.5 — Avec un tableau d'effectifs.



On donne le tableau d'effectifs suivant :

	A	$\bar{A}$	Total
B	125	225	350
$\bar{B}$	100	50	150
Total	225	275	500

Calculer les probabilités suivantes. On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

- a) $P(\bar{A})$ c) $P(A \cap B)$ e) $P(\bar{A} \cap \bar{B})$
- b) $P(B)$ d) $P(A \cup B)$ f) $P(\bar{A} \cap B)$

Calcul 12.6



On considère deux événements A et B tels que $P(\bar{A}) = 0,3$ et $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,15$.

Calculer :

- a) $P(A \cup B)$ b) $P(A)$

Avec des probabilités conditionnelles

Calcul 12.7 — Avec un tableau dans un cas concret.



On a interrogé 500 personnes sur leurs loisirs. Les choix proposés étaient le ski et la randonnée. Parmi les personnes interrogées, 125 personnes font du ski, un cinquième des skieurs font aussi de la randonnée et 300 personnes ne font ni ski ni randonnée.

On note R : « la personne fait de la randonnée » et S : « la personne fait du ski ».

Calculer les probabilités suivantes. On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

- a) $P(\bar{R})$
- b) La probabilité que la personne fasse du ski et de la randonnée.
- c) $P(S \cup R)$ e) $P(\bar{S} \cap \bar{R})$
- d) $P(S)$ f) $P_R(S)$

Calcul 12.8



Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On donne le tableau d'effectifs suivant :

	A	$\bar{A}$
B	n^2	$2n + 2n^2$
$\bar{B}$	n	$n + n^2$

Calculer les probabilités suivantes.

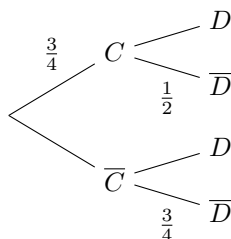
On s'efforcera de simplifier le plus possible les résultats.

- a) $P(\bar{A})$ c) $P_A(B)$
- b) $P(A \cup B)$ d) $P_B(A)$

Calcul 12.9 — Avec un arbre.



On donne l'arbre pondéré :



Calculer :

- a) $P(\bar{C})$ c) $P_C(D)$ e) $P(\bar{D})$
- b) $P(C \cap \bar{D})$ d) $P(D)$ f) $P_D(C)$

Calcul 12.10 — Avec des probabilités conditionnelles (I).



On donne $P(A) = 0,45$ et $P_A(B) = 0,6$.

Calculer :

- a) $P(\bar{A})$ b) $P(A \cap B)$

Calcul 12.11 — Avec des probabilités conditionnelles (II).



On donne $P(A) = 0,05$ ainsi que $P(B) = 0,1$ et $P_A(B) = 0,8$.

Calculer :

- a) $P_B(A)$ b) $P(A \cap B)$ c) $P(A \cup B)$

Calcul 12.12 — Avec un arbre dans un cas concret.



On a interrogé un grand nombre de personnes sur leurs habitudes musicales. 30 % de la population interrogée est composée de mineurs. 20 % des mineurs écoutent de la musique sur support physique alors que 55 % des majeurs écoutent de la musique en streaming.

On note J : « la personne interrogée est mineure » et S : « la personne écoute de la musique en streaming ». On interroge une personne au hasard.

Calculer les probabilités suivantes.

On donnera les réponses sous forme de fraction irréductible.

- a) La probabilité que la personne soit majeure
- b) $P_J(S)$ c) $P(J \cap S)$
- d) La probabilité que la personne interrogée écoute de la musique en streaming
- e) $P_S(J)$

Calcul 12.13



On considère A et B deux événements indépendants tels que $P(A) = 0,8$ et $P(B) = 0,2$.

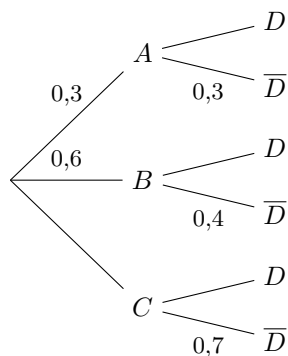
Calculer :

- a) $P(A \cap B)$ b) $P_A(B)$ c) $P(A \cup B)$

Calcul 12.14



On considère l'arbre pondéré suivant.



Calculer les probabilités suivantes.

On donnera les résultats sous forme décimale.

- a) $P(C)$ c) $P(D)$
- b) $P_A(D)$ d) $P_D(A)$

Calcul 12.15



On considère A et B deux événements indépendants tels que $P(A) = 0,75$ et $P(A \cap B) = 0,36$.

Calculer :

a) $P(B)$

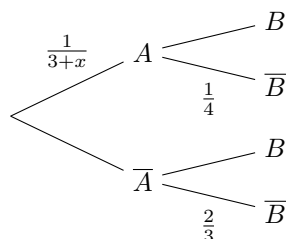
c) $P(A \cap \bar{B})$

b) $P(A \cup B)$

Calcul 12.16



Soit $x > 0$. On considère l'arbre pondéré :



Calculer :

a) $P(\bar{A})$

c) $P(B)$

b) $P(A \cap B)$

d) $P_B(A)$

Variables aléatoires

Calcul 12.17 — Une loi de probabilité incomplète.



On donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire X :

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	0,1	0,15	0,2	0,01		0,39

Calculer :

a) $P(X = 5)$

b) $P(X \leq 4)$

Calcul 12.18

On donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire X :

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	1/10	2/10	3/10	4/10

Calculer :

a) $E(X)$

b) $V(X)$

Calcul 12.19

On donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire X :

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X \leq x_i)$	5/28	1/4	1/2	17/28	23/28	1

Calculer, sous forme de fraction irréductible :

a) $P(X = 3)$

b) $P(X = 4)$

Exercices bilan**Calcul 12.20**

Soit X une variable aléatoire qui prend les valeurs $-\frac{3}{2}$, 0, 2 et 3. On suppose que

$$P\left(X = -\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{10}, \quad P(X = 0) = \frac{1}{5} \quad \text{et} \quad P(X = 2) = \frac{1}{5}.$$

Déterminer :

a) $P(X = 3)$

b) $P(X \leq 1)$

c) $P(X \geq 3)$

d) $P(X < 0)$

Calcul 12.21 — Une question de cours.

Une professeure pose une question à un élève et elle lui demande de choisir la réponse parmi trois réponses possibles, une seule étant juste. L'élève ne connaît que 60 % de son cours.

- Si la question est dans la partie du cours qu'il connaît, il répond juste.
- Sinon, il choisit aléatoirement la réponse parmi les 3 proposées.

On définit les événements :

C : « La question fait partie du cours que l'élève connaît »

J : « L'élève répond juste à la question ».

a) En utilisant l'énoncé, déterminer (sans justification) $P_C(J)$

b) En utilisant l'énoncé, déterminer (sans justification) $P_{\overline{C}}(J)$

c) Exprimer $P(J)$ en fonction de $P_C(J)$ et $P_{\overline{C}}(J)$

d) Calculer $P(J)$

Calcul 12.22 — Une urne et des boules.

Une urne contient trois boules dont deux sont rouges et une est noire.

On tire, sans remise, deux boules de l'urne. On définit les événements :

R_1 : « La première boule tirée est rouge »

R_2 : « La seconde boule tirée est rouge ».

a) En utilisant l'énoncé, déterminer (sans justification) $P(R_1)$

b) En utilisant l'énoncé, déterminer (sans justification) $P_{R_1}(R_2)$

c) En utilisant l'énoncé, déterminer (sans justification) $P_{\overline{R_1}}(R_2)$

d) Exprimer $P(R_2)$ en fonction de $P_{R_1}(R_2)$ et $P_{\overline{R_1}}(R_2)$

e) Calculer $P(R_2)$

Calcul 12.23 — Trois urnes.

Une élève se trouve face à trois urnes numérotées de 1 à 3.

- L'urne 1 contient une unique boule numérotée 1.
- L'urne 2 contient deux boules numérotées 1 et 2.
- L'urne 3 contient trois boules numérotées 1, 2 et 3.

L'élève choisit aléatoirement, avec la même probabilité, une des trois urnes, puis tire une boule de l'urne. On note X le numéro de la boule tirée.

Déterminer :

- a) $P(X = 3)$ c) $P(X = 1)$ e) $V(X)$
- b) $P(X = 2)$ d) $E(X)$

Réponses mélangées

$\frac{3}{5}$	0,33	0,39	$\frac{7}{10}$	$\frac{1}{4}$	0,7	$\frac{1}{10}$	0,2	0,1	0,04	$\frac{1}{3}$	$\frac{17}{36}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{3}{4}$	0,35	$\frac{9}{10}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0,67	0,4	$P_{R_1}(R_2)P(R_1)$ $+ P_{\overline{R_1}}(R_2)P(\overline{R_1})$		
0,012	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{3}$	$P_C(J)P(C)$ $+ P_{\overline{C}}(J)P(\overline{C})$			0,15	0,6	$\frac{31}{6}$	0,87
0,73	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{17+4x}$	$\frac{3}{4(3+x)}$	0,27	$\frac{4}{5}$			0,7	0,84	$\frac{2+x}{3+x}$	
$\frac{11}{20}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{17+4x}{12(3+x)}$	0,25	$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{5}$	0,85	0,15	
$0,6 - 0,55p$		0,48	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{6}{25}$	$1 - a$	$\frac{9}{20}$	$\frac{11}{18}$	0,55	0,45	
$\frac{n}{3n+2}$	0,16	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{49}{24}$	2	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{11}{15}$	$\frac{n}{n+1}$	$\frac{7}{10}$	
$\frac{5}{8}$	$\frac{48}{125}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{10}$	0,48	0,11	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{18}$	0,46	0,6

► Réponses et corrigés page 179

Autour de la loi binomiale

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 13.1 — Développement d'expressions polynomiales.



Soit $x \in \mathbb{R}$. Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes.

a) $(x^2 + 3x + 1)(2x^2 - x - 2)$

b) $(x^3 - x^2 + 4)(x^2 - x + 1)$

c) $(2x + 1)^2(x^2 + 3x - 2)$

d) $(x + 1)(x + 2)(x^2 - 3x + 1)$

Calcul 13.2 — Factorisation d'expressions polynomiales.



Soit $x \in \mathbb{R}$. Factoriser les expressions suivantes.

a) $4x^2 - 9$

c) $x^2 - 3x + 2$

b) $9x^2 + 6x + 1$

d) $(x^2 + 3x)(x - 2) + x(x + 3)$

Premiers calculs

Calcul 13.3 — Définition de la loi binomiale.



Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $p \in [0, 1]$. Soit X une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ et soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Quelle est l'expression correcte pour $P(X = k)$?

Ⓐ $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{k-n}$

Ⓑ $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Ⓒ $\binom{n}{k} (1-p)^k p^{k-n}$

Ⓓ $\binom{n}{k} (1-p)^k p^{n-k}$

.....

Calcul 13.4 — Valeurs particulières.



Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $p \in [0, 1]$. Soit X une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Calculer les probabilités suivantes.

a) $P(X = 0)$

d) $P(X = n - 1)$

b) $P(X = n)$

e) $P(X = 2)$

c) $P(X = 1)$

f) $P(X = n - 2)$

Calcul 13.5 — Cas $p = \frac{1}{2}$.



Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit X une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$.

Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Calculer les expressions suivantes.

a) $P(X = k)$

b) $P(X = 0) - P(X = n)$

c) $P(X = k) - P(X = n - k)$

d) $P(X \leq 1)$

Calcul 13.6 — Cas $p = \frac{1}{4}$.



Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit X une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{4}\right)$.

Pour chacune des questions suivantes, choisir la bonne réponse parmi les propositions.

a) Que vaut $P(X = 0)$?

(a) 0

(b) $\frac{1}{4^n}$

(c) $\frac{3}{4^n}$

(d) $\frac{3^n}{4^n}$

.....

b) Que vaut $P(X = n)$?

(a) 0

(b) $\frac{1}{4^n}$

(c) $\frac{3}{4^n}$

(d) $\frac{3^n}{4^n}$

.....

c) Que vaut $P(X = 1)$?

(a) $\frac{n}{4^n}$

(b) $\frac{3n}{4^n}$

(c) $\frac{3^{n-1}}{4^n}$

(d) $\frac{3^{n-1}n}{4^n}$

.....

Reconnaître une loi binomiale

Entraînement 13.7 — Détermination des paramètres d'une loi binomiale.



Dans chacune des situations suivantes, la variable aléatoire X suit une loi binomiale.

Donner le couple (n, p) de ses paramètres.

- a) On lance cinq fois une pièce de monnaie équilibrée et on note X le nombre de « pile » obtenus.

.....

- b) On lance trois dés équilibrés à six faces et on note X le nombre de « 1 » obtenus ...

- c) Une urne contient deux boules bleues, cinq boules vertes et une boule jaune, indiscernables au toucher. On tire successivement, avec remise, six boules de cette urne et on note X le nombre de boules bleues obtenues.

.....

Entraînement 13.8 — Lancer de dés.



Soit un entier $n \geq 2$. On lance successivement n dés équilibrés à six faces. Dans chacun des cas suivants, la variable aléatoire X suit-elle une loi binomiale ?

*Si X ne suit pas une loi binomiale, on écrira « non » dans le cadre-réponse.
Sinon, on donnera le couple (n, p) tel que X suive la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.*

- a) X est le résultat du premier lancer

- b) X est la somme des chiffres affichés par les dés

- c) X est le nombre de « 6 » obtenus

- d) X est le nombre de chiffres pairs obtenus

Entraînement 13.9 — Tirages dans une urne.



Une urne contient trois boules rouges et cinq boules bleues, indiscernables au toucher. Dans chacun des cas suivants, la variable aléatoire X suit-elle une loi binomiale ?

*Si X ne suit pas une loi binomiale, on écrira « non » dans le cadre-réponse.
Sinon, on donnera le couple (n, p) tel que X suive la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.*

- a) On tire successivement 4 boules avec remise et on note X le nombre de boules rouges tirées.

.....

- b) On tire successivement 4 boules sans remise et on note X le nombre de boules rouges tirées.

.....

Mise en œuvre pratique

Calcul 13.10 — Relecture d'un texte.



Un texte comporte 10 erreurs. Lors de sa relecture, un correcteur relève chaque erreur indépendamment avec une probabilité $p = 0,9$. Pour tout $k \in \llbracket 1, 10 \rrbracket$, on note $X_k = 1$ si la k -ième erreur a été corrigée après relecture, $X_k = 0$ sinon.

On note enfin $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{10}$ le nombre d'erreurs corrigées après la relecture.

- a) Donner la loi de X_1 b) Donner la loi de X

Calculer les probabilités suivantes.

- c) $P(X = 0)$ f) $P(X = 9)$
 d) $P(X = 1)$ g) $P(X = 10)$
 e) $P(X = 2)$ h) Calculer $E(X)$

On suppose maintenant que le texte est soumis à deux relectures indépendantes.

- i) Calculer $P(X_1 = 0)$ dans ce cas
 j) Donner la loi de X dans ce cas
 k) Calculer alors $E(X)$

Calcul 13.11 — Tirages dans une urne.



Une urne contient trois boules rouges et cinq boules bleues, indiscernables au toucher. On tire successivement, avec remise, 10 boules de cette urne. On note X le nombre de boules rouges tirées.

- a) Calculer $P(X = 0)$
 b) En déduire une expression de $P(X \geq 1)$
 c) De même, donner une expression de $P(X \geq 2)$
 d) Donner une expression de la probabilité conditionnelle $P_{(X \geq 1)}(X \geq 2)$

Calculs plus avancés

Calcul 13.12 — Réponses au hasard dans un QCM.



Dans une interrogation de mathématiques, un questionnaire à choix multiples comporte n questions.

Pour chaque question, quatre réponses sont possibles et une seule d'entre elles est correcte. Une bonne réponse rapporte 3 points, une mauvaise réponse retire 1 point, l'absence de réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

a) Un élève A n'a pas révisé avant l'interrogation et ne connaît pas du tout son cours. Il décide de répondre à toutes les questions, en choisissant au hasard la réponse.

On note X le nombre de bonnes réponses qu'il obtient. Quelle est l'espérance de X ?

b) On note N la note finale de l'élève A. Quelle est l'espérance de N ?

Réponses mélangées

$$\begin{array}{cccccccc}
 (0,1)^{10} & \text{non} & 0 & \left(4, \frac{3}{8}\right) & x^4 - 6x^2 - 3x + 2 & (0,9)^{10} & \frac{n+1}{2^n} & (0,9)^9 \\
 4x^4 + 16x^3 + 5x^2 & & \binom{n}{k} \frac{1}{2^n} & & x^5 - 2x^4 + 2x^3 & \textcircled{b} & \left(\frac{5}{8}\right)^{10} & \mathcal{B}(10; 0,9) \\
 -5x - 2 & & & & + 3x^2 - 4x + 4 & & & \\
 (3x+1)^2 & & 1 - 7 \times \left(\frac{5}{8}\right)^{10} & & 1 - \left(\frac{5}{8}\right)^{10} & \frac{n}{4} & \left(3, \frac{1}{6}\right) & \frac{1 - 7 \times \left(\frac{5}{8}\right)^{10}}{1 - \left(\frac{5}{8}\right)^{10}} \\
 \left(6, \frac{1}{4}\right) & & x(x+3)(x-1) & & (x-1)(x-2) & \mathcal{B}(10; 0,99) & 0,01 & np^{n-1}(1-p) \\
 45 \times (0,9)^2 \times (0,1)^8 & & \left(n, \frac{1}{6}\right) & & \text{non} & \left(n, \frac{1}{2}\right) & (1-p)^n & 0 \\
 \textcircled{b} & 9,9 & 9 & (2x-3)(2x+3) & \textcircled{d} & \frac{n(n-1)}{2} p^2 (1-p)^{n-2} & \frac{n(n-1)}{2} p^{n-2} (1-p)^2 & 9 \times (0,1)^9 \\
 \left(5, \frac{1}{2}\right) & & \text{non} & 2x^4 + 5x^3 - 3x^2 & & \mathcal{B}(0,9) & p^n & 0 \\
 & & & -7x - 2 & & & & np(1-p)^{n-1}
 \end{array}$$

► Réponses et corrigés page 184

Limites de fonctions et continuité

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 14.1



Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Simplifier les expressions suivantes.

a) $\frac{x^3 + x^2}{x}$

c) $\frac{x^3 + x^2 + x^4}{x^2}$

b) $x^3 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} \right)$

Calcul 14.2



Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier les expressions suivantes.

a) $e^{2x} \times e^{-x}$

c) $\frac{e^{2x+1}}{e^{-x}}$

b) $\frac{e^{3x}}{e^x}$

d) $e^{x^2+x+1} \times e^{-x^2+3x}$

Fractions, polynômes et racines

Calcul 14.3



Déterminer les limites suivantes.

On mettra en facteur des termes dominants pour lever l'indétermination.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2}{x^2 + x}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 1}{x^2 - x}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 3}{x^2 + x + 1}$

Calcul 14.4



Même exercice.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x + 2}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^4 + 3x^3}}{-2x^2 + 7}$

Calcul 14.5



Déterminer les limites suivantes.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) \dots\dots\dots & \boxed{} \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}} \dots\dots\dots & \boxed{} \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} ((x+2)^2 - x^2) \dots\dots\dots & \boxed{} \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(x + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 - x(x+1) \right) & \boxed{} \end{array}$$

Calcul 14.6



Chercher des facteurs communs afin de simplifier la fraction, pour lever l'indétermination, puis donner la limite des expressions suivantes.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \dots\dots\dots & \boxed{} \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2}{x^2 - 4} \dots\dots\dots & \boxed{} \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1} \dots\dots\dots & \boxed{} \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x - 1}{4x^2 - 1} \dots\dots\dots & \boxed{} \end{array}$$

Calcul 14.7



Même exercice.

On cherchera au préalable à factoriser les polynômes au numérateur et au dénominateur.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} \dots\dots\dots & \boxed{} \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 2x} \dots\dots\dots & \boxed{} \end{array}$$

Autour du taux d'accroissement

Calcul 14.8 — Limites de taux d'accroissement.



Rappelons que si une fonction f est dérivable en a , alors on a $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$.

Par exemple, pour déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$, on introduit $f : x \mapsto e^x$, et on reconnaît $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$. D'où

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = f'(0) = e^0 = 1.$$

En reconnaissant des taux d'accroissement, déterminer les limites suivantes.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} \dots\dots\dots & \boxed{} \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \dots\dots\dots & \boxed{} \end{array}$$

Continuité

Calcul 14.9 — Continuité sur $\mathbb{R}$.



Rappelons que si une fonction f est continue en a si et seulement si elle admet une limite en a et on a $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

a) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 2 \\ -x + 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

b) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x \leq 4 \\ x^2 - 5 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

Est-elle continue?

Est-elle continue?

Calcul 14.10 — Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires.



On considère une fonction f , définie et dérivable sur $[-5, 5]$.

On donne le tableau de variations de f .

x	-5	-2	2	5
variations de f'	3		2	
		-2		0

L'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution sur l'intervalle $[2, 5]$.

Compléter les phrases suivantes afin de le justifier :

Sur $[2, 5]$,

a) f est

b) D'après le tableau de variation, f est

c) De plus la valeur 1 appartient à

Réponses mélangées

2	3	dérivable donc continue.	$-\infty$	Non	1	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$-\infty$	0	$-\infty$	e^x	strictement décroissante sur $[2, 5]$.	$x^2 + 1$		
$+\infty$	$\frac{1}{2}$	$x^2 + x$	$x + 1 + x^2$	1	e^{2x}	0	Oui
							$-\frac{1}{4}$
		l'intervalle $[f(5), f(2)]$	$+\infty$	e^{4x+1}	$\frac{5}{2}$	e^{3x+1}	-2
							0

► Réponses et corrigés page 188

Droites dans l'espace

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 15.1 — Des sommes de puissances.



Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes.

a) $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n$.

c) $1 + 2^2 + 2^4 + 2^6 \dots + 2^{2n}$..

b) $3 + 3^2 + \dots + 3^n$

d) $1 + e + e^2 + \dots + e^n$

Calcul 15.2



Résoudre les inéquations suivantes.

On attend la solution sous la forme d'un intervalle ou d'une réunion d'intervalles.

a) $|x - 3| \leq 4$

c) $|-x + 3| \leq 7$

b) $|2x + 1| \geq 5$

Remarque

Dans toute la fiche, on travaille dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Vecteurs dans l'espace

Calcul 15.3 — Sont-ils colinéaires ?



Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ suivants sont-ils colinéaires, « oui » ou « non » ?

a) $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

d) $\vec{u} \begin{pmatrix} e \\ 1 \\ e^2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$

e) $\vec{u} \begin{pmatrix} e^2 \\ 1 \\ e^{-1} \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} e^3 \\ e \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + \sqrt{3} \\ 1 - \sqrt{3} \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} \sqrt{3} - 1 \\ 2 \\ 2\sqrt{3} - 4 \end{pmatrix}$

Calcul 15.4 — Coplanarité (I).



Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ suivants sont-ils coplanaires, « oui » ou « non » ?

a) $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Calcul 15.5 — Coplanarité (II).



Dans chacun des cas suivants, les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}$ sont-ils coplanaires, « oui » ou « non » ?

a) $\vec{w} \begin{pmatrix} 18 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ b) $\vec{w} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Calcul 15.6 — Coplanarité à paramètre.



Déterminer la valeur de m pour que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ suivants soient coplanaires.

a) $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ m \end{pmatrix}$

b) $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Calcul 15.7



a) Les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont-ils coplanaires ?

b) Déterminer un triplet (a, b, c) tel que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$

Points dans l'espace

Calcul 15.8 — Une question d'alignement (I).



On considère les points A(1, -2, 1), B(3, -1, 2), C(a, b, 0), E(0, 4, 3), et F(-4, x, 1).

a) Déterminer (a, b) pour que les points A, B, C soient alignés

b) Déterminer x pour que (AB) et (EF) soient parallèles

Calcul 15.9 — Une question d'alignement (II).

On considère les points $A(-2, 1, 1)$, $B(1, 3, 2)$, $C(a, 5, 2)$ et $D(-5, 0, b)$.

a) Peut-on déterminer a pour que A, B, C soient alignés ?

Si oui, préciser la valeur de a

b) Peut-on déterminer b pour que A, B, D soient alignés ?

Si oui, préciser la valeur de b

c) Peut-on déterminer (a, b) pour que B, C, D soient alignés ?

Si oui, préciser la valeur de (a, b)

Calcul 15.10 — Coplanarité de points (I).

Dans chacun des cas suivants, les points A, B, C, D sont-ils coplanaires, « oui » ou « non » ?

a) $A(2, -1, 3)$, $B(2, 1, 1)$, $C(5, 0, 3)$ et $D(8, 1, 4)$

b) $A(2, 2, 0)$, $B(1, 1, -1)$, $C(0, 6, 2)$ et $D(1, 1, -1)$

c) $A(1, -7, 1)$, $B(5, 2, -2)$, $C(7, 3, 0)$ et $D(1, 2, -8)$

Calcul 15.11 — Coplanarité de points (II).

Soient $A(2, 1, 3)$, $B(4, 2, 2)$, $C(-2, -2, 2)$ et $D(a, 2, 3)$. On suppose que A, B, C, D sont coplanaires.

Déterminer la valeur de a

Droites dans l'espace

Calcul 15.12 — Une mise en jambes.

On considère la droite (d) passant par $A(1, 2, 3)$ et dirigée par le vecteur $\vec{k} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Donner la représentation paramétrique de (d)

Dire (« oui » ou « non ») si les points suivants appartiennent à (d) .

b) $C(1, 2, 4)$

c) $E(1, 0, 3)$

Déterminer les valeurs du réel x pour que les points suivants appartiennent à (d) .

d) $D(1, 2, x)$

e) $F(x, 2, 3)$

Calcul 15.13 — Une deuxième mise en jambes.



Soit $A(1, 6, -3)$. On considère la droite (d) passant par A et dirigée par le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer, dans chacun des cas suivants et quand cela est possible, les valeurs des réels x et y pour que le point considéré appartienne à la droite (d) .

a) $B(1, 6, x)$

b) $C(2, 4, x)$

c) $D(1, 5, x)$

d) $E(x, x^2, y)$

Calcul 15.14 — Intersections.



Soit $A(1, 6, -3)$. On considère la droite (d) passant par A et dirigée par le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dans chacun des cas suivants, déterminer les points d'intersection de (d) avec les droites suivantes, définies par un point et un vecteur directeur.

a) $B(2, 6, -2)$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $C(11, 10, 7)$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $D(8, 13, 4)$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

d) $E(5, 2, -3)$ et $\vec{a} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

Calculs plus avancés

Calcul 15.15



On considère la droite (d) définie par le point $A(1, -2, -3)$ et le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer les valeurs du paramètre m pour que l'intersection de (d) et de la droite (d') définie par le point $B(6, -5, m)$ et le vecteur $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ne soit pas vide, et préciser alors les coordonnées du ou des

point(s) d'intersection

b) Déterminer les valeurs du paramètre m pour que l'intersection de (d) et de la droite (d') définie par $B \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ et le vecteur $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ m \end{pmatrix}$ ne soit pas vide

Réponses mélangées

$\frac{7}{2}$	oui	$m = \frac{3}{8}$	$\frac{4^{n+1} - 1}{3}$	non	-2	$(5, 2)$	non	non	$x = 2$
$3 \times \frac{3^n - 1}{2}$		$[-4, 10]$	non	$m = 4, M(4, 1, 0)$	3	non	$(2, -2)$ et $(-4, -8)$		
non	oui	$(-1, -3)$	$\emptyset$	$(0, -1, 1)$	$x \in \mathbb{R}$	1	$\emptyset$	oui	non
oui	7	oui	non	non	oui	-3	$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \vec{k} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\emptyset$	$[-1, 7]$
$] -\infty, -3] \cup [2, +\infty[$	oui	$\frac{e^{n+1} - 1}{e - 1}$	$M(-1, 10, -5)$	impossible	$2^{n+1} - 1$	oui			

► Réponses et corrigés page 192

Propriétés algébriques du logarithme I

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 16.1 — Quelques simplifications.



Écrire sous forme d'une fraction irréductible les nombres suivants.

a) $\frac{36}{45} \dots\dots$ b) $\frac{2}{7} \times \frac{28}{16} \cdot$ c) $\frac{\frac{9}{25}}{\frac{3}{10}} \dots\dots$ d) $\frac{10^3 \times 3^5}{6^4 \times 5^2}$

Calcul 16.2 — Quelques équations.



Résoudre les équations suivantes en donnant la valeur de leur solution.

a) $2x + 4 = 5x - 3 \dots\dots\dots$ c) $\frac{4}{3}x - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}x + \frac{1}{2} \dots\dots\dots$
 b) $x + \frac{1}{2} = 6x - 5 \dots\dots\dots$ d) $\frac{5}{3}x = \frac{3}{4}x + \frac{2}{5} \dots\dots\dots$

Propriétés du logarithme

Calcul 16.3



Simplifier les expressions suivantes.

a) $\ln(3) + \ln\left(\frac{1}{3}\right)$ b) $\ln(10) - \ln(2)$ c) $2\ln(\sqrt{7}) \dots\dots$

Calcul 16.4



Exprimer les quantités suivantes à l'aide de $\ln(2)$ et $\ln(3)$.

a) $\ln(32) \dots\dots\dots$ d) $3\ln(6) - 2\ln(4) - \ln(9) \dots\dots\dots$
 b) $\ln\left(\frac{1}{81}\right) \dots\dots\dots$ e) $\ln(\sqrt{27}) \dots\dots\dots$
 c) $\ln(12) \dots\dots\dots$ f) $\ln(\sqrt{6}) \dots\dots\dots$

Calcul 16.5 — Autour de la constante « e » d'Euler.



Simplifier les expressions suivantes.

a) $\ln(e^2)$		c) $\ln(\sqrt{e})$	
b) $\ln\left(\frac{1}{e^{11}}\right)$		d) $\ln(\sqrt{e^7})$	

Calcul 16.6 — Logarithme et fonction exponentielle.



Simplifier les expressions suivantes.

a) $e^{\ln(7)-\ln(5)}$		b) $e^{3\ln(10)}$		c) $e^{-\ln(\ln(3))}$	
-----------------------------	----------------------	-------------------------	----------------------	----------------------------	----------------------

Calcul 16.7 — Simplifications remarquables.



Simplifier les expressions suivantes.

a) $\ln(\sqrt{3}-1) + \ln(\sqrt{3}+1)$	
b) $\ln\left(\frac{1}{e^{-\ln(e^2)}}\right)$	
c) $\ln((\sqrt{2}-1)^{15}) + \ln((\sqrt{2}+1)^{15})$	
d) $\ln(140) + \ln\left(\frac{6}{7}\right) - \ln(24)$	

Équations et inéquations

Calcul 16.8 — Bien défini ?



Indiquer pour quelles valeurs du nombre réel x les quantités suivantes sont bien définies.

a) $\ln(1+x)$		b) $\ln(x^2-3x)$..		c) $\ln(\ln(x))$	
---------------------	----------------------	---------------------	----------------------	-----------------------	----------------------

Calcul 16.9



Quel est le signe de chacune des quantités suivantes ?

a) $\ln(2)$		c) $\ln(0,8)$		e) $\ln(0,8^2)$	
b) $\ln\left(\frac{1}{4}\right)$		d) $(\ln(0,8))^2$		f) $\ln(3)-1$	

Calcul 16.10 — Bien défini ?a) Pour quelles valeurs du réel x la quantité $\ln(1 - \ln(x))$ est-elle bien définie ?b) Soit $x \in]0, 1[$. Quel est le signe de $\ln(1 - \ln(x))$?**Remarque**Pour les inéquations suivantes, on donnera les solutions sous la forme « $x \leq a$ », « $a < x < b$ », etc.**Calcul 16.11 — Des inéquations (I).**

Résoudre les inéquations suivantes.

a) $\ln(5 + 2x) \geq 0$ c) $\ln(x^2) \geq 0$ b) $\ln(x - 1) < 1$ d) $0 \leq \ln(2x + 5) \leq 2$ **Calcul 16.12 — Des inéquations (II).**

Résoudre les inéquations suivantes.

a) $\ln(x + 3) > \ln(2x - 1)$ c) $\ln(x) + \ln(x - 1) \leq \ln(2)$ b) $\ln(x) + \ln(x + 2) \leq \ln(3)$ d) $\ln(x^2) \leq 1$ **Calcul 16.13 — Des équations.**

Résoudre les équations suivantes.

a) $\ln\left(\frac{x+1}{3x-5}\right) = 0$ b) $\ln(x)^2 - 3\ln(x) + 2 = 0$ **Calcul 16.14 — Des inéquations (III).**

Résoudre les inéquations suivantes.

a) $\ln(x)^2 \leq 1$ b) $\ln(x^2 + 3) \geq 1$ **Calcul 16.15 — Une dernière inéquation.**Résoudre l'inéquation $\ln\left(\frac{x^2 + 3x}{4}\right) \leq 0$ *On donnera la solution sous la forme d'une union d'intervalles.*

Calculs plus avancés

Calcul 16.16 — Une somme de logarithmes.



a) Soit $k \geq 1$. Écrire $1 - \frac{1}{k}$ comme une fraction

b) Soit $k \geq 2$. Écrire $\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)$ comme une somme ou une différence de logarithmes.

.....

c) Soit $n \geq 2$. Calculer $\ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \dots + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$

Calcul 16.17



Soit $x \in \mathbb{R}$. On admet que $x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$ et on note $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

Simplifier l'expression $e^{f(x)} - e^{-f(x)}$

Réponses mélangées

< 0	$\frac{11}{10}$	$\ln(k-1) - \ln(k)$	$x = \frac{24}{55}$	-11	$\frac{k-1}{k}$	> 0	< 0	$\frac{1}{\ln(3)}$
$0 < x \leq 1$	0	$x = e$ ou $x = e^2$	2	$\frac{6}{7}$	$\frac{1}{2}$	$1 < x < 1 + e$	$x = 3$	
$[-4, -3[\cup]0, 1]$	$\ln(2)$	2	> 0	$x \in [-\sqrt{e}, 0[\cup]0, \sqrt{e}]$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\ln(3) - \ln(2)$	
$\frac{6}{5}$	$x > -1$	$-\ln(n)$	$0 < x < e$	$\frac{1}{e} \leq x \leq e$	> 0	$2\ln(2) + \ln(3)$	$\frac{1}{2} < x < 4$	
$-2 \leq x \leq \frac{e^2 - 5}{2}$	$\ln(5)$	tous les réels	$5\ln(2)$	$2x$	$x < 0$ ou $x > 3$	$\ln(7)$		
< 0	$x > 1$	$\frac{7}{5}$	0	$x \geq -2$	$\frac{3}{2}\ln(3)$	$\ln(5)$	$\frac{15}{2}$	$1 < x \leq 2$
> 0	$x \geq 1$ ou $x \leq -1$	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{3}$	$1\,000$	$\frac{1}{2}\ln(2) + \frac{1}{2}\ln(3)$	$-4\ln(3)$		

► Réponses et corrigés page 195

Propriétés algébriques du logarithme II

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 17.1



Écrire le plus simplement possible les nombres suivants.

a) $\sqrt{45} - \sqrt{20} \dots$ b) $\frac{2}{\sqrt{3}-1} \dots\dots$ c) $2\sqrt{5} + \sqrt{45} \dots$

Calcul 17.2



Calculer les nombres suivants.

a) $\left| \frac{3}{2} \times \frac{8}{9} + \left| \frac{7}{3} - 10 \right| \right| \dots\dots$ b) $\left| \frac{1}{14} - \frac{4}{7} \right| - \left| \frac{6}{7} - \frac{5}{2} \right| \dots\dots$

Propriétés algébriques du logarithme

Calcul 17.3



Exprimer les quantités suivantes en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(5)$.

a) $\ln(8) \dots\dots\dots$ c) $\ln(12) + \ln(9) - \ln(27) \dots\dots\dots$
 b) $\ln(0,01) \dots\dots\dots$ d) $\ln(\sqrt{8}) - \ln(16) + \frac{3}{2}\ln(2) \dots\dots\dots$

Calcul 17.4 — Avec racines et puissances.



Exprimer les quantités suivantes en fonction de $\ln(3)$.

a) $\ln(4 + \sqrt{13}) + \ln(4 - \sqrt{13}) \dots\dots\dots$
 b) $\ln((\sqrt{10} - 1)^5) + \ln((\sqrt{10} + 1)^5) \dots\dots\dots$

Calcul 17.5 — Des encadrements.



On donne $0,69 \leq \ln(2) \leq 0,70$ et $1,60 \leq \ln(5) \leq 1,61$. En déduire des encadrements de :

a) $\ln(0,2) \dots\dots\dots$ b) $\ln(10) \dots\dots\dots$

Calcul 17.6 — D'autres encadrements.



On donne $0,69 \leq \ln(2) \leq 0,70$ et $1,60 \leq \ln(5) \leq 1,61$. En déduire des encadrements de :

a) $\ln\left(\frac{8}{5}\right)$

c) $\ln(25) \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

b) $\ln(5,12)$

d) $\ln(5+\sqrt{5})+\ln(5-\sqrt{5})$

Avec la fonction exponentielle

Calcul 17.7 — Avec le nombre d'Euler e.



Simplifier les expressions suivantes.

a) $\ln(e^5) - \ln(e^2)$

d) $e^{\ln(5)-\ln(3)}$

b) $\ln(\sqrt{e}) - \ln\left(\frac{1}{e}\right)$

e) $e^{\frac{1}{2} \ln(4)}$

c) $2 \ln(e\sqrt{e})$

f) $\ln\left(\frac{e^2}{e+3}\right) + \ln\left(\frac{e+3}{e}\right)$

Calcul 17.8 — Logarithme et exponentielle.



Simplifier les expressions suivantes.

a) $\exp(-\ln(\ln(2)))$

c) $\ln\left(\sqrt{\exp\left(\frac{1}{3} \ln e^{27}\right)}\right)$

b) $\ln(\sqrt{e^6})$

d) $\ln(\sqrt{\sqrt{e}})$

e) $\ln\left(\sqrt{\exp(-\ln(\sqrt{e}))}\right)$

f) $\exp\left(2 \ln\left(\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}\right)\right)$

Calcul 17.9



Soit $x \in \mathbb{R}$. À quelle expression est égal $\ln(e^x + 1)$?

(a) $\ln(x) - 1$

(c) $x + \ln(e^{-x} + 1)$

(b) x

(d) $\ln(1 - e^{-x})$

.....

Équations et inéquations

Calcul 17.10



On considère l'équation $\ln(x-2) + \ln(x-1) = \ln(2)$.

a) Sur quel intervalle cette équation a-t-elle un sens ?

b) Donner la solution dans $\mathbb{R}$ de $\ln(x-2) + \ln(x-1) = \ln(2)$

Calcul 17.11



Donner la solution dans $\mathbb{R}$ des équations suivantes.

a) $\ln(2x-1) = \ln(x+3)$

b) $\ln(e^{2x} + 3) = 7$

Calcul 17.12



On considère l'équation $\ln(x-1) + 2\ln(x+1) - \ln(x^2-1) = 1$.

a) Donner l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles cette équation a un sens

b) Simplifier l'expression $\ln(x-1) + 2\ln(x+1) - \ln(x^2-1)$

c) Donner l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de $\ln(x-1) + 2\ln(x+1) - \ln(x^2-1) = 1$.

.....

Calcul 17.13



Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $\ln(2^x) = \ln(4^{x+1})$

Calcul 17.14



Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $(\ln(x))^2 = \ln(x^2) - 1$

b) $(\ln(x))^2 + \ln\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

c) $(\ln(x-2))^2 = 2$

Calcul 17.15 — Deux inéquations.

Soit un réel $p > 1$. Donner l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ des inéquations suivantes.

a) $\ln(x+1) > p$

b) $\ln(px+1) \leq \ln(x+p)$

Logarithmes dans d'autres bases

Pour tout réel $a > 1$, on définit *le logarithme de base a* par $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$.

Calcul 17.16 — Logarithme décimal.

Simplifier au maximum les nombres suivants.

a) $\log_{10}(100)$

b) $\log_{10}(4) + \log_{10}(250)$

c) $\log_{10}(120) - \log_{10}(12)$

d) $5 \log_{10}(2) - \log_{10}(3200)$

Calcul 17.17 — Logarithme en d'autres bases.

Simplifier au maximum les nombres suivants.

a) $\log_3(3^{17})$

b) $\log_6(4) + \log_6(9)$

c) $\log_5(\sqrt{e}) \times \ln(5)$

d) $(1 + \log_2(0,25)) \times (\log_2(200) - \log_2(25))$

Calculs plus avancés

Calcul 17.18 — Une somme de logarithmes (I).



Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\ln\left(\frac{2}{1}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

Calcul 17.19 — Une somme de logarithmes (II).



Calculer $\sum_{k=1}^n \ln(2^k)$

Réponses mélangées

$$\begin{array}{ccccccc}
 4 & 2,29 \leq \ln(10) \leq 2,31 & -2 & \sqrt{3} + 1 & \frac{-1}{p} < x \leq 1 & 1,61 \leq \ln(5,12) \leq 1,70 & \\
 \ln(x+1) & e & 2,98 \leq \ln(5 + \sqrt{5}) + \ln(5 - \sqrt{5}) \leq 3,01 &]2, +\infty[& 2 & \frac{1}{2} & \\
 \frac{1}{4} & -1,61 \leq \ln(0,2) \leq -1,60 & 3 & \frac{1}{\ln(2)} & \frac{5}{3} & \sqrt{5} & \ln(n+1) & 3 \\
 0,46 \leq \ln\left(\frac{8}{5}\right) \leq 0,50 & -2,254 \leq \ln(25) \ln\left(\frac{1}{2}\right) \leq -2,208 & -2 \ln(2) - 2 \ln(5) & x = 1 \text{ ou } x = e & & & & \\
 2 & e^{\sqrt{2}} + 2 & 3 & -3 &]1, +\infty[& 2 \ln(2) & 1 & 2 & \frac{3}{2} & 4,5 & \frac{-1}{4} \\
 17 & \ln(3) & -2 & 9 & \frac{n(n+1) \ln(2)}{2} & 3 \ln(2) & 10 \ln(3) & -\ln(2) & & & \\
 2 & \frac{-8}{7} & 3 & 3 & 1 & \frac{\ln(e^7 - 3)}{2} & \textcircled{c} & 5\sqrt{5} & x > e^p - 1 & e - 1 &
 \end{array}$$

► Réponses et corrigés page 200

Fonctions logarithmes

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 18.1



Soient x et t des réels. Simplifier les écritures suivantes.

a) $e^{3x+1} \times e^{5x+2}$

c) $\frac{e^{2x+1} \times e^{5-8x}}{e^{2x+3}}$

b) $(e^{2t-4})^5 \times e$

d) $\frac{e^{2x+5t} \times e^{4x-3t}}{e^{2t+6x}}$

Calcul 18.2



Écrire les nombres suivants sous la forme $a \ln(b)$ où a et b sont des entiers et b est le plus petit possible.

a) $3 \ln(2) + \ln(4)$

c) $\ln(7 - 2\sqrt{6}) + \ln(7 + 2\sqrt{6})$

b) $\ln(100) - \ln(28) + \ln(21) - \ln(3)$

d) $4 \ln(9) - 2 \ln(27) + 6 \ln(\sqrt{3})$

Remarque

Dans l'ensemble des calculs de cette fiche, on ne se souciera pas des domaines de définition et de dérivabilité.

Dérivation du logarithme népérien

Calcul 18.3 — Au même dénominateur (I).



Déterminer l'expression de $f'(x)$ sous la forme d'un quotient pour f définie par :

a) $f(x) = 2x + 1 - \ln(x)$

b) $f(x) = 4 \ln(x) - \frac{3}{x+1}$

Calcul 18.4 — Au même dénominateur (II).



Déterminer l'expression de $f'(x)$ sous la forme d'un quotient pour f définie par :

a) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x} - 3x^2$

b) $f(x) = e^x \times \ln(x)$

Calcul 18.5 — Application des formules usuelles.Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

- | | | | |
|------------------------------------|----------------------|--|----------------------|
| a) $f(x) = x \ln(x) - x$ | <input type="text"/> | c) $f(x) = \frac{x^2 - x}{\ln(x)}$ | <input type="text"/> |
| b) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ | <input type="text"/> | d) $f(x) = \sqrt{x} \ln(x)$ | <input type="text"/> |

Calcul 18.6 — Composition et logarithme.Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

- | | | | |
|------------------------------------|----------------------|--------------------------------------|----------------------|
| a) $f(x) = (\ln(x))^3$ | <input type="text"/> | c) $f(x) = \sqrt{\ln(x)}$ | <input type="text"/> |
| b) $f(x) = \frac{1}{\ln(x)}$ | <input type="text"/> | d) $f(x) = \frac{1}{\ln(x)^4}$ | <input type="text"/> |

Fonctions de la forme $\ln(u)$ **Calcul 18.7 — Composition et logarithme (II).**Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

- | | | | |
|-------------------------------------|----------------------|--------------------------------|----------------------|
| a) $f(x) = \ln(x^2 - 4x + 7)$ | <input type="text"/> | c) $f(x) = \ln(1 - x^3)$ | <input type="text"/> |
| b) $f(x) = \ln(1 + e^x)$ | <input type="text"/> | d) $f(x) = \ln(\ln(x))$ | <input type="text"/> |

Calcul 18.8 — Au même dénominateur (III).Déterminer l'expression de $f'(x)$ sous la forme d'un quotient pour f définie par :

- | | |
|--|----------------------|
| a) $f(x) = 4x^2 + 1 - \ln(2x^2 + 3x + 7)$ | <input type="text"/> |
| b) $f(x) = 3x + 1 + \ln(1 + \sqrt{x})$ | <input type="text"/> |
| c) $f(x) = \ln(1 + x) - \ln(2x^2 + x + 1)$ | <input type="text"/> |

Calcul 18.9 — Logarithme d'un quotient.



On considère la fonction $f : \begin{cases}]3, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln\left(\frac{x-3}{x^2-2}\right). \end{cases}$ On admet que la fonction f est dérivable.

a) Soit $x \in]3, +\infty[$. Calculer $f'(x)$

b) Que vaut $f'(4)$?

Calcul 18.10 — Compositions successives.



Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \dots$

c) $f(x) = \ln(1 + e^{x^2+1}) \dots\dots\dots$

b) $f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) \dots\dots\dots$

d) $f(x) = \ln(\ln(\ln(x))) \dots\dots\dots$

Calcul 18.11 — Compositions successives (II).



Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $f(x) = \ln(1 + xe^{x-x^3}) \dots\dots\dots$

b) $f(x) = \ln(1 + \ln(1 + e^{x^2})) \dots\dots\dots$

Autour des limites

Calcul 18.12 — Détection de forme indéterminée.



Pour chaque expression suivante, dire s'il s'agit d'une forme indéterminée, auquel cas on ne cherchera pas à calculer la limite et on écrira « FI » dans le cadre-réponse ; s'il ne s'agit pas d'une forme indéterminée, on donnera la limite en question.

- | | | | |
|-----------------------------------|----------------------|--|----------------------|
| a) $e^x - x$, en $+\infty$ | <input type="text"/> | c) $\frac{\ln(x)}{x}$, en $+\infty$ | <input type="text"/> |
| b) $e^x - x$, en $-\infty$ | <input type="text"/> | d) $\frac{\ln(x)}{x}$, en 0^+ | <input type="text"/> |

Croissances comparées

Calcul 18.13 — En factorisant (I).



Calculer :

- | | | | |
|---|----------------------|--|----------------------|
| a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 e^x$ | <input type="text"/> | c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x-7} + 3e^x}{e^x + x}$ | <input type="text"/> |
| b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - x^8}{x + 1}$ | <input type="text"/> | d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{2x}}{e^x + x}$ | <input type="text"/> |

Calcul 18.14



En posant $X = \frac{1}{x}$, déterminer les limites suivantes.

- | | | | |
|---|----------------------|--|----------------------|
| a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{\frac{1}{x}}$ | <input type="text"/> | b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^3}$ | <input type="text"/> |
|---|----------------------|--|----------------------|

Calcul 18.15 — En factorisant (II).



Calculer les limites suivantes.

- | | |
|--|----------------------|
| a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - \ln(x)$ | <input type="text"/> |
| b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln(x)}{x - \ln(x)}$ | <input type="text"/> |
| c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x) - \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}$ | <input type="text"/> |
| d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x))^2 - 7}{3 + 2 \ln(x)}$ | <input type="text"/> |

Calcul 18.16 — Une limite classique.



Quelle est la limite de $x \mapsto x \ln(x)$ en 0^+ ?

(a) $+\infty$

(b) $-\infty$

(c) 0

(d) 1

.....

Calcul 18.17 — Une puissance de puissance.



Pour $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$, on définit $a^b = e^{b \ln(a)}$.

a) Que vaut x^x pour $x = \frac{1}{2}$?

b) Que vaut x^x pour $x = \frac{1}{4}$?

c) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$

Calcul 18.18



En mettant en facteur l'exponentielle, déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(e^x + 4x) - x)$

Calcul 18.19



a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{\ln(x)} - \ln(x))$

b) En écrivant $x = e^{\ln(x)}$, en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{\ln(x)}}}{x}$

Autour du taux d'accroissement

Calcul 18.20 — Limites de taux d'accroissement.



Rappelons que si une fonction f est dérivable en a , alors on a

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

Par exemple, pour déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$, on introduit $f : x \mapsto e^x$, et on reconnaît $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$. D'où

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = f'(0) = e^0 = 1.$$

En reconnaissant des taux d'accroissement, déterminer les limites suivantes.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x) - \ln(2)}{x - 2}$

Calculs plus avancés

Calcul 18.21 — Détermination d'une équation différentielle.



Soit f une fonction définie, dérivable et strictement positive sur $]0, +\infty[$ telle que, pour tout réel $x > 0$,

$$f'(x) = f(x)(1 - \ln(f(x))).$$

On pose $g = \ln(f)$. Donner une équation reliant g et g'

Calcul 18.22 — Logarithme intégral.



On définit la fonction « li » (appelée *logarithme intégral*) sur $]1, +\infty[$ par $\text{li}(e) = 0$ et $\text{li}'(x) = \frac{1}{\ln(x)}$.

a) Soit $x \in]1, +\infty[$. Calculer $\text{li}''(x)$

b) Soit $f : \begin{cases}]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \text{li}(3x^2 + x + 2). \end{cases}$ Calculer $f'(x)$

c) Soit $g : \begin{cases}]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \text{li}(e^x). \end{cases}$ Calculer $g'(x)$

Réponses mélangées

$-\frac{1}{x \ln(x)^2}$	$\frac{1 - \ln(x) - 6x^3}{x^2}$	$\frac{3 \ln(x)^2}{x}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	$\frac{(1+x-3x^3)e^{x-x^3}}{1+xe^{x-x^3}}$	$\frac{e^x}{1+e^x}$
③ 0	$\frac{6x+1}{\ln(3x^2+x+2)}$	$\frac{2xe^{x^2}}{(1+e^{x^2})(1+\ln(1+e^{x^2}))}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$5 \ln(3)$	$+\infty$	$-\infty$
e^{8x+3}	FI $\frac{(x \ln(x) + 1)e^x}{x}$	$g' = 1 - g$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$5 \ln(3)$	$+\infty$	FI $+\infty$
-1	0	1	$+\infty$	e^{-8x+3}	$\frac{1}{x^2-1}$	$-\infty$
$\frac{3}{7}$	$\frac{\ln(x)+2}{2\sqrt{x}}$	$\frac{1}{2x\sqrt{\ln(x)}}$	e^{10t-19}	$\frac{6x+6\sqrt{x}+1}{2(x+\sqrt{x})}$	1	$\frac{1}{x \ln(x) \ln(\ln(x))}$
$\frac{1 - \ln(x)}{x^2}$	$\frac{4x^2 + 11x + 4}{x(x+1)^2}$	$\frac{16x^3 + 24x^2 + 52x - 3}{2x^2 + 3x + 7}$	$\frac{2x-1}{x}$	$\frac{e^x}{x}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$2 \ln(5)$
$5 \ln(2)$	$-\frac{2x(x+2)}{(1+x)(2x^2+x+1)}$	$2 \ln(5)$	$e^{-7} + 3$	$-\frac{3x^2}{1-x^3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x \ln(x)}$	$\frac{2x-4}{x^2-4x+7}$	$-\frac{x^2-6x+2}{(x-3)(x^2-2)}$	$-\frac{1}{x \ln(x)^2}$	$+\infty$	0
						1

► Réponses et corrigés page 206

Produit scalaire dans l'espace

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 19.1 — Évaluation d'un polynôme.



On considère le polynôme $P = X^2 + \frac{1}{2}X + \frac{1}{3}$.

Donner les valeurs exactes de :

- | | | | |
|------------------|----------------------|--------------------------------------|----------------------|
| a) $P(1)$ | <input type="text"/> | c) $P\left(\frac{3}{2}\right)$ | <input type="text"/> |
| b) $P(-4)$ | <input type="text"/> | d) $P(\sqrt{2})$ | <input type="text"/> |

Calcul 19.2 — Des suites entrelacées.



Soient $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ les suites telles que $u_0 = v_0 = w_0 = 4$ et telles que, pour tout entier $n \geq 0$:

$$u_{n+1} = u_n + n + 1, \quad v_{n+1} = v_n + n, \quad w_{n+1} = w_n - n + 1.$$

Calculer :

- | | | | | | | | |
|-------------|----------------------|-------------|----------------------|-------------|----------------------|-------------|----------------------|
| a) u_1 .. | <input type="text"/> | b) u_3 .. | <input type="text"/> | c) v_3 .. | <input type="text"/> | d) w_3 .. | <input type="text"/> |
|-------------|----------------------|-------------|----------------------|-------------|----------------------|-------------|----------------------|

Remarque

Dans toute cette fiche, l'espace est muni d'un repère orthonormé.

Vecteurs orthogonaux

Calcul 19.3 — Test d'orthogonalité.



On considère les vecteurs suivants :

$$\vec{a} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} \begin{pmatrix} 14 \\ -1 \\ -8 \end{pmatrix} \quad \vec{c} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{d} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dans chacun des cas suivants, dire si « oui » ou « non » les vecteurs proposés sont orthogonaux.

- | | | | | | |
|---------------------------------|----------------------|---------------------------------|----------------------|---------------------------------|----------------------|
| a) $\vec{a}$ et $\vec{b}$ | <input type="text"/> | c) $\vec{a}$ et $\vec{d}$ | <input type="text"/> | e) $\vec{b}$ et $\vec{d}$ | <input type="text"/> |
| b) $\vec{a}$ et $\vec{c}$ | <input type="text"/> | d) $\vec{b}$ et $\vec{c}$ | <input type="text"/> | f) $\vec{c}$ et $\vec{d}$ | <input type="text"/> |

Calcul 19.4 — Avec des racines.



On considère les vecteurs suivants :

$$\vec{a} \begin{pmatrix} 4 \\ -\sqrt{6} \\ 3\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} \begin{pmatrix} -2 \\ \sqrt{3} + \sqrt{6} \\ 1 - 3\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d} \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} \\ 3 - \sqrt{2} \\ \sqrt{3} + \sqrt{6} \end{pmatrix}$$

Dans chacun des cas suivants, dire si « oui » ou « non » les vecteurs proposés sont orthogonaux.

- | | | | | | |
|---------------------------------|----------------------|---------------------------------|----------------------|---------------------------------|----------------------|
| a) $\vec{a}$ et $\vec{b}$ | <input type="text"/> | c) $\vec{a}$ et $\vec{d}$ | <input type="text"/> | e) $\vec{b}$ et $\vec{d}$ | <input type="text"/> |
| b) $\vec{a}$ et $\vec{c}$ | <input type="text"/> | d) $\vec{b}$ et $\vec{c}$ | <input type="text"/> | f) $\vec{c}$ et $\vec{d}$ | <input type="text"/> |

Calcul 19.5 — Avec un paramètre (I).



Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble des réels t tels que $\vec{v}$ et $\vec{w}$ soient orthogonaux.

- | | | | |
|--|----------------------|---|----------------------|
| a) $\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ 2t \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} t+3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ | <input type="text"/> | b) $\vec{v} \begin{pmatrix} 2t \\ 2+t \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} t \\ 2-t \\ -1 \end{pmatrix}$... | <input type="text"/> |
|--|----------------------|---|----------------------|

Calcul 19.6 — Avec un paramètre (II).



Dans chaque cas, déterminer l'ensemble des réels t tels que $\vec{v}$ et $\vec{w}$ soient orthogonaux.

- | | | | |
|---|----------------------|---|----------------------|
| a) $\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ t \\ t \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$ | <input type="text"/> | b) $\vec{v} \begin{pmatrix} t-1 \\ t+2 \\ t-3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} t+1 \\ t+2 \\ 3-t \end{pmatrix}$... | <input type="text"/> |
|---|----------------------|---|----------------------|

Autour de la bilinéarité du produit scalaire

Calcul 19.7



Soient $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs. Exprimer chacun des produits scalaires en fonction de $\|\vec{v}\|$, $\|\vec{w}\|$ et $\vec{v} \cdot \vec{w}$.

- | | | | |
|---|----------------------|---|----------------------|
| a) $2\vec{v} \cdot (3\vec{w} - \vec{v})$ | <input type="text"/> | c) $(3\vec{v} - \vec{w}) \cdot (2\vec{v} + 3\vec{w})$... | <input type="text"/> |
| b) $(\vec{v} + 2\vec{w}) \cdot (3\vec{w} - \vec{v})$ | <input type="text"/> | d) $(\vec{v} + 3\vec{w}) \cdot (3\vec{w} - \vec{v})$ | <input type="text"/> |

Calcul 19.8



Soient $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs. Exprimer chacun des carrés scalaires en fonction de $\|\vec{v}\|$, $\|\vec{w}\|$ et $\vec{v} \cdot \vec{w}$.

- | | | | |
|-------------------------------------|----------------------|---|----------------------|
| a) $\ \vec{v} + 2\vec{w}\ ^2$ | <input type="text"/> | c) $\ 2\vec{v} + \sqrt{3}\vec{w}\ ^2$ | <input type="text"/> |
| b) $\ 3\vec{v} - \vec{w}\ ^2$ | <input type="text"/> | d) $\ 2\vec{v} - \sqrt{5}\vec{w}\ ^2$ | <input type="text"/> |

Calcul 19.9 — Avec des vecteurs orthogonaux.



Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs orthogonaux deux à deux et tels que : $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$, $\|\vec{v}\| = 1$ et $\|\vec{w}\| = 3$.

Calculer :

- | | | | |
|---|----------------------|--|----------------------|
| a) $(2\vec{v} - 3\vec{w}) \cdot (3\vec{v} + 2\vec{w}) \dots$ | <input type="text"/> | d) $\ 2\vec{v} + 3\vec{w}\ ^2 \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> |
| b) $(2\vec{v} - 3\vec{w}) \cdot (3\vec{u} + 2\vec{w}) \dots$ | <input type="text"/> | e) $\ \sqrt{2}\vec{u} + \vec{w}\ ^2 \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> |
| c) $(\vec{u} + \vec{w}) \cdot (2\vec{u} - 2\vec{w}) \dots\dots$ | <input type="text"/> | f) $\ \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}\ ^2 \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> |

Équations cartésiennes de plans

Calcul 19.10



Dans chaque cas, donner une équation du plan $\mathcal{P}$ passant par le point A et de vecteur normal $\vec{n}$.

- | | |
|--|----------------------|
| a) A(2, 5, 6) et $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> |
| b) A(1, -2, 3) et $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> |
| c) A(2, -4, 5) et $\vec{n} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> |

Calcul 19.11



On considère les points A(1, 0, 2) et B(2, 1, 0). Indiquer l'équation du plan passant par A et perpendiculaire à la droite (AB) parmi celles proposées ci-dessous :

(a) $x + 2z + 3 = 0$

(c) $x + y + 2z - 5 = 0$

(b) $x + y - 2z + 3 = 0$

(d) $x + 2z - 5 = 0$

.....

Calcul 19.12



On considère les plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$ et $\mathcal{P}_4$ d'équations respectives :

$$\mathcal{P}_1 : x + y + z + 3 = 0, \quad \mathcal{P}_2 : 2x - y + 5 = 0, \quad \mathcal{P}_3 : x - 2y + z - 3 = 0, \quad \mathcal{P}_4 : x + 2y + z + 2 = 0.$$

Dans chacun des cas suivants, dire si « oui » ou « non » les plans proposés sont perpendiculaires.

- | | | | | | |
|--|----------------------|--|----------------------|--|----------------------|
| a) $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2 \dots\dots$ | <input type="text"/> | c) $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_4 \dots\dots$ | <input type="text"/> | e) $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_4 \dots\dots$ | <input type="text"/> |
| b) $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_3 \dots\dots$ | <input type="text"/> | d) $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3 \dots\dots$ | <input type="text"/> | f) $\mathcal{P}_3$ et $\mathcal{P}_4 \dots\dots$ | <input type="text"/> |

Projetés orthogonaux et calculs de distances

Calcul 19.13 — Distance d'un point à une droite.



On considère les points $A(3, 4, 12)$, $B(3, 0, 2)$ et $C(1, 2, 3)$. On souhaite déterminer la distance du point A à la droite (BC) .

a) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BC}$

b) Donner une représentation paramétrique de la droite (BC)

c) Donner une équation du plan $\mathcal{P}$ passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{BC}$

.....

d) Déterminer les coordonnées de H , le projeté orthogonal de A sur (BC)

e) Calculer la longueur AH

Calcul 19.14 — Avec une représentation paramétrique.



Soit d la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 5 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

On souhaite déterminer la distance du point $A(5, 0, 3)$ à la droite d .

a) Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}$ perpendiculaire à d passant par A ..

b) Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point A sur la droite d ...

c) Déterminer la longueur AH

Calcul 19.15 — Avec un peu d'analyse.



Soit d la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2 \\ z = 2 - t \end{cases}$ pour $t \in \mathbb{R}$.

On souhaite déterminer la distance du point $A(2, 4, 0)$ à la droite d .

À tout réel t , on associe le point M de d de coordonnées $M(t + 1, 2, 2 - t)$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui, à tout réel t , associe $f(t) = AM$.

a) Calculer $f(t)$

b) Calculer $f'(t)$

c) Déterminer la distance de A à d

Calcul 19.16 — Distance d'un point à un plan.



Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne $x - 3y + 2z + 3 = 0$.

On souhaite déterminer la distance du point $A(2, 4, 0)$ au plan $\mathcal{P}$.

Soit H le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$.

a) Donner une représentation paramétrique de la droite (AH)

Déterminer :

b) les coordonnées de H

c) la distance de A à $\mathcal{P}$

Calculs plus avancés

Calcul 19.17 — Cas général.



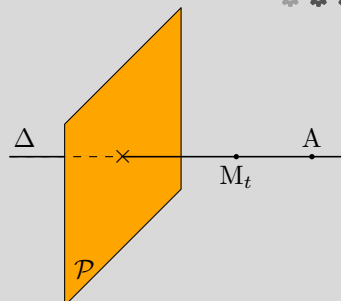
Soient $A(x_A, y_A, z_A)$ un point et $\mathcal{P}$ le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$, où a , b , c et d sont des réels avec a , b et c non simultanément nuls.

On souhaite déterminer la distance de A au plan $\mathcal{P}$.

Soit Δ la droite perpendiculaire à $\mathcal{P}$ passant par A .

À tout réel t , on associe le point $M_t(x_A + at, y_A + bt, z_A + ct)$.

On admet que la droite Δ est l'ensemble des points M_t avec t réel.



a) Soit t un réel, exprimer la longueur AM_t en fonction de t , a , b et c

b) En utilisant l'équation de $\mathcal{P}$, déterminer le réel t_H tel que M_{t_H} appartienne à $\mathcal{P}$.

c) En déduire la distance de A à $\mathcal{P}$

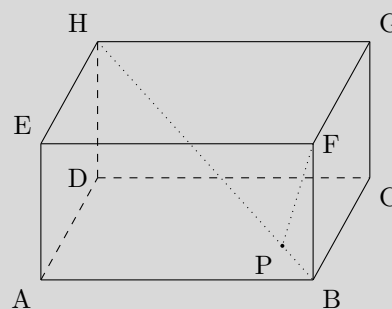
Calcul 19.18 — En perdant les repères.



Soit ABCDEFGH un pavé droit avec $AE = EH = 1$ et $AB = 2$.

Soit P le projeté orthogonal de F sur la droite (BH).

On se propose de calculer la distance du point F à la droite (BH).



- Exprimer $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BH}$ en fonction des longueurs BP et BH
- Calculer BH à l'aide du théorème de Pythagore
- Calculer $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BH}$ en décomposant $\overrightarrow{BH}$ en une somme de vecteurs qui sont ou bien orthogonaux à $\overrightarrow{BF}$, ou bien colinéaires à $\overrightarrow{BF}$
- En déduire BP
- En déduire la distance de F à (BH) à l'aide du théorème de Pythagore

Calcul 19.19 — Une aire de triangle.



On considère les points $A(1, 1, 1)$, $B(4, 2, 2)$ et $C(2, 3, 3)$. On souhaite calculer l'aire du triangle ABC.

- Donner une représentation paramétrique de (BC)
- Déterminer la distance de A à (BC)
- En déduire l'aire de ABC

Réponses mélangées

$\frac{2t-3}{\sqrt{2t^2-6t+9}}$	-54	85	$H(-1, 4, 4)$	$9\ \vec{v}\ ^2 + \ \vec{w}\ ^2 - 6\vec{v} \cdot \vec{w}$	oui	4
$\sqrt{2t^2-6t+9}$	$\{-5, 0\}$	$6\vec{v} \cdot \vec{w} - 2\ \vec{v}\ ^2$	BP $\times$ BH	$\frac{\sqrt{6}}{6}$	$PF = \frac{\sqrt{30}}{6}$	(b)
non	10	$\left\{-\frac{8}{5}\right\}$	$x + 2y - z - 2 = 0$	$\{-1, 1\}$	oui	$-\frac{ax_A + by_A + cz_A + d}{a^2 + b^2 + c^2}$
$4\sqrt{5}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\ \vec{v}\ ^2 + 4\ \vec{w}\ ^2 + 4\vec{v} \cdot \vec{w}$	1	$\{-5 - \sqrt{31}, -5 + \sqrt{31}\}$	non	
-48	non	$\frac{10}{3}$	$4\ \vec{v}\ ^2 + 5\ \vec{w}\ ^2 - 4\sqrt{5}\vec{v} \cdot \vec{w}$	$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	oui	$H\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{8}{3}\right)$
7	13	$4\ \vec{v}\ ^2 + 3\ \vec{w}\ ^2 + 4\sqrt{3}\vec{v} \cdot \vec{w}$	non	$H\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 1\right)$	$2x - y + 2z - 10 = 0$	
$6\ \vec{w}\ ^2 - \ \vec{v}\ ^2 + \vec{v} \cdot \vec{w}$	$-2x + 2y + z - 14 = 0$	$6\ \vec{v}\ ^2 - 3\ \vec{w}\ ^2 + 7\vec{v} \cdot \vec{w}$				
$\frac{ ax_A + by_A + cz_A + d }{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$	oui	$\sqrt{6}$	$\frac{11}{6}$	oui	$AM_t = t \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$	$\frac{5\sqrt{2}}{2}$
$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 2t \\ z = 2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$	-14	non	$2x - y + 2z - 11 = 0$	$\frac{\sqrt{14}}{2}$	oui	oui 12
non	oui	$\frac{7\sqrt{3}}{3}$	$5x + 6y + 14 = 0$	$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 4 - 3t \\ z = 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$	non	$9\ \vec{w}\ ^2 - \ \vec{v}\ ^2$
5	oui	$\frac{7}{3} + \frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{43}{3}$	$\begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 2 + t \\ z = 2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$	non	oui $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

► Réponses et corrigés page 213

Plans et sphères dans l'espace

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 20.1 — Intersection de droites dans le plan.



Déterminer l'intersection éventuelle des droites déterminées par les équations suivantes.

Il s'agit de résoudre des systèmes de deux équations à deux inconnues.

a) $2x + y + 5 = 0$ et $y = -2x + 4 \dots$

c) $2x + y + 3 = 0$ et $y = -3x + 6 \dots$

b) $2x - 2y = 1$ et $y = x - \frac{1}{2} \dots\dots\dots$

Calcul 20.2 — Signe d'un trinôme.



Résoudre les inéquations suivantes.

On donnera les solutions sous la forme d'un intervalle ou d'une réunion d'intervalles.

a) $(2x - 3)(x + 1) > 0 \dots\dots\dots$

b) $(5 - 2x)(3 + x) > 0 \dots\dots\dots$

c) $\frac{2x + 1}{x - 5} \leq 0 \dots\dots\dots$

Remarque

Dans toute la fiche, on travaille dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Autour des équations cartésiennes

Calcul 20.3 — Pour s'échauffer (I).



Pour chacune des équations cartésiennes de plan suivantes, donner un point appartenant à ce plan.

a) $x + 2y = 3 \dots\dots\dots$

c) $x = 6 \dots\dots\dots$

b) $y - 3z = 4 \dots\dots\dots$

d) $x + y - 2z = 18 \dots\dots\dots$

Calcul 20.4 — Pour s'échauffer (II).



Déterminer une équation du plan passant par le point A(1, 2, 1) et normal au vecteur indiqué.

a) $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\vec{n}_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

Calcul 20.5 — Pour s'échauffer (III).



Pour chacune des équations cartésiennes de plan suivantes, donner un vecteur normal à ce plan.

a) $x + 2y = 3$

c) $x = 6$

b) $y - 3z = 4$

d) $x + y - 2z = 18$

Calcul 20.6 — Des vecteurs remarquables.



En déterminant un vecteur orthogonal aux deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, déterminer une équation du plan passant par A(1, 2, 3) et dirigé par les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Dans chacun des cas, on pourra remarquer qu'il existe un vecteur orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ « remarquable ».

a) $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

Calcul 20.7 — Vecteurs orthogonaux à deux vecteurs.



Dans chacun des cas suivants, déterminer un vecteur $\vec{n}$ orthogonal aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On cherchera un vecteur $\vec{n}$ de la forme $\vec{n} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Calcul 20.8 — Équations cartésiennes de plan (I).

Déterminer une équation cartésienne du plan passant par $A(1, 2, -3)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ci-dessous. On commencera par déterminer un vecteur $\vec{n}$ orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

a) $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Calcul 20.9 — Équations cartésiennes de plan (II).

Déterminer une équation cartésienne du plan passant par $A(1, 2, -3)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ci-dessous. On commencera par déterminer un vecteur $\vec{n}$ orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

a) $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$

b) $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$

Avec des points

Calcul 20.10 — Équation de plan (I).

Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation cartésienne du plan défini par les points A, B, C de la forme $ax + by + cz = 1$.

Il s'agit de résoudre des systèmes de trois équations à trois inconnues.

a) A(1, 0, 1), B(2, -1, 0) et C(3, -2, 0)

b) A(1, 0, 1), B(2, -1, 0) et C(3, -2, 2)

c) A(1, 0, 1), B(2, -1, 1) et C(3, -1, 1)

Calcul 20.11 — Équation de plan (II).

On considère les points $A(\alpha, 0, 0)$, $B(0, \beta, 0)$ et $C(0, 0, \gamma)$ où α, β, γ sont trois réels non nuls.

Déterminer une équation cartésienne du plan défini par les points A, B, C de la forme $ax + by + cz = 1$.

.....

Calcul 20.12 — Plan médiateur.

Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation du plan $\mathcal{P}$ passant par le milieu du segment $[AB]$ et orthogonal à (AB) .

a) $A(2, 0, 0)$ et $B(-4, 0, 0)$

b) $A(2, 1, -3)$ et $B(4, -1, -3)$

Intersections**Calcul 20.13 — Intersection d'une droite et d'un plan (I).**

On considère la droite (d) définie par le point $A(1, 2, -1)$ et le vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'intersection de (d) et de $\mathcal{P}$.

On utilisera une représentation paramétrique de la droite.

a) $\mathcal{P} : x + 2y = 6$

b) $\mathcal{P} : x + y + 2z = 8$

c) $\mathcal{P} : 2x - z = 4$

Calcul 20.14 — Intersection d'une droite et d'un plan (II).

On considère la droite (d) définie par le point $A(1, 2, -1)$ et le vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'intersection de (d) et de $\mathcal{P}$.

a) $\mathcal{P} : x - y + 2z = 6$

b) $\mathcal{P} : 2x - z = 3$

Calcul 20.15 — Intersection de deux plans (I).

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'intersection des deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

On attend pour la réponse un point et un vecteur directeur de la droite d'intersection.

a) $\mathcal{P}_1 : x = 1$ et $\mathcal{P}_2 : y = -1$

b) $\mathcal{P}_1 : x + z = 1$ et $\mathcal{P}_2 : z = -1$

c) $\mathcal{P}_1 : x + 2y = 1$ et $\mathcal{P}_2 : x = -1$

Calcul 20.16 — Intersection de deux plans (II).



Même exercice.

a) $\mathcal{P}_1 : x + y - 2z = 6$ et $\mathcal{P}_2 : y + z = 12$

b) $\mathcal{P}_1 : x + y - 2z = 6$ et $\mathcal{P}_2 : x - y + z = 12$

c) $\mathcal{P}_1 : 2x + y - 2z = 10$ et $\mathcal{P}_2 : x - 2y + z = -5$...

d) $\mathcal{P}_1 : 3x - 2y - 6z = 5$ et $\mathcal{P}_2 : 2x - 3y + 5z = 0$..

Sphères

Calcul 20.17 — Équations de sphère.



Dans chacun des cas suivants, donner l'équation de la sphère de centre Ω et de rayon R .

On donnera l'équation sous forme développée et ordonnée.

a) $\Omega(1, 2, 3)$ et $R = 7$

b) $\Omega(1, -2, 1)$ et $R = 2$

Calcul 20.18 — Éléments caractéristiques d'une sphère (I).



Identifier les ensembles définis par l'équation cartésienne ci-dessous. En particulier s'il s'agit de sphères, préciser leur centre Ω et leur rayon R .

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

b) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 3z + 10 = 0$

c) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + 1 = 0$

Calcul 20.19 — Éléments caractéristiques d'une sphère (II).



Les équations suivantes décrivent des sphères. Déterminer leur centre Ω et leur rayon R .

a) $x^2 + y^2 + z^2 - x - 3y + z - \frac{5}{4} = 0$

b) $x^2 + y^2 + z^2 - 2\cos(\alpha)x - 2\sin(\alpha)y - 3 = 0$

Réponses mélangées

$$\begin{array}{l}
 y = 2 \quad \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 1 \quad x + y = 1 \quad \vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad x = 1 \quad (d) \quad z = 1 \\
 A(2, 0, -1) \text{ et } \vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{la droite} \quad A(6, 0, 0) \quad z = 3 \quad]-\infty, -1[\cup \left] \frac{3}{2}, +\infty[\right. \\
 A(18, 0, 0) \quad \left[-\frac{1}{2}, 5[\quad \{I(0, 3, -3)\} \quad \vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A(3, 0, 0) \quad \emptyset \quad \left\{ I\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 2\right) \right\} \\
 \left] -3, \frac{5}{2} \left[\quad x = 1 \quad \Omega(\cos(\alpha), \sin(\alpha), 0) \text{ et } R = 2 \quad 3x - 2y + 4z = -13 \quad 2x + 3y = 8 \\
 A(-1, 1, 0) \text{ et } \vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \emptyset \quad x - 2y + 4z = -15 \quad A(0, 4, 0) \quad A(3, 4, 0), \vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \\
 x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 35 = 0 \quad x + y = 1 \quad x = -1 \quad A(1, -1, 0) \text{ et } \vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 \vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Omega(-1, 2, 3) \text{ et } R = \sqrt{13} \quad A(9, -3, 0), \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \emptyset \quad \{M(9, -21)\} \\
 \vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad z = 1 \quad \Omega(0, 0, 0) \text{ et } R = 2 \quad 3x - 2y + 2z = -7 \quad \Omega\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) \text{ et } R = 2 \\
 2x - y + 3z = -9 \quad A \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u} \begin{pmatrix} 28 \\ 27 \\ 5 \end{pmatrix} \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z + 2 = 0 \\
 \vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad x - y = 3 \quad \left\{ I\left(\frac{11}{4}, \frac{1}{4}, \frac{5}{2}\right) \right\} \quad y = 2 \quad A(-6, 12, 0), \vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

► Réponses et corrigés page 219

Équations différentielles I

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 21.1 — Calculs avec des exponentielles.



Simplifier les expressions suivantes.

a) $e^{\frac{3}{2}} \times e^{-\frac{7}{6}}$

c) $e^{\frac{\pi}{2}} \times e^{-\frac{\pi}{3}}$

b) $(e^{-\frac{3}{4}})^3 \times (e^{\frac{7}{25}})^5$

d) $\frac{e^{3x+7} \times e^{2x+1}}{(e^{x+2/5})^5}$

Calcul 21.2 — Résolution d'équations du premier degré.



Donner la solution de chacune des équations suivantes, où x est l'inconnue réelle.

a) $7x - 8 = 21x - 12$

c) $\frac{7x - 23}{4x - 1} = 5$

b) $\frac{1}{x+1} = \frac{2}{x}$

d) $\frac{2x+3}{x-7} = \frac{2x-11}{x+9}$

Équations différentielles homogènes

Calcul 21.3 — Formes générales.



Déterminer la forme générale des solutions des équations différentielles homogènes suivantes.

a) $y' = 2y$

c) $2y' - 3y = 0$

b) $y' + 7y = 0$

d) $2y' + 3y = 8y + 9y'$

Calcul 21.4 — Équations homogènes avec condition (I).



Dans chacun des cas suivants, déterminer la solution f de l'équation différentielle donnée vérifiant la condition donnée.

a) $y' = -11y$ avec $f(0) = 5$

b) $2y' - 3y = 2y + 3y'$ avec $f(0) = \pi$

Calcul 21.5 — Équations homogènes avec condition (II).



Dans chacun des cas suivants, déterminer la solution f de l'équation différentielle donnée vérifiant la condition donnée.

a) $\frac{1}{2}y' + y = \frac{1}{3}y - y'$ avec $f(3) = e^{-1}$

b) $y' + \sqrt{2}y = 0$ avec $f(\sqrt{2}) = 1$

Équations différentielles avec second membre

Calcul 21.6



On considère l'équation différentielle $(E) : y' = y - 3$.

a) Déterminer une solution particulière constante de l'équation (E)

b) Déterminer la forme générale des solutions de l'équation $y' = y$

c) Déterminer la forme générale des solutions de l'équation (E)

Calcul 21.7



On considère l'équation différentielle $(E) : \sqrt{2}y' = \sqrt{6}y - 1$.

a) Déterminer une solution particulière constante de l'équation (E)

b) Déterminer la forme générale des solutions de l'équation $\sqrt{2}y' = \sqrt{6}y$

c) Déterminer la forme générale des solutions de l'équation (E)

Réponses mélangées

$x \mapsto Ce^{\sqrt{3}x} + \frac{1}{\sqrt{6}}$	$-\frac{18}{13}$	$x \mapsto 3$	$x \mapsto Ce^{-7x}$	$e^{-\frac{17}{20}}$
$\frac{25}{23}$	$x \mapsto e^{\frac{1}{3} - \frac{4}{3}x}$	$x \mapsto Ce^{\sqrt{3}x}$	$x \mapsto e^{2 - \sqrt{2}x}$	$e^{\frac{\pi}{6}}$
$x \mapsto \pi e^{-5x}$	e^6	$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{6}}$	$x \mapsto 5e^{-11x}$	$\frac{2}{7}$
$x \mapsto Ce^{-5x/7}$	$x \mapsto ke^x + 3$	$e^{\frac{1}{3}}$	$x \mapsto Ce^{3x/2}$	$x \mapsto Ce^{2x}$

► Réponses et corrigés page 223

Équations différentielles II

Prérequis

- Pour l'ensemble de la fiche, « résoudre une équation différentielle » signifie « donner la forme générale des solutions » de l'équation proposée.
- La dérivée d'une fonction composée $f = v \circ u$ est donnée par la formule

$$f' = (v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'.$$

Équations différentielles du type $y' = ay + b$

Calcul 22.1 — Trouver l'équation différentielle connaissant une solution.



Quelle est l'équation différentielle dont la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto e^{4x} - \frac{1}{4} \end{cases}$ est solution ?

(a) $y' = 4y - \frac{1}{4}$

(c) $y' = -4y - 2$

(b) $y' = \frac{-1}{4}y + 4$

(d) $y' = 4y + 1$

.....

Calcul 22.2



Quelle est la fonction qui est solution de l'équation différentielle $y' = -y + 3$?

(a) $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto e^x - 3 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto -3e^{-x} + 3 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto -e^x + 3 \end{cases}$

.....

Calcul 22.3 — Résolution d'une équation différentielle (I).



On note (E) l'équation différentielle $y' = -\frac{2}{3}y + 5$.

a) Résoudre sur $\mathbb{R}$: $y' = -\frac{2}{3}y$

b) Pour quelle valeur $K \in \mathbb{R}$ la fonction constante $x \mapsto K$ est-elle solution de (E) ?

.....

c) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$

Calcul 22.4 — Résolution d'une équation différentielle (II).



On note (E) l'équation différentielle $\frac{2}{7}y' = \frac{1}{7}y + 2$.

a) Les solutions de (E) sont les solutions de

Ⓐ $\frac{2}{7}y' = \frac{1}{7}y$

Ⓒ $y' = \frac{1}{2}y + 7$

Ⓑ $y' = -\frac{1}{7}y + \frac{12}{7}$

Ⓓ $y' = \frac{1}{2}y + \frac{2}{7}$

Il y a une unique bonne réponse.

.....

b) Résoudre sur $\mathbb{R}$: $y' = \frac{1}{2}y$

c) Résoudre sur $\mathbb{R}$: $y' = \frac{1}{7}y$

d) Déterminer une solution particulière de (E)

e) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$

Calcul 22.5 — Résolution d'une équation différentielle (III).



On note (E) l'équation différentielle $4y' + \frac{2}{5}y - 1 = 0$.

a) Les solutions de (E) sont les solutions de

Ⓐ $y' = \frac{1}{10}y - 3$

Ⓑ $y' = -\frac{1}{10}y + \frac{1}{4}$

Ⓒ $y' = -\frac{1}{20}y + \frac{1}{2}$

Ⓓ $y' = \frac{1}{10}y + \frac{3}{4}$

Il y a une unique bonne réponse.

.....

b) Déterminer une solution particulière de (E)

c) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$

Calcul 22.6 — En autonomie.

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes.

a) $3y' - 2y = 7$

b) $2y' - 3y = y' - 8$

c) $y' - \frac{1}{2}y = \frac{1}{3}y' + y + 1$

d) $\pi y' + 3y = y + \frac{\pi}{3}y' - \frac{\pi}{2}$

Avec des conditions initiales**Calcul 22.7**

Pour chacune des équations différentielles suivantes, déterminer la solution sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition initiale indiquée.

a) $y' = 2y - 1$ et $y(0) = -4$

b) $\frac{1}{2}y' - y = 7$ et $y(1) = 0$

Calcul 22.8 — Des conditions initiales variées.

Soient b et c des nombres réels.

a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $2y' + 3y = b$

Pour chacune des équations différentielles suivantes, déterminer la solution sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition initiale indiquée.

b) $2y' + 3y = b$ et $y(0) = b$

c) $2y' + 3y = b$ et $y(0) = c$

d) $2y' + 3y = b$ et $y(c) = b$

Équations différentielles du type $y' = ay + f$

Calcul 22.9



Quelle est l'équation différentielle dont la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{9} - \frac{2}{3}x \end{cases}$ est solution ?

(a) $y' = -y + x - 2$

(b) $y' = 3y + x^2 - 1$

(c) $y' = 3y + 2x - 1$

(d) $y' = 2y - 2x + 3$

.....

Calcul 22.10



On note (E) l'équation différentielle $y' = 5y + 2x - 3$.

a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' = 5y$

b) Déterminer le couple de réels (a, b) tel que $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto ax + b \end{cases}$ soit solution de (E) .

c) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$

Calcul 22.11



On note (E) l'équation différentielle $y' - 3y = 4 \sin(x)$.

a) Parmi les expressions suivantes, déterminer celle qui définit une fonction solution de (E) .

(a) $\frac{-4}{3} \cos(x)$

(c) $\frac{4}{5} \cos(x) - \frac{2}{5} \sin(x)$

(b) $\frac{-4}{3} \sin(x)$

(d) $\frac{-2}{5} \cos(x) - \frac{6}{5} \sin(x)$

.....

b) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$

c) Déterminer la solution de (E) sur $\mathbb{R}$ vérifiant $y(0) = \sqrt{2}$

Calcul 22.12



On note (E) l'équation différentielle $y' + 2y = e^{-2x} \cos(x)$.

a) Parmi les expressions suivantes, déterminer celle qui définit une fonction solution de (E) .

(a) $2e^{-2x} \cos(x)$

(b) $e^{-2x} \sin(x)$

(c) $-e^{-2x} \sin(x)$

(d) $e^{\cos(x)}$

.....

b) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$

c) Déterminer la solution de (E) sur $\mathbb{R}$ vérifiant $y(0) = 1$

Calcul 22.13



Déterminer une expression de f telle que la fonction $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 2e^x + 3e^{-x} \end{cases}$ soit solution de l'équation

différentielle $(E) : 7y' + 3y = f(x)$, sur $\mathbb{R}$

Réponses mélangées

$$\begin{array}{llll}
 x \mapsto Ce^{\frac{1}{2}x} - 14, \text{ où } C \in \mathbb{R} & \left(-\frac{2}{5}, \frac{13}{25}\right) & x \mapsto \frac{5}{2} & x \mapsto Ce^{\frac{3}{4}x} - \frac{2}{3}, \text{ où } C \in \mathbb{R} \\
 x \mapsto -\frac{2}{5} \cos(x) - \frac{6}{5} \sin(x) & & & \\
 + (\sqrt{2} + \frac{2}{5})e^{3x} & x \mapsto Ce^{-\frac{2}{3}x} + \frac{15}{2}, \text{ où } C \in \mathbb{R} & \textcircled{b} & \\
 x \mapsto (\sin(x) + C)e^{-2x}, \text{ où } C \in \mathbb{R} & x \mapsto \frac{b}{3} + \frac{2b}{3}e^{-\frac{3}{2}x} & x \mapsto \frac{1}{2} - \frac{9}{2}e^{2x} & \\
 x \mapsto \frac{b}{3} + Ce^{-\frac{3}{2}x}, \text{ où } C \in \mathbb{R} & x \mapsto -7 + 7e^{-2}e^{2x} & \textcircled{b} & x \mapsto Ce^{3x} + \frac{8}{3}, \text{ où } C \in \mathbb{R} \\
 x \mapsto Ce^{5x}, \text{ où } C \in \mathbb{R} & x \mapsto -\frac{2}{5} \cos(x) - \frac{6}{5} \sin(x) & \frac{15}{2} & \textcircled{d} \quad \textcircled{b} \\
 & + Ce^{3x}, \text{ où } C \in \mathbb{R} & & \\
 x \mapsto Ce^{-\frac{3}{\pi}x} - \frac{\pi}{4}, \text{ où } C \in \mathbb{R} & x \mapsto -\frac{2}{5}x + \frac{13}{25} + Ce^{5x}, \text{ où } C \in \mathbb{R} & x \mapsto 20e^x - 12e^{-x} & \\
 x \mapsto Ce^{-\frac{2}{3}x}, \text{ où } C \in \mathbb{R} & x \mapsto \frac{b}{3} + (c - \frac{b}{3})e^{-\frac{3}{2}x} & x \mapsto (\sin(x) + 1)e^{-2x} & \textcircled{c} \\
 \textcircled{c} & x \mapsto Ce^{\frac{1}{7}x}, \text{ où } C \in \mathbb{R} & x \mapsto -14 & \textcircled{d} & x \mapsto Ce^{-\frac{1}{10}x} + \frac{5}{2}, \text{ où } C \in \mathbb{R} \\
 x \mapsto Ce^{\frac{2}{3}x} - \frac{7}{2}, \text{ où } C \in \mathbb{R} & x \mapsto Ce^{\frac{1}{2}x}, \text{ où } C \in \mathbb{R} & x \mapsto \frac{b}{3} + \frac{2b}{3}e^{\frac{3}{2}x}e^{-\frac{3}{2}x} &
 \end{array}$$

► Réponses et corrigés page 225

Primitives II

Calculs de primitives

Calcul 23.1 — Primitives usuelles .



Donner l'expression des primitives des fonctions définies par les expressions suivantes.

a) $f(x) = 2x^3 + 6x^2 - x + 1$

b) $f(x) = 2x^4 - 4e^x + \frac{1}{x^2}$

Calcul 23.2 — Primitives usuelles (III).



Donner l'expression des primitives des fonctions définies par les expressions suivantes.

a) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

b) $f(x) = -3x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

c) $f(x) = \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} + \frac{3}{\sqrt{x}}$

d) $f(x) = -\frac{2}{x^3} + \frac{2}{x^4} - \frac{2}{x^5} + \frac{2}{x}$

Calcul 23.3 — Trouver une primitive particulière.



Donner l'expression de la primitive F de f telle que $F(a) = b$ dans les cas suivants.

a) $f(x) = 2x + 1$, $a = 1$ et $b = 0$

b) $f(x) = \frac{2}{x}$, $a = 1$ et $b = 3$

c) $f(x) = x^2 - e^x + 3$, $a = 0$ et $b = \frac{1}{2}$

Calcul 23.4 — Composition avec une fonction affine (I).



a) Donner l'expression des primitives de f définie par $f(x) = \exp(x)$

En déduire l'expression des primitives des fonctions définies par les expressions suivantes.

b) $f_1(x) = \exp(2x + 3)$

c) $f_2(x) = \exp(-5x + 2)$..

Calcul 23.5 — Composition avec une fonction affine (II).



a) Donner l'expression des primitives de f définie par $f(x) = \frac{1}{x}$

En déduire l'expression des primitives des fonctions définies par les expressions suivantes.

b) $f_1(x) = \frac{1}{x-3}$

c) $f_2(x) = \frac{1}{2x+1}$

Calcul 23.6 — Reconnaître les formules des dérivées usuelles (I).



Donner l'expression des primitives des fonctions définies par les expressions suivantes.

a) $f(x) = 2x \exp(x^2)$

b) $f(x) = \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x+1}}$

Calcul 23.7 — Reconnaître les formules des dérivées usuelles (II).



Donner l'expression des primitives des fonctions définies par les expressions suivantes.

a) $f(x) = 6(8x-2) \times (4x^2-2x-3)^5$

b) $f(x) = \frac{6x+5}{3x^2+5x-1}$

Réponses mélangées

$$\begin{array}{cccc}
 \exp(x^2) + C & \frac{1}{3}x^3 - e^x + 3x + \frac{3}{2} & \frac{1}{2}x^4 + 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + C & \frac{1}{2} \ln(|2x+1|) + C \\
 \frac{-1}{5} \exp(-5x+2) + C & \frac{1}{x^2} - \frac{2}{3x^3} + \frac{1}{2x^4} + 2 \ln(|x|) + C & 2 \ln(|x|) + 3 & \\
 \frac{1}{2} \exp(2x+3) + C & \ln(|3x^2+5x-1|) + C & (4x^2-2x-3)^6 + C & \sqrt{x^2+3x+1} + C \\
 \ln(|x-3|) + C & -x^3 + \ln(|x|) + 2\sqrt{x} + C & 3 \ln(|x|) - \frac{1}{2x^2} + 6\sqrt{x} + C & \\
 \ln(|x|) + C & \exp(x) + C & -\frac{1}{x} & x^2 + x - 2 \\
 & & \frac{2}{5}x^5 - 4e^x - \frac{1}{x} + C &
 \end{array}$$

► Réponses et corrigés page 229

Primitives III

Primitives de fonctions élémentaires

Calcul 24.1 — Fonctions élémentaires (I).



Déterminer l'expression d'une primitive des fonctions suivantes.

- | | | | |
|---|----------------------|--|----------------------|
| a) $x \mapsto x^3 + 2$ | <input type="text"/> | d) $x \mapsto \frac{1}{x^5}$ | <input type="text"/> |
| b) $x \mapsto \frac{1}{3x}$ | <input type="text"/> | e) $x \mapsto \frac{1}{x^{1/3}}$ | <input type="text"/> |
| c) $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ | <input type="text"/> | f) $x \mapsto \frac{1}{e^{12x}}$ | <input type="text"/> |

Calcul 24.2 — Fonctions élémentaires (II).



Déterminer l'expression d'une primitive des fonctions suivantes.

- | | | | |
|------------------------------------|----------------------|---|----------------------|
| a) $x \mapsto e^3$ | <input type="text"/> | c) $x \mapsto \frac{x^3 + 5x^2 - 4}{x^2}$... | <input type="text"/> |
| b) $x \mapsto 3e^{5x} - x^2$ | <input type="text"/> | d) $x \mapsto 2 \sin(2x)$ | <input type="text"/> |

Primitives de formes remarquables

Dans les exercices suivants, on fera apparaître des expressions de la forme

$$nu'(x)u(x)^{n-1}, \frac{u'(x)}{u(x)} \text{ ou } u'(x)e^{u(x)}$$

pour primitiver les fonctions proposées.

Calcul 24.3 — Fonction puissance (I).



Déterminer l'expression d'une primitive des fonctions suivantes.

- | | | | |
|---------------------------------------|----------------------|---|----------------------|
| a) $x \mapsto (2x+1)(x^2+x)^5$ | <input type="text"/> | c) $x \mapsto (x^2+1)(x^3+3x+4)$. | <input type="text"/> |
| b) $x \mapsto (2x+3)(x^2+3x+12)^{10}$ | <input type="text"/> | d) $x \mapsto \frac{8x^2}{(x^3+2)^3}$ | <input type="text"/> |

Calcul 24.4 — Fonction puissance (II).



Déterminer l'expression d'une primitive des fonctions suivantes.

- | | | | |
|--|----------------------|---------------------------------------|----------------------|
| a) $x \mapsto (e^x + 1)^{-3}e^x \dots$ | <input type="text"/> | c) $x \mapsto x\sqrt{1-2x^2} \dots$ | <input type="text"/> |
| b) $x \mapsto (e^x + 1)(e^x + x)^{22}$ | <input type="text"/> | d) $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x} \dots$ | <input type="text"/> |

Calcul 24.5 — Fonction inverse (I).



Déterminer l'expression d'une primitive des fonctions suivantes.

- | | | | |
|---|----------------------|---|----------------------|
| a) $x \mapsto \frac{1}{2x-3} \dots$ | <input type="text"/> | d) $x \mapsto \frac{5x^4 + 3x^2 + 1}{x^5 + x^3 + x + 12}$ | <input type="text"/> |
| b) $x \mapsto \frac{4x^3 + 3x^2}{x^4 + x^3} \dots$ | <input type="text"/> | e) $x \mapsto \frac{e^x + 1}{e^x + x} \dots$ | <input type="text"/> |
| c) $x \mapsto \frac{3x^2 + 4x}{x^3 + 2x^2 + 1} \dots$ | <input type="text"/> | f) $x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \dots$ | <input type="text"/> |

Calcul 24.6 — Fonction exponentielle.



Déterminer l'expression d'une primitive des fonctions suivantes.

- | | | | |
|--|----------------------|--|----------------------|
| a) $x \mapsto \left(3x^2 + \frac{1}{x}\right)e^{x^3 + \ln(x)} \dots$ | <input type="text"/> | c) $x \mapsto \sin(x)e^{-\cos(x)+3} \dots$ | <input type="text"/> |
| b) $x \mapsto (x^2 + x + 5)e^{x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 15x - 12}$ | <input type="text"/> | d) $x \mapsto \exp(x)\exp(e^x) \dots$ | <input type="text"/> |

Réponses mélangées

$x \mapsto \ln x^3 + 2x^2 + 1 $	$x \mapsto -\cos(2x)$	$x \mapsto \frac{(\ln(x))^2}{2}$	$x \mapsto \frac{-4/3}{(x^3 + 2)^2}$	$x \mapsto \frac{x^4}{4} + 2x$
$x \mapsto \frac{1}{3}\ln x $	$x \mapsto \frac{3}{5}e^{5x} - \frac{x^3}{3}$	$x \mapsto \frac{(x^2 + 3x + 12)^{11}}{11}$	$x \mapsto e^{-\cos(x)+3}$	$x \mapsto \frac{3}{2}x^{2/3}$
$x \mapsto \frac{(x^2 + x)^6}{6}$	$x \mapsto xe^{x^3}$	$x \mapsto \frac{(x^3 + 3x + 4)^2}{6}$	$x \mapsto \ln\sqrt{ 2x-3 }$	$x \mapsto -\frac{e^{-12x}}{12}$
$x \mapsto \frac{x^2}{2} + 5x + \frac{4}{x}$	$x \mapsto \ln(e^x + e^{-x})$	$x \mapsto \frac{1}{3}e^{x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 15x - 12}$	$x \mapsto \exp(e^x)$	
$x \mapsto -\frac{1}{6}(1-2x^2)^{3/2}$	$x \mapsto -\frac{1}{4x^4}$	$x \mapsto \ln x^4 + x^3 $	$x \mapsto e^3x$	$x \mapsto \frac{(e^x + x)^{23}}{23}$
$x \mapsto \ln x^5 + x^3 + x + 2 $	$x \mapsto \ln e^x + x $	$x \mapsto -\frac{1}{2(1+e^x)^2}$	$x \mapsto 2\sqrt{x}$	

► Réponses et corrigés page 230

Intégration I

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 25.1 — Des fractions.



Calculer, en donnant le résultat sous forme de fraction irréductible :

a) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots\dots\dots$

b) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \dots\dots\dots$

c) $\frac{2}{3} - \frac{3}{2} \dots\dots\dots$

Calcul 25.2 — D'autres fractions.



Exprimer les nombres suivants sous la forme « $2^a 5^b$ » (avec $a, b \in \mathbb{Z}$).

a) $\frac{10^2}{5^4} \dots\dots\dots$

b) $\frac{1}{2^2 \times \frac{1}{5^2}} \dots\dots\dots$

c) $\frac{1}{5} - \frac{1}{10} \dots\dots\dots$

Premières intégrales

Calcul 25.3



Calculer :

a) $\int_0^1 t \, dt \dots\dots\dots$

b) $\int_0^1 2t^2 \, dt \dots\dots\dots$

c) $\int_0^1 (-t + 1) \, dt \dots\dots\dots$

Calcul 25.4 — Une formule générale.



Soit $n \in \mathbb{N}$. Combien vaut $\int_0^1 t^n \, dt$?

(a) $n + 1$

(b) $n - 1$

(c) $\frac{1}{n}$

(d) $\frac{1}{n+1}$

(e) $\frac{1}{n-1}$

.....

Calcul 25.5 — Variations autour d'une puissance.



Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer :

a) $\int_{-1}^1 t^n \, dt \dots\dots\dots$

c) $1 - \int_0^1 nt^n \, dt \dots\dots\dots$

b) $\int_0^{\frac{1}{2}} t^n \, dt \dots\dots\dots$

d) $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} t^n \, dt \dots\dots\dots$

Calcul 25.6



Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{t^{2n}}{2^n} dt$

Secondes intégrales

Calcul 25.7 — Variations autour d'une fraction.



Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et soit $a > 0$. Calculer :

a) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{t^n} dt$

c) $\int_{\frac{1}{a}}^a \frac{1}{t^n} dt$

b) $\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{t^n} dt$

d) $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{1}{t^{2n}} dt$

Calcul 25.8



Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculer $\int_0^2 \left(\frac{t^3}{2}\right)^n dt$

b) Calculer $\int_0^{2^n} nt^{2n-1} dt$

Calculs plus avancés

Calcul 25.9 — Une somme d'intégrales.



Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\int_0^2 2t dt + \int_0^2 3t^2 dt + \int_0^2 4t^3 dt + \dots + \int_0^2 (n+1)t^n dt$

Calcul 25.10 — Une fraction de fractions, intégrée entre deux fractions.



Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Calculer $\frac{n}{\int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} \frac{1}{t^n} dt}$

Réponses mélangées

$\frac{1}{6}$	$2^{-1}5^{-1}$	ⓓ	2^{2n^2-1}	$\frac{1 - (-1)^{n+1}}{n+1}$	$\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$	$\frac{(n-1)}{n^{n-2}(2^{n-1}-1)}$
$\frac{2^{n+1}-1}{4^{n+1}(n+1)}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{\sqrt{2}}{2n+1}$	$-\frac{5}{6}$	$\frac{2^{2n+1}}{3n+1}$	$2^{-2}5^2$	$\frac{1}{2n-1} \frac{2^n - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$
$2^2 5^{-2}$	$\frac{1}{n-1}$	$\frac{a^{2n-2}-1}{a^{n-1}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{n-1}(2^{n-1}-1)$	$\frac{1}{n+1}$	$\frac{2}{3}$
					$4(2^n-1)$	$\frac{(-1)^n}{n-1}(2^{n-1}-1)$

► Réponses et corrigés page 232

Intégration II

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 26.1



Calculer et donner le résultat sous forme de fraction irréductible.

a) $3 \times \frac{2}{9}$ b) $\frac{77}{15} \times \frac{10}{33}$ c) $\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{3}{4} - \frac{2}{5}}$

Calcul 26.2



Calculer :

a) $1 - 3 \times (-5 - (-1)^2 \times 4)$ b) $-1^3 \times 0,25 \times (-3)^3 \times 4$

Calcul 26.3



Écrire sous la forme d'une seule puissance.

a) $\frac{2^8 + 2^8}{2^{12}}$ c) $\frac{((-2)^{-4})^{-1} \times 8^{-3}}{4^3 \times 16}$
 b) $\frac{3^4 \times 27^3}{(9^{-1})^2}$ d) $\frac{(-5)^4 \times 15^8}{(3^2)^4}$

Calcul 26.4



On note, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{-3x^2 + 2x - 1}{x^2 + 1}$. Calculer $f(x)$ dans chacun des cas suivants.

a) si $x = 1$ b) si $x = -1$ c) si $x = -2$

Calculs d'intégrales

Calcul 26.5 — Fonctions usuelles (I).



Calculer :

a) $\int_2^5 \pi \, dx$ c) $\int_0^1 x^2 \, dx$
 b) $\int_{-1}^3 u \, du$ d) $\int_{-1}^0 e^x \, dx$

Calcul 26.6 — Fonctions usuelles (II).



Calculer :

a) $\int_{-1}^2 3t^3 dt$

c) $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

b) $\int_1^2 \frac{x^4}{2} dx$

d) $\int_2^3 \frac{-3}{t^2} dt$

Calcul 26.7 — Puissances.



Calculer :

a) $\int_{-2}^1 (3x^2 - 5x + 1) dx$

b) $\int_0^1 \left(\frac{x^4}{3} + \frac{1}{2} \right) dx$

Calcul 26.8 — Divers (I).



Calculer :

a) $\int_0^1 e^{4x} dx$

c) $\int_{-1}^1 (2x + 1)^2 dx$

b) $\int_0^1 e^{4x-1} dx$

d) $\int_1^4 \frac{3}{\sqrt{2x+1}} dx$

Calcul 26.9 — Divers (II).



Calculer :

a) $\int_0^1 2x(x^2 - 1) dx$

c) $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^2} dt$

b) $\int_0^1 xe^{x^2} dx$

d) $\int_{-1}^1 (4x - 3)(4x^2 - 6x + 3)^3 dx$

Réponses mélangées

$-3\ 570$	28	3^{17}	$\frac{14}{9}$	4	$-\frac{1}{2}$	$e - \sqrt{e}$	$\frac{1}{4}(e^4 - 1)$	$9 - 3\sqrt{3}$
$-\frac{17}{5}$	$\frac{1}{2}(e - 1)$	$1 - \frac{1}{e}$	$\frac{45}{4}$	$\frac{17}{30}$	5^{12}	$\frac{14}{3}$	$\frac{31}{10}$	2
$\frac{39}{2}$	3π	$\frac{50}{21}$	2^{-3}	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	2^{-15}	$\frac{1}{4}\left(e^3 - \frac{1}{e}\right)$	27
								-1
								-3

► Réponses et corrigés page 234

Calculs d'intégrales

Calcul 27.1



Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_0^2 (t^3 + \exp(t)) dt$

b) $\int_1^5 \frac{3}{t} dt$

c) $\int_2^4 \left(\frac{4}{t} + \frac{1}{t^3} \right) dt$

Calcul 27.2



Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_{-1}^4 4 \exp(2t + 2) dt$

b) $\int_0^3 \frac{2}{5t + 3} dt$

c) $\int_{-2}^1 \frac{-2}{(t + 4)^2} dt$

d) $\int_{-2}^1 \frac{1}{2} \frac{1}{2t - 3} dt$

Calcul 27.3



Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_{-2}^4 \frac{2t + 1}{t^2 + t + 1} dt$

b) $\int_0^{\frac{1}{2}} (t^2 + 1) \exp(2t^3 + 6t) dt$

Réponses mélangées

$$\begin{array}{cccccc} \frac{3}{32} + 4 \ln(2) & -\frac{3}{5} & 3 \ln(5) & 3 + e^2 & \frac{2}{5} \ln(6) \\ \frac{1}{6} \left(e^{\frac{13}{4}} - 1 \right) & -\frac{\ln(7)}{4} & 2(e^{10} - 1) & \ln(7) & \end{array}$$

► Réponses et corrigés page 236

Intégration par parties I

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 28.1



Calculer $f'(x)$ pour chacune des fonctions f définies par les expressions suivantes.

On ne se souciera pas du domaine de dérivabilité.

a) $f(x) = xe^x$

d) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

b) $f(x) = x \ln(x)$

e) $f(x) = \sqrt{4x^2 + 3}$

c) $f(x) = \frac{e^x}{x}$

f) $f(x) = \frac{1}{x^6 + 3}$

Calcul 28.2



Factoriser puis simplifier chacune des expressions suivantes.

a) $(1 - 7x)(3x + 5) - (9x + 15)(x - 4)$

b) $xe^x - 3e^x$

d) $e^{2x} + 4e^x + 4$

c) $3\ln(x) - \ln(x^2)$

Premières intégrations par parties

Calcul 28.3



Calculer à l'aide d'une intégration par parties :

a) $\int_0^1 te^t dt$

b) $\int_1^e t \ln(t) dt$

Calcul 28.4



Calculer à l'aide d'une intégration par parties :

a) $\int_1^e \frac{\ln(t)}{t^2} dt$

c) $\int_0^{10} (2t + 1)e^{-t} dt$

b) $\int_1^e t^2 \ln(t) dt$

d) $\int_{-\frac{1}{3}}^0 (4 - 3t)e^{3t+1} dt$

Primitives du logarithme et de ses puissances

Calcul 28.5



Calculer à l'aide d'une intégration par parties :

a) $\int_1^5 \ln(t) dt$

c) $\int_1^5 (\ln(t))^2 dt$

b) $\int_e^x \ln(t) dt$ avec $x > 0$

d) $\int_1^5 (\ln(t))^3 dt$

Doubles intégrations par parties

Calcul 28.6



Calculer à l'aide de deux intégrations par parties :

a) $\int_0^1 t^2 e^t dt$

b) $\int_1^e t^2 (\ln(t))^2 dt$

Calcul 28.7



Calculer à l'aide de deux intégrations par parties :

a) $\int_0^1 t^2 e^{2t+1} dt$

b) $\int_1^7 \frac{(\ln(t))^2}{t^3} dt$

Intégrales paramétrées

Calcul 28.8



Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$.

a) Calculer I_0

b) Trouver a et b tels que $\frac{t}{1+t} = a + \frac{b}{1+t}$

c) Calculer I_1

d) Exprimer $I_{n+1} + I_n$ en fonction de n

e) En déduire la valeur de I_3

Calculs plus avancés

Calcul 28.9 — Limite et intégrations par parties (I).



Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x t^3 e^{-\frac{t^2}{2\pi}} dt$

Calcul 28.10 — Limite et intégrations par parties (II).



Pour $n \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathbb{R}$, on pose $I(n, A) = \int_0^A t^n e^{-t} dt$. On admet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence de :

$$J(n) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A t^n e^{-t} dt.$$

a) Calculer $J(0)$

b) Exprimer $J(n+1)$ en fonction de $J(n)$

c) En déduire une expression de $J(n)$ en fonction de n

Réponses mélangées

$\frac{1}{98} \left(-(\ln 7)^2 - \ln 7 + 24 \right)$	$2\pi^2$	$\frac{1}{4}e^3 - \frac{1}{4}e$	$\frac{J(n+1)}{(n+1)J(n)}$	$\frac{2e^3 + 1}{9}$	$5 \ln(5)^2 - 10 \ln(5) + 8$
$n!$	$\frac{5 \ln(5)^3 - 15 \ln(5)^2 + 30 \ln(5) - 24}{6}$	$e^x(x-3)$	$(3x+5)(13-10x)$	$(e^x+2)^2$	$\frac{4x}{\sqrt{4x^2+3}}$
1	$\frac{5}{6} - \ln(2)$	$(x+1)e^x$	$\frac{e^2+1}{4}$	$5 \ln(5) - 4$	$\ln(x)$
$3 - 23e^{-10}$	$1 - \ln(2)$	$\frac{1}{n+1}$	$\ln(2)$	$\frac{e-2}{e}$	$\frac{5e}{3} - 2$
1	$e - 2$	$\frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$	$a = 1$ et $b = -1$	$\ln(x) + 1$	$\frac{5}{27}e^3 - \frac{2}{27}$
					$-\frac{6x^5}{(x^6+3)^2}$
					$\frac{e^x(x-1)}{x^2}$

► Réponses et corrigés page 237

Intégration par parties II

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 29.1 — Des logarithmes et des exponentielles.



Simplifier les expressions suivantes.

a) $\ln(\sqrt{e^5}) - 5 + \frac{1}{2}e^{\ln(5)} \dots$

c) $\frac{e \times (e^{-3})^2}{e^2 \times (e^{-1})^2} \dots$

b) $4\ln(2) - 2\ln(4) \dots$

d) $(e^{-6})^2 \times \sqrt{e^{24}} \dots$

Calcul 29.2 — Un peu de dérivation.



Calculer $f'(x)$ pour f définie par les expressions suivantes.

a) $f(x) = (x+1)x \dots$

c) $f(x) = \frac{1}{1-x} \dots$

b) $f(x) = \frac{1}{1+x^2} \dots$

d) $f(x) = \sqrt{1-x} \dots$

Avec une seule intégration par parties

Calcul 29.3 — Deux premières intégration par parties.



Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties.

a) $\int_1^2 \ln(x) dx \dots$

b) $\int_0^1 (x+1)e^{-x} dx \dots$

Calcul 29.4 — Avec un paramètre.



On considère un entier relatif a différent de -1 .

Calculer, par intégration par parties, $\int_1^4 x^a \ln(x) dx \dots$

Avec plusieurs intégrations par parties successives

Calcul 29.5



Calculer les intégrales suivantes à l'aide de plusieurs intégrations par parties successives.

a) $\int_2^0 (x^2 + 1)e^x dx \dots\dots\dots$ b) $\int_1^2 (x^2 - 2x + 1)e^{2x} dx \dots$

Calcul 29.6 — Un calcul d'intégrales classiques.



Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les intégrales

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n} dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^n} dx.$$

- a) Exprimer J_{n+1} en fonction de I_n et $I_{n+1} \dots\dots\dots$
- b) À l'aide d'une intégration par parties, exprimer I_n en fonction de J_{n+1} et de n .
 $\dots\dots\dots$
- c) En déduire une relation de récurrence entre I_n et $I_{n+1} \dots\dots\dots$
- d) Sachant que $I_1 = \frac{\pi}{4}$, calculer $I_3 \dots\dots\dots$
- e) Calculer $I_4 \dots\dots\dots$

Réponses mélangées

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{3\pi+8}{32} & I_{n+1} = \frac{1}{n2^{n+1}} + \frac{2n-1}{2n}I_n & 2 - \frac{3}{e} & \frac{1}{(a+1)^2} - \frac{4^{a+1}}{(a+1)^2} + \frac{4^{a+1}}{a+1} \ln(4) \\ \frac{e^4 - e^2}{4} & I_n = \frac{1}{2^n} + 2nJ_{n+1} & \frac{15\pi+44}{192} & J_{n+1} = I_n - I_{n+1} & e^{-5} & 0 & 1 \\ \frac{-2x}{(1+x^2)^2} & \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} & 2\ln(2) - 1 & 2x+1 & \frac{1}{(1-x)^2} & 3-3e^2 & 0 \end{array}$$

► Réponses et corrigés page 241

Cardinaux et coefficients binomiaux

Prérequis

Le cardinal d'un ensemble E est le nombre d'éléments de cet ensemble.
On le note $\text{Card}(E)$.

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 30.1 — Des fractions de fractions.



Écrire sous forme d'une fraction irréductible :

a) $\frac{\frac{2}{\frac{1}{5} - \frac{7}{15}}}{\dots}$

b) $\frac{\frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{6}}{\frac{3}{5} - \frac{1}{6}}}{\dots}$

c) $\frac{2 - \frac{3}{7}}{\frac{1}{5} + \frac{3}{7}} \dots$

Calcul 30.2



Écrire les expressions suivantes sous la forme $a\sqrt{b}$, avec a et b entiers et où b est le plus petit possible.

a) $\sqrt{32} \dots$

b) $\sqrt{45} \dots$

c) $\sqrt{1200} \dots$

d) $\sqrt{432} \dots$

Cardinal et opérations ensemblistes

Calcul 30.3 — Formule d'inclusion-exclusion pour deux ensembles.



Soient A et B deux ensembles finis. On rappelle que

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B).$$

Cette formule est appelée *formule d'inclusion-exclusion*.

a) On suppose que $\text{Card}(A) = 5$, $\text{Card}(B) = 10$ et $\text{Card}(A \cap B) = 2$.

Déterminer $\text{Card}(A \cup B)$

b) On suppose que $\text{Card}(A) = 7$, $\text{Card}(B) = 8$ et $\text{Card}(A \cup B) = 12$.

Déterminer $\text{Card}(A \cap B)$

c) On suppose que $\text{Card}(A) = 3$, $\text{Card}(A \cup B) = 8$ et $\text{Card}(A \cap B) = 2$.

Déterminer $\text{Card}(B)$

Calcul 30.4 — Des équations avec des cardinaux.



Soient A et B deux ensembles finis.

a) On suppose que $\text{Card}(B) = 2 \times \text{Card}(A)$, que $\text{Card}(A \cap B) = 4$ et que $\text{Card}(A \cup B) = 8$.

Combien vaut $\text{Card}(A)$?

b) On suppose que $\text{Card}(A) = 3$, que $\text{Card}(A \cup B) = 13$ et que $\text{Card}(A \cap B) = 1$.

Combien vaut $\text{Card}(B)$?

c) On suppose que $\text{Card}(A \cap B) = 2$, que $\text{Card}(A \cup B) = 9$ et $\text{Card}(A) = \text{Card}(B) - 5$.

Combien vaut $\text{Card}(B)$?

Factorielle et coefficients binomiaux

Calcul 30.5 — Des multiplications à foison.



On rappelle que la factorielle de n est définie par $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Donner les valeurs des factorielles suivantes.

a) $1! \dots$		c) $3! \dots$		e) $5! \dots$		g) $7! \dots$	
b) $2! \dots$		d) $4! \dots$		f) $6! \dots$		h) $0! \dots$	

Calcul 30.6 — Des simplifications à foison.



Calculer les expressions suivantes.

La réponse attendue est un entier ou une fraction irréductible.

a) $\frac{5!}{3!} \dots$		d) $\frac{3! \times 6!}{4! \times 5!} \dots$	
b) $\frac{101!}{99!} \dots$		e) $4! - 3! \dots$	
c) $\frac{7!}{3!^2} \dots$		f) $7! - 6! \dots$	

Calcul 30.7



Calculer les expressions suivantes.

La réponse attendue est une fraction irréductible.

a) $\frac{1}{5!} - \frac{1}{4!} \dots$		b) $\frac{3 \times 3!}{2^4} - \frac{5}{4!} \dots$		c) $\frac{7}{4!} - \frac{3 \times 3!^2}{6!} \dots$	
--	----------------------	---	----------------------	--	----------------------

Calcul 30.8 — Calcul littéral avec la factorielle (I).

On rappelle que les factorielles de deux entiers naturels consécutifs n et $n + 1$ sont reliées par la formule :

$$(n + 1)! = (n + 1) \times n!$$

Soit n un entier naturel non nul. Simplifier les expressions suivantes.

a) $\frac{(n+2)!}{(n-1)!} \dots\dots\dots$ b) $\frac{(2n+2)!}{(2n)!} \dots\dots\dots$ c) $\frac{(n^2-1)n!}{(n+2)!} \dots\dots\dots$

Calcul 30.9 — Calcul littéral avec la factorielle (II).

Soit n un entier naturel non nul. Simplifier les expressions suivantes.

a) $\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \dots\dots\dots$ b) $\frac{(n+1)!}{2^{2(n+1)}} - \frac{n!}{2^{2n}} \dots\dots\dots$

c) $\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n \times n!} \dots\dots\dots$

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{n!}{n^n}$. Simplifier $\frac{u_{n+1}}{u_n} \dots\dots\dots$

Calcul 30.10 — Calculs explicites de coefficients binomiaux.

Calculer les coefficients binomiaux suivants.

a) $\binom{4}{2} \dots\dots\dots$ c) $\binom{7}{3} \dots\dots\dots$ e) $\binom{45}{44} \dots\dots\dots$

b) $\binom{9}{8} \dots\dots\dots$ d) $\binom{125}{0} \dots\dots\dots$ f) $\binom{9}{3} \dots\dots\dots$

Calcul 30.11 — Calcul littéral avec le coefficient binomial.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. Simplifier les expressions suivantes.

a) $\binom{n}{1} + \binom{n}{3} \dots\dots\dots$ c) $\binom{n+1}{n} - \binom{n}{n-1} \dots\dots\dots$

b) $\binom{n}{2} + \binom{n}{3} \dots\dots\dots$ d) $\frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} \dots\dots\dots$

Dénombrement

Calcul 30.12 — Des fruits !

Une corbeille de fruits est composée de trois fruits. Pour la former, on dispose d'une pomme, d'une poire, d'une banane, d'un kiwi et d'une orange.

Combien y a-t-il de corbeilles possibles ?

Calcul 30.13 — Mains au poker.



On tire 5 cartes d'un jeu de 52 cartes ; on obtient ce que l'on appelle une main. On rappelle qu'un tel jeu est composé de 13 cartes de chacune des quatre couleurs (cœur, carreau, trèfle ou pique) et qu'il y a 3 figures (valet, dame et roi) pour chaque couleur.

Déterminer le nombre de mains vérifiant chacun des critères suivants.

On exprimera les réponses à l'aide de coefficients binomiaux, qu'on ne cherchera pas à calculer.

a) Cinq cartes quelconques

b) Cinq cartes d'une même couleur

c) Uniquement des figures

d) Deux piques, un cœur et deux carreaux

e) Exactement un trèfle

f) Au moins un valet

Indication : faire le lien avec les mains sans valet.

g) Au moins une dame et un neuf

Indication : faire le lien avec les mains sans dame et celles sans neuf.

h) Exactement deux rois et deux cœurs

Indication : on pourra distinguer les mains selon la présence ou non du roi de cœur.

Calcul 30.14 — Anagrammes (I).



On appelle *anagramme* d'un mot tout autre mot composé des mêmes lettres mais dans un ordre quelconque. Par exemple, le mot « MSCOIONIBNA » est une anagramme du mot « COMBINAISON ».

Combien les mots suivants ont-il d'anagrammes ?

On exprimera les réponses à l'aide de coefficients binomiaux, qu'on ne cherchera pas à calculer.

a) « MAISON »

b) « RADAR »

Calcul 30.15 — Anagrammes (II).



Combien les mots suivants ont-il d'anagrammes ?

a) « MISSISSIPPI »

b) « ABRACADABRA »

Calculs plus avancés

Calcul 30.16 — Formule d'inclusion-exclusion pour trois ensembles.



On rappelle que si A et B sont deux ensembles finis, alors on a

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B).$$

Soient A , B et C trois ensembles finis. Donner une formule analogue pour $\text{Card}(A \cup B \cup C)$

.....

Calcul 30.17 — Monotonie d'une suite.



Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = 2^{-2n} \binom{2n}{n}$.

a) Simplifier le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

b) La suite $((n+1)u_n^2)_{n \geq 0}$ est-elle : (a) croissante ? (b) décroissante ?

Calcul 30.18 — Produit d'entiers pairs consécutifs.



Soit n un entier naturel non nul. Expliciter le produit des entiers pairs consécutifs de 2 à $2n$ à l'aide d'une puissance de 2 et d'une factorielle.

$2 \times 4 \times \cdots \times (2n-2) \times 2n$

Calcul 30.19 — Produit d'entiers impairs consécutifs.



Soit n un entier naturel non nul. On note respectivement I le produit des entiers impairs consécutifs de 1 à $2n+1$ et P le produit des entiers pairs consécutifs de 2 à $2n$:

$$I = 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1) \times (2n+1) \quad \text{et} \quad P = 2 \times 4 \times \cdots \times (2n-2) \times 2n.$$

a) Exprimer le produit $I \times P$ à l'aide d'une factorielle

b) En déduire une expression du produit I

Calcul 30.20 — Une somme remarquable.



Soient n et p deux entiers naturels, et $(a_k)_{k \geq 0}$ une suite de réels.

a) Si $p \leq n$, expliciter la somme $\sum_{k=p}^n (a_k - a_{k+1})$ en fonction de a_{n+1} et a_p

b) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, simplifier la différence $\binom{p+k+1}{p+1} - \binom{p+k}{p+1}$

On pourra utiliser la formule de Pascal.

c) En déduire une simplification de la somme $\sum_{k=0}^n \binom{p+k}{p}$

Réponses mélangées

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 8 & 4 & \frac{5}{2} & \frac{15}{13} & 1 & \frac{2(2n+1)}{n+1} & \binom{11}{4} \binom{7}{4} \binom{3}{2} & 6 & \binom{5}{3} = 10 & & & \\
 \binom{13}{2} \binom{13}{1} \binom{13}{2} & \binom{p+n+1}{p+1} & \binom{p+k}{p} & 84 & \binom{12}{5} & \frac{17}{120} & 2^n n! & \left(\frac{n}{n+1}\right)^n & & & & \\
 (2n+1)! & \binom{5}{2} \binom{3}{2} = 30 & 20 & 3 & \textcircled{b} & 20\sqrt{3} & \frac{(2n+1)!}{2^n n!} & 1 & \frac{3}{2} & 10 & 100 & \\
 & & & & & & & & & & & \\
 \binom{n+1}{3} & \binom{52}{5} & 1 \times 3 \times 12 \binom{36}{2} & & & & & & & & & \\
 & & + \binom{3}{2} \binom{12}{2} \binom{36}{1} & & & & & & & & & \\
 \binom{52}{5} - 2 \binom{48}{5} & & & & & & & & & & & \\
 + \binom{44}{5} & & & & & & & & & & & \\
 \frac{n(n^2 - 3n + 8)}{6} & 7 & \binom{11}{5} \binom{6}{2} \binom{4}{2} \binom{2}{1} & 13 & 11 & 18 & n(n+1)(n+2) & 6 & & & & \\
 \frac{n}{(n+1)!} & \frac{n-1}{n+2} & 9 & 720 & 6! = 720 & \frac{(n-3)n!}{2^{2(n+1)}} & 140 & \binom{52}{5} - \binom{48}{5} & \frac{11}{12} & & & \\
 45 & 1 & -\frac{1}{30} & 120 & 4\sqrt{2} & 1 & \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} & 5\,040 & 35 & 24 & &
 \end{array}$$

► Réponses et corrigés page 243

Dénombrement I

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 31.1 — Des fractions.



Simplifier :

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{3}$

b) $\frac{5}{7} - \left(\frac{2}{21} + \frac{5}{14}\right)$

Calcul 31.2 — Un peu de factorielles (I).



On rappelle que la factorielle de n est définie par $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Calculer, en simplifiant autant que possible :

a) $\frac{10!}{8!}$

b) $\frac{10 \times 8 \times 6 \times 4}{5!}$

Calcul 31.3 — Un peu de factorielles (II).

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Simplifier :

a) $\frac{n!}{(n-2)!}$

c) $\frac{(n^2-1)n!}{(n+1)!}$

b) $\frac{(n-1)!}{(n+3)!}$

d) $\frac{(3!)^4 \times 4!}{2^7}$

Des dénombrements élémentaires

Calcul 31.4 — Une corbeille de fruits.



Une corbeille de fruits est composée de pommes et/ou d'oranges et comporte cinq fruits.

a) Déterminer le nombre de corbeilles possibles

b) Déterminer le nombre de corbeilles comportant au moins une orange

c) Déterminer le nombre de corbeilles comportant plus d'oranges que de pommes

Remarque

Dans cette fiche, pour les exercices de dénombrement, quand les réponses seront des expressions faisant intervenir des coefficients binomiaux, des puissances, des produits ou des factorielles, on ne cherchera pas à les calculer explicitement.

Par exemple, si la réponse est

$$15 \times 14 \times 13 \quad \text{ou} \quad 26^4 \quad \text{ou} \quad \binom{10}{6},$$

on la laissera telle quelle.

Calcul 31.5 — Peinture.

Une maison possède trois chambres. Son propriétaire dispose de quinze couleurs de peinture possibles. On souhaite peindre les trois chambres de trois couleurs différentes.

Déterminer le nombre de façons d'associer une couleur à chaque chambre

Calcul 31.6 — Un aérodrome.

Les aérodromes de loisir sont identifiés par un code à quatre lettres. La première lettre indique la région du monde et la deuxième le pays.

Combien peut-on identifier d'aérodromes :

a) Si toutes les lettres de l'alphabet peuvent être utilisées?

b) En Europe (la première lettre serait alors « E »)?

c) En France (la deuxième lettre doit être « F »)?

Calcul 31.7 — À l'hippodrome.

On organise une course de chevaux dans laquelle quinze chevaux participent. Déterminer :

a) Le nombre de tiercés dans l'ordre possibles

b) Le nombre de quintés dans l'ordre possibles

c) Le nombre de tiercés dans l'ordre dans lesquels le cheval « Étalon Noir » apparaît.

.....

d) Le nombre de quintés dans l'ordre dans lesquels le cheval « Étalon Noir » n'est pas présent.

.....

Calcul 31.8 — Une urne.

Une urne contient n boules. Elles sont rouges ou vertes, toutes de couleur unie et de même taille.

a) Déterminer le nombre d'urnes possibles

b) Déterminer le nombre d'urnes contenant au moins deux boules rouges

Calcul 31.9 — Un groupe d'amis.

Dans un ensemble de dix personnes dont trois garçons, on s'intéresse à un groupe d'amis comportant six personnes.

a) Déterminer le nombre de groupes possibles

b) Déterminer le nombre de groupes ne comportant pas de garçon.

.....

c) Déterminer le nombre de groupes comportant au moins un garçon.

.....

d) Déterminer le nombre de groupes comportant autant de garçons que de filles.

.....

Calcul 31.10 — Un jeu de lettres.

Au Scrabble, on a tiré sept lettres différentes. Un mot est une succession de lettres. On ne tiendra pas compte du sens des mots.

Déterminer le nombre de mots de quatre lettres que l'on peut former

Calcul 31.11 — Un week-end entre amis.

Un groupe de sept amis part en week-end. Déterminer le nombre de façons de choisir un responsable de la vaisselle, un responsable du rangement et un responsable du ménage.

a) Si aucun membre ne peut cumuler plusieurs fonctions

b) Si un même membre peut cumuler plusieurs fonctions

c) Si un même membre ne peut cumuler au plus que deux fonctions

Calcul 31.12 — Des codes.

Un cadenas est sécurisé par un code à quatre chiffres. Calculer le nombre de codes :

a) En tout

b) Avec des chiffres tous différents

c) Avec des chiffres pairs uniquement

d) Se terminant par le chiffre « 9 »

e) Avec des chiffres tous différents et rangés dans l'ordre croissant

Calcul 31.13 — Anagrammes.

On s'intéresse aux anagrammes du mot « FICHE », qu'elles aient un sens, ou non.

Combien d'anagrammes peut-on former :

a) En tout ?

b) Si l'on commence par les voyelles ?

c) Si le mot se termine par un « E » ?

d) Si l'on souhaite qu'il y ait alternance entre les voyelles et les consonnes ?

Calcul 31.14 — Organisation d'un dressing.

On dispose de cinq jeans différents qu'on veut ranger dans un meuble à trois tiroirs.

Déterminer le nombre de façon de ranger ces jeans :

a) En tout

b) De sorte que tous les jeans soient dans le même tiroir

c) De sorte qu'un seul tiroir soit vide

d) De sorte qu'aucun tiroir ne reste vide

Calcul 31.15 — Une association.

Douze personnes constituent une association et doivent choisir un bureau, composé d'un président, d'un trésorier et d'un secrétaire.

Déterminer le nombre de bureaux :

a) En tout

b) Sachant que Pierre et Jean ne veulent pas siéger ensemble

c) Ne contenant pas les deux personnes les plus jeunes du groupe ..

d) Contenant le doyen et la personne la plus jeune du groupe

Calcul 31.16 — Pour les amateurs de poker.

Le poker se joue avec un jeu de 52 cartes, composé des cartes de 2 à 10 puis valet, dame, roi et as dans les quatre couleurs (carreau, cœur, pique et trèfle).

Déterminer le nombre de mains de cinq cartes :

a) En tout

b) Contenant un carré (une même carte dans les quatre couleurs)

.....

c) Où toutes les cartes sont de la même couleur

d) Contenant au moins un roi

e) Contenant au plus un roi

f) Contenant trois rois et deux as

g) Contenant un full (deux cartes identiques et trois autres cartes identiques).

.....

Calculs plus avancés

Calcul 31.17



Soient p et n deux entiers naturels.

Déterminer le nombre de façons de ranger $p + n$ éléments en deux groupes de n éléments et p éléments respectivement.

.....

Calcul 31.18 — Deux limites.



Soit p un entier naturel.

a) Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{n}{p}}{\binom{n}{p+1}}$

b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{n}{p}}{2^n}$

Réponses mélangées

$$\begin{array}{cccccccc}
 n+1 & \frac{11}{42} & \binom{52}{5} - \binom{48}{5} & \frac{11}{30} & 3 & \frac{1}{(n+3)(n+2)(n+1)n} & 3 \times (2^5 - 2) \\
 4 \times \binom{13}{5} & 3^5 & \binom{3}{3} \times \binom{7}{3} & 7 \times 6 \times 5 \times 4 & 5! & 16 & \binom{n+p}{n} \\
 \binom{10}{6} - 7 & 90 & \binom{10}{6} & 7^3 & \binom{4}{3} \times \binom{4}{2} & 10 \times 9 \times 8 & 5 & 5^4 & 7 \\
 4! & 7 \times 6 \times 5 & 26^2 & 7^3 - 7 & 15 \times 14 \times 13 & 12 \times 11 \times 10 & 3 \times 14 \times 13 \\
 \binom{52}{5} & 3 & 0 & 3 \times 2 \times 10 & 10^4 & \binom{10}{4} & n-1 & 0 & 15 \times 14 \times 13 \\
 n-1 & 13 \times 48 & 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 & 13 \times 12 \times \binom{4}{3} \times \binom{4}{2} & 3 \times 2 \times 2 \\
 243 & \binom{48}{5} + 4 \times \binom{48}{4} & 26^3 & 10^3 & n(n-1) & \frac{12 \times 11 \times 10}{-3 \times 2 \times 10} \\
 10 \times 9 \times 8 \times 7 & 26^4 & 15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 & 2! \times 3! & 3^5 - 3 \times 2^5 + 3 & 6
 \end{array}$$

► Réponses et corrigés page 251

Dénombrement II

Remarque

Dans cette fiche, on ne simplifiera pas entièrement les résultats qui sont des valeurs numériques. Par exemple, on pourra laisser tels quels des résultats comme $20 \times 19 \times 18$.

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 32.1



Exprimer les nombres suivants sans utiliser ni coefficients binomiaux, ni factorielles.

On pourra écrire les coefficients binomiaux à l'aide de factorielles puis faire les simplifications nécessaires.

- a) $\binom{10}{3}$
- b) $\binom{n}{2}$ pour $n \geq 2$
- c) $\binom{n+2}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$
- d) $\binom{n+3}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}$

Calcul 32.2 — Quelques fractions.



Calculer :

- a) $\frac{\binom{10}{0}}{\binom{10}{1}}$
- b) $\frac{10!}{8!}$
- c) $\frac{5!}{7!}$
- d) $\frac{\binom{11}{5}}{\binom{10}{4}}$

Calcul 32.3 — Des simplifications.



Simplifier les factorielles suivantes.

- a) $\frac{(n+1)!}{(n+2)!}$
- b) $\frac{(n+1)!}{n!}$
- c) $\frac{((n+1)!)^2}{(n!)^2}$
- d) $\frac{(n+1)! \times (n+2)!}{n! \times (n+3)!}$

Pour commencer

Calcul 32.4 — Quelques propriétés des coefficients binomiaux.



a) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 4$. À quel réel est égal $\binom{n}{4}$?

Ⓐ $\binom{n}{n-4}$

Ⓑ $\binom{n-4}{4}$

Ⓒ $\binom{n+4}{4}$

Ⓓ $\binom{n+4}{n-4}$

.....

b) À quel réel est égal $\binom{21}{3} + \binom{21}{4}$?

Ⓐ $\binom{21}{4}$

Ⓑ $\binom{22}{3}$

Ⓒ $\binom{21}{3}$

Ⓓ $\binom{22}{4}$

.....

c) À quel réel est égal $\binom{n+2}{k+1} + \binom{n+2}{k}$?

Ⓐ $\binom{n+1}{k+1}$

Ⓑ $\binom{n+3}{k}$

Ⓒ $\binom{n+3}{k+1}$

Ⓓ $\binom{n+2}{k+1}$

.....

Dénombrements : cas pratiques

Calcul 32.5 — Dénombrements de tous les jours.



a) J'ai deux pantalons, trois chemises et quatre chapeaux.

De combien de façons différentes puis-je m'habiller ?

b) J'ai six chansons préférées.

De combien de façons puis-je les écouter les unes après les autres (une seule fois chaque) ?

.....

c) J'ai cinq pantalons différents et j'en choisis deux pour remplir ma valise.

De combien de façons puis-je la remplir ?

d) J'ai trois fléchettes (une rouge, une jaune et une verte), que je lance sur une cible possédant quatre secteurs différents. Combien de résultats différents puis-je obtenir (en supposant que je touche toujours l'un des secteurs) ?

.....

Calcul 32.6 — Codes secrets.

a) Mon antivol a cinq roues crantées, chacune déterminant un entier de 0 à 9.

Combien y a-t-il de codes possibles pour mon antivol ?

b) Mon digicode est un mot de trois lettres différentes, parmi les lettres A, B, C, D, E.

Combien y a-t-il de digicodes possibles ?

c) Un numéro de téléphone est composé de dix chiffres de 0 à 9.

Combien y a-t-il de numéros de téléphone commençant par « 06 » ?

Calcul 32.7 — Nombre de tiercés.

Une course de chevaux a lieu à Longchamp : vingt chevaux sont au départ.

a) Combien y a-t-il de tiercés dans l'ordre ?

(c'est-à-dire si l'ordre d'arrivée des trois premiers chevaux compte)

b) Combien y a-t-il de tiercés dans le désordre ?

(c'est-à-dire si l'ordre d'arrivée des trois premiers chevaux ne compte pas)

Calcul 32.8 — Choisir des fromages.

a) J'ai cinq fromages différents, je décide d'en prendre un.

De combien de façons puis-je remplir mon assiette ?

b) J'ai cinq fromages différents, je décide d'en prendre trois.

De combien de façons puis-je remplir mon assiette ?

c) J'ai cinq fromages différents, de combien de façons puis-je remplir mon assiette ?

(Éventuellement, en n'en prenant aucun)

Calcul 32.9 — Fromage et dessert.

J'ai cinq fromages différents et trois desserts différents.

a) Je décide de prendre un fromage et un dessert.

De combien de façons puis-je remplir mon assiette ?

b) Je décide de prendre trois fromages et un dessert.

De combien de façons puis-je remplir mon assiette ?

c) Je peux prendre ce que je veux (y compris rien).

De combien de façons puis-je remplir mon assiette ?

Calcul 32.10 — Anagrammes.



a) Combien d'anagrammes peut-on former avec le mot « LAPIN » ?

b) Combien d'anagrammes peut-on former avec le mot « CAROT₁T₂E » ?

Les deux « T » sont distincts car numérotés T₁ et T₂

c) Combien d'anagrammes peut-on former avec le mot « CAROTTE » ?

Les deux « T » sont identiques

Dénombrements : cas théoriques

Calcul 32.11 — Nombre de segments.



On considère n points $A_1, A_2, \dots, A_n$ deux à deux distincts.

Combien peut-on tracer de segments (non réduits à un point) dont les extrémités sont parmi ces points ?

.....

Calcul 32.12 — Nombre de diagonales.



On considère un polygone régulier à n sommets, c'est-à-dire un polygone dont tous les côtés et tous les angles sont égaux.

Combien ce polygone possède-t-il de diagonales ?

.....

Calculs plus avancés

Calcul 32.13 — Palindromes.



Un *palindrome* est un mot qui est identique s'il est lu de la gauche vers la droite ou de la droite vers la gauche. Par exemple, « RESSASSER » est un palindrome ; « LAPIN » n'en est pas un.

On considèrera que « Zzz » est un palindrome même s'il ne figure pas dans le dictionnaire.

a) Combien y a-t-il de palindromes de quatre lettres ?

b) Combien y a-t-il de palindromes de cinq lettres ?

Calcul 32.14 — Au poker.



a) Au poker, un *brelan* est une main de cinq cartes dont trois sont de même hauteur, et les deux autres différentes. Par exemple trois rois, un « 7 » et un « 2 » forment un brelan.

Avec un jeu de 52 cartes, combien de brelans peut-on former ?

.....

b) Au poker, une *double paire* est une main de cinq cartes composée de deux couples de cartes de même hauteur (mais distinctes) et d'une cinquième carte différente. Par exemple deux rois, deux « 10 » et un « 7 » forment une double paire.

Avec un jeu de 52 cartes, combien de doubles paires peut-on former ?

.....

Calcul 32.15 — Dénombrements de suites.



Quel est le nombre de suites strictement croissantes de p éléments à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$?

.....

Réponses mélangées

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 \frac{n+1}{n+3} & 64 & \frac{7!}{2} & 5 & 60 & \frac{1}{42} & 26^3 & \binom{13}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{4}{2} & \textcircled{d} \\
 & & & & & & & \times \binom{11}{1} \times \binom{4}{1} & \\
 720 & \frac{n(n-3)}{2} & 10 & 256 & \frac{1}{10} & 10 & \frac{1}{(n+2)} & \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6} \\
 7! & 10 \times 9 = 90 & \textcircled{c} & 10^5 & (n+1)^2 & \binom{20}{3} & \frac{11}{5} & 32 \\
 120 & 5! & 20 \times 19 \times 18 & \frac{n(n-1)}{2} & 24 & 26^2 & \binom{13}{1} \times \binom{4}{3} \times \binom{12}{2} \\
 & & & & & & \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{1} \\
 \textcircled{a} & 15 & \binom{n}{p} & n+1 & 10^8 & n+2 & 30 & \frac{n(n-1)}{2}
 \end{array}$$

► Réponses et corrigés page 256

Somme de v.a. - Concentration

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 33.1



Écrire sous forme d'un produit de puissances de nombres premiers les expressions suivantes.

a) $27^2 \times 12$ b) $\frac{49 \times 64}{14}$ c) $\frac{81 \times 51}{17}$

Calcul 33.2



Soit x un nombre réel. Factoriser les expressions suivantes.

a) $x^2 - 6x + 9$ b) $x^4 - 1$

Calculs d'espérances et de variances

Calcul 33.3



Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par

k	-2	-1	0	1	2
$P(X = k)$	1/10	1/5	1/2	1/10	1/10

Déterminer :

a) $P(X \leq 0)$ c) $E(X)$
 b) $P(X < 2)$ d) $V(X)$

Calcul 33.4



Soit $p > 0$. On considère X une variable aléatoire dont la loi est donnée par

k	$-3/2$	0	$5/2$
$P(X = k)$	1/4	1/2	p

Déterminer :

a) p b) $E(X)$ c) $V(X)$

Calcul 33.5

Soit $\alpha > 0$. On considère X une variable aléatoire dont la loi est donnée par

k	1	2	3	4
$P(X = k)$	α	2α	3α	4α

Déterminer :

- a) α b) $E(X)$ c) $V(X)$

Fonctions et sommes de variables aléatoires

Calcul 33.6

Soit X une variable aléatoire d'espérance 12 et de variance 4. On pose $Y = 3X + 4$. Déterminer :

- a) l'espérance de Y b) la variance de Y

Calcul 33.7

Soit X une variable aléatoire d'espérance 3 et de variance 5. On pose $Y = \frac{-X + 2}{5}$. Déterminer :

- a) l'espérance de Y b) la variance de Y

Calcul 33.8

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{4}{5}$. On pose $Y = 10X - 3$.

Déterminer :

- a) l'espérance de Y c) les valeurs prises par Y
 b) la variance de Y d) $P(Y = 7)$

Calcul 33.9



Soit X une variable aléatoire dont loi est donnée par

k	-5	10
$P(X = k)$	$2/3$	$1/3$

On pose $Y = \frac{X+5}{15}$. Déterminer :

a) l'ensemble des valeurs prises par Y

b) $P(Y = 0)$

Calcul 33.10 — Des lancers de dés.



Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère un dé équilibré dont les six faces sont numérotées de 1 à 6.

Le dé est lancé successivement n fois. On note $X_1, \dots, X_n$ les résultats des lancers successifs et indépendants.

a) Déterminer l'espérance de X_1

b) Déterminer la variance de X_1

On note $S_n = \sum_{k=1}^n X_k = X_1 + \dots + X_n$ la somme des n résultats obtenus.

c) Déterminer l'espérance de S_n

d) Déterminer la variance de S_n

Calcul 33.11



Soit X une variable aléatoire d'espérance 3 et de variance 5. On pose $Y = X^2$.

a) Exprimer $V(X)$ en fonction de $E(X^2)$ et de $E(X)$

b) En déduire $E(Y)$

Espérance, variance de lois binomiales

Calcul 33.12 — Propriétés de l'espérance.



Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $p \in [0, 1]$. Soit X une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Calculer les espérances suivantes.

a) $E(X)$

c) $E(3X + 1)$

b) $E(3X)$

d) $E(5X - 2)$

Calcul 33.13 — Propriétés de la variance.



Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $p \in [0, 1]$. Soit X une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Calculer les variances suivantes.

a) $V(X)$

c) $V(3X + 1)$

b) $V(3X)$

d) $V(5X - 2)$

Calcul 33.14 — Fréquence d'apparition.



On lance 100 fois un dé équilibré à six faces. On note respectivement X le nombre d'apparitions du « 1 » et Y la fréquence d'apparition du « 1 », c'est-à-dire $Y = \frac{X}{100}$.

a) Donner l'espérance de X

c) Donner la variance de X

b) Donner l'espérance de Y

d) Donner la variance de Y

Calcul 33.15 — Variable centrée réduite.



Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$. Soit X une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. On note

$$Y = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}.$$

a) Donner l'espérance de Y

b) Donner la variance de Y

Calculs plus avancés

Calcul 33.16



Soit X une variable aléatoires à valeurs dans $\{0, 1\}$.

Déterminer $E(X) - E(X^2)$

Calcul 33.17



Soit X une variable aléatoire réelle. On note

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto E((X - x)^2). \end{cases}$$

a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Développer l'expression $f(x)$ et l'écrire sous la forme d'un trinôme

b) Déterminer le point en lequel f atteint son minimum

c) Exprimer le minimum de f en fonction de $V(X)$

Calcul 33.18 — Une variable aléatoire centrée réduite.



Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $m \in \mathbb{R}$ et soit $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$.

On considère $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes d'espérance m et de variance σ^2 et on pose

$$S_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left(\left(\sum_{k=1}^n X_k \right) - n \times m \right).$$

a) Déterminer l'espérance de S_n

b) Déterminer la variance de S_n

Calcul 33.19 — Étude d'un sondage.



Lors d'un scrutin, des électeurs doivent choisir entre deux candidats A et B. Avant le vote, un institut de sondage appelle $n = 500$ personnes et leur demande leur intention de vote afin d'estimer la proportion inconnue p d'électeurs qui donneront leur voix au candidat A.

On note X le nombre de personnes interrogées lors du sondage qui voteront pour le candidat A. On admet que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

On rappelle l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : si Y est une variable aléatoire d'espérance μ et de variance V alors, pour tout réel $\delta > 0$, on a $P(|Y - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{\delta^2}$.

a) Soit $\delta > 0$. Donner un majorant de la probabilité $P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \delta\right)$.

.....

b) A-t-on $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$?

c) Soit $\alpha \in]0, 1[$. Donner une valeur de δ pour laquelle on a $P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \delta\right) \leq \alpha$.

.....

d) En déduire un intervalle I tel que $P(p \in I) \geq 1 - \alpha$.

Un tel intervalle est appelé intervalle de confiance pour p au niveau $1 - \alpha$.

.....

e) À l'issue du sondage, sur les 500 personnes interrogées, 220 personnes ont indiqué qu'elles voteront pour le candidat A.

Donner un intervalle de confiance pour p au niveau 95 %

Réponses mélangées

$\frac{4}{5}$	$x^2 - 2E(X)x + E(X^2)$	3^5	$\frac{7n}{2}$	$\frac{50}{3}$	$-\frac{1}{10}$	0	$np(1-p)$	$3np$
$\frac{p(1-p)}{n\delta^2}$	14	$9np(1-p)$	$\frac{9}{10}$	$\frac{125}{9}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{2\sqrt{n\alpha}}$	$\frac{33}{16}$	$V(X)$
$5np - 2$	1	$]0,34, 0,54[$	$3np + 1$	oui	$\frac{1}{720}$	$25np(1-p)$	$E(X^2) - E(X)^2$	
$E(X)$	40	1	1	$2^2 \times 3^7$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	np	16
3	$\frac{7}{2}$	$\frac{35}{12}$	$\frac{1}{5}$	$2^5 \times 7$	5	$(x-3)^2$	$\frac{35n}{12}$	$-\frac{1}{5}$
							$\frac{1}{4}$	-3 et 7
$\frac{1}{10}$	$\left[\frac{X}{n} - \frac{1}{2\sqrt{n\alpha}}, \frac{X}{n} + \frac{1}{2\sqrt{n\alpha}} \right]$		0 et 1	0	$9np(1-p)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{109}{100}$	36
								0

► Réponses et corrigés page 259

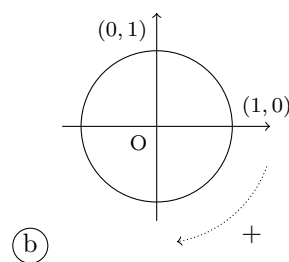
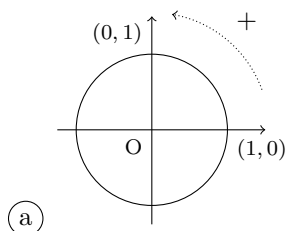
Fonctions trigonométriques

Révisions générales de trigonométrie

Entraînement 34.1 — Pour commencer.



Quel est le sens direct dans le cercle trigonométrique ?



.....

Calcul 34.2 — Degrés et radians.



a) Parmi les propositions suivantes, laquelle est vraie ?

(a) $\pi \text{ rad} = 1^\circ$

(b) $\pi \text{ rad} = 60^\circ$

(c) $\pi \text{ rad} = 180^\circ$

(d) $\pi \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$

.....

b) Parmi les propositions suivantes, laquelle est vraie ?

(a) $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$

(b) $1^\circ = \frac{\pi}{60} \text{ rad}$

(c) $1^\circ = \pi \text{ rad}$

(d) $1^\circ = 180\pi \text{ rad}$

.....

Calcul 34.3 — Angles remarquables.



Donner la valeur de :

a) $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

c) $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

b) $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

d) $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Calcul 34.4 — Angles associés.



Pour tout $x \in \mathbb{R}$, exprimer en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ les expressions suivantes.

- | | | | | | |
|-------------------------|----------------------|-------------------------|----------------------|--|----------------------|
| a) $\cos(-x)$ | <input type="text"/> | d) $\sin(\pi - x)$ | <input type="text"/> | g) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.. | <input type="text"/> |
| b) $\sin(-x)$ | <input type="text"/> | e) $\cos(\pi + x)$ | <input type="text"/> | h) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.. | <input type="text"/> |
| c) $\cos(\pi - x)$ | <input type="text"/> | f) $\sin(\pi + x)$ | <input type="text"/> | | |

Calcul 34.5 — Des inégalités.



Choisir les bonnes réponses.

Plusieurs bonnes réponses sont possibles.

a) Pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a

- ☐ (a) $\cos(x) \geq 0$
- ☐ (b) $\sin(x) \geq 0$
- ☐ (c) $\cos(x) \leq 0$
- ☐ (d) $\sin(x) \leq 0$

.....

b) Pour $x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, on a

- ☐ (a) $\cos(x) \geq 0$
- ☐ (b) $\sin(x) \geq 0$
- ☐ (c) $\cos(x) \leq 0$
- ☐ (d) $\sin(x) \leq 0$

.....

Calcul 34.6



Soit $x \in \mathbb{R}$. Parmi les expressions suivantes, laquelle est égale à $\cos^2(x)$?

- | | |
|--|--|
| ☐ (a) $\sqrt{1 - \sin^2(x)}$ | ☐ (c) $-1 + \sin^2(x)$ |
| ☐ (b) $1 + \sin^2(x)$ | ☐ (d) $1 - \sin^2(x)$ |

.....

Premiers calculs

Calcul 34.7



Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\cos(x) = \frac{\sqrt{3} - 1}{4}$.

a) A-t-on : ☐ (a) $\sin(x) \geq 0$ ou ☐ (b) $\sin(x) \leq 0$?

b) Calculer $\sin(x)$

Calcul 34.8



Soit $k \in \mathbb{Z}$.

a) Soit $x = \frac{45\pi}{4} + 2k\pi$. Pour quelle valeur de k a-t-on $0 < x < 2\pi$?

b) Soit $x = \frac{71\pi}{6} + 2k\pi$. Pour quelle valeur de k a-t-on $-\pi < x \leq \pi$?

Calcul 34.9



Dans chacun des cas suivants, déterminer la mesure principale (celle appartenant à l'intervalle $]-\pi, \pi]$) correspondant à la mesure donnée.

a) $\frac{152\pi}{5}$

b) $-\frac{75\pi}{4}$

c) $\frac{153\pi}{6}$

Calcul 34.10



Donner la valeur de :

a) $\cos\left(\frac{11\pi}{4}\right)$

d) $\sin\left(\frac{10\pi}{3}\right)$

b) $\sin\left(\frac{11\pi}{4}\right)$

e) $\cos\left(\frac{19\pi}{2}\right)$

c) $\cos\left(\frac{10\pi}{3}\right)$

f) $\sin\left(\frac{19\pi}{2}\right)$

Autour des fonctions cosinus et sinus

Calcul 34.11



Parmi les affirmations suivantes portant sur la fonction cosinus, laquelle est correcte ?

(a) Sa courbe est symétrique par rapport à l'axe (Oy) .

(b) Sa courbe est symétrique par rapport à l'axe (Ox) .

(c) Sa courbe est symétrique par rapport à l'origine.

.....

Calcul 34.12 — Croissante ou décroissante ?



Pour chacune des questions suivantes, choisir la réponse correcte.

a)

(a) La fonction sinus est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

(b) La fonction sinus est décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

.....

b)

(a) La fonction sinus est croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$

(b) La fonction sinus est décroissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$

.....

c)

(a) La fonction $x \mapsto \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ est croissante sur $[0, \pi]$

(b) La fonction $x \mapsto \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ est croissante sur $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$

.....

Calcul 34.13 — Paire ou impaire ?



Pour chacune des fonctions f suivantes, choisir la réponse correcte parmi ces trois propositions :

(a) f est paire

(c) f n'est ni paire ni impaire

(b) f est impaire

a) $f : x \mapsto \sin(2x)$

c) $f : x \mapsto 4 \cos(x) \sin(x)$

b) $x \mapsto 5 - 2 \cos(x)$

d) $f : x \mapsto x^2 \cos(x)$

Calcul 34.14 — Des périodes.



« Vrai » ou « faux » ?

a) La fonction $x \mapsto \cos(x)$ est 4π -périodique

b) La fonction $x \mapsto \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ est 2π -périodique

c) La fonction $x \mapsto 3 \sin(2\pi x)$ est 1-périodique

d) La fonction $x \mapsto 4 \cos(4x) - 1$ est $\frac{\pi}{2}$ -périodique

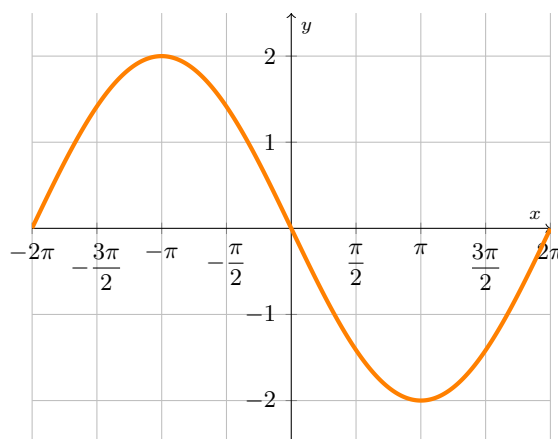
Calcul 34.15 — Deux courbes.



a) Quelle est la fonction représentée par la courbe ci-contre ?

- (a) $x \mapsto \sin\left(\frac{x}{2}\right)$
- (b) $x \mapsto -2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)$
- (c) $x \mapsto 2 \cos(x)$
- (d) $x \mapsto \sin(2x)$

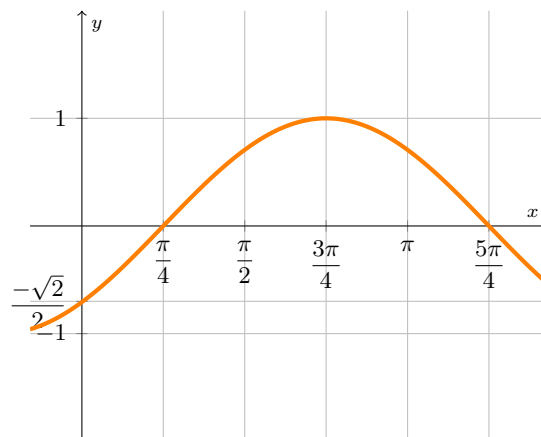
.....



b) Quelle est la fonction représentée par la courbe ci-contre ?

- (a) $x \mapsto \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$
- (b) $x \mapsto \cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$
- (c) $x \mapsto \sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$
- (d) $x \mapsto \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

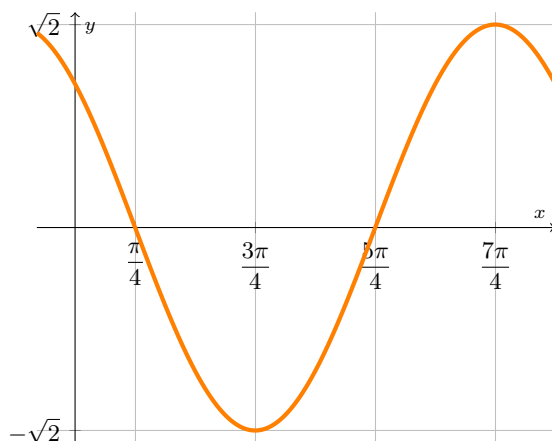
.....



Calcul 34.16 — Deux autres courbes.



a) Quelle est la fonction représentée par cette courbe ?



(a) $x \mapsto -\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

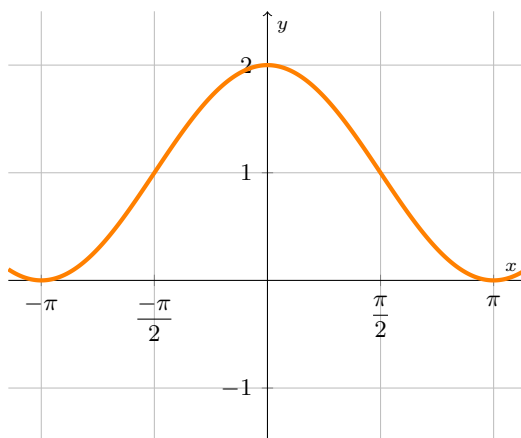
(b) $x \mapsto \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

(c) $x \mapsto \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$

(d) $x \mapsto \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

.....

b) Quelle est la fonction représentée par cette courbe ?



(a) $x \mapsto 1 + \cos(x)$

(b) $x \mapsto 2 - \sin(x)$

(c) $x \mapsto 2 \cos(x)$

(d) $x \mapsto 1 + \cos^2(x)$

.....

Équations et inéquations trigonométriques

Calcul 34.17



Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ les équations suivantes.

a) $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$

b) $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\cos(x) = \frac{1}{2}$

Calcul 34.18



Résoudre dans $[0, 2\pi[$ les équations suivantes.

a) $\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $-\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

c) $\cos(3x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Calcul 34.19



Résoudre dans $[0, 2\pi[$ les équations suivantes.

a) $\sin(x) = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)$

b) $\sin^2(x) = \frac{1}{2}$

c) $2\cos^2(x) + \cos(x) - 1 = 0$

Calcul 34.20



Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ les inéquations suivantes.

a) $\cos(x) \geq \frac{1}{2}$

c) $|\cos(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\sin(x) < -\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$...

Calculs plus avancés

Calcul 34.21 — Tangente.



Pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on pose $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

- a) Calculer $\tan(0)$
- c) Calculer $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$
- b) Calculer $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$
- d) Calculer $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$
- e) Pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, exprimer $1 + \tan^2(x)$ en fonction de $\cos(x)$

Réponses mélangées

$\cos(x)$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\sin(x)$ (a) (c) et (d) $-\cos(x)$ $\left\{-\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{5}\right\}$ $\sin(x)$ $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$
 $\frac{1}{\cos^2(x)}$ (a) $]-\pi, -\frac{3\pi}{4}] \cup \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$ $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$ (a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (c) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 0
 faux (d) (a) (a) et (b) $-\frac{3\pi}{4}$ $\sqrt{3}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\left\{\frac{\pi}{18}, \frac{11\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}, \frac{23\pi}{18}, \frac{25\pi}{18}, \frac{35\pi}{18}\right\}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 $\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$ $\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$ (b) (a) $\left\{-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right\}$ -5 $\left\{\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}\right\}$ vrai
 $\frac{2\pi}{5}$ (a) vrai $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) -6 $]-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}[$ $\cos(x)$ $\frac{1}{2}$ vrai $\frac{\sqrt{3}}{3}$
 (b) $\sqrt{\frac{6+\sqrt{3}}{8}}$ $\left\{\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$ (a) 0 (b) (b) $-\frac{\pi}{2}$ (a) $\left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$
 (a) 1 -1 $-\sin(x)$ $-\cos(x)$ $-\sin(x)$ $\left[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ (a) $-\frac{1}{2}$

► Réponses et corrigés page 264

Dérivation des fonctions trigonométriques

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 35.1



Développer les expressions suivantes.

a) $(x+y)(x^2-xy+y^2) \dots$ b) $\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x+1}\right) \dots$

c) $(x-1)(x^2-1)(x^3-1) \dots$

Calcul 35.2



Factoriser les expressions suivantes.

a) $7a^2b - 4ab^2 \dots$ b) $a + 1 + b + ab \dots$

Calcul 35.3



Donner l'ensemble des solutions des équations suivantes.

a) $|x+2| = 7 \dots$ b) $|x+2| = |x-7| \dots$

Calculs de dérivées

Calcul 35.4



Dans chacun des cas suivants, donner la réponse correcte.

a) Soit $f : x \mapsto \sin(x) + \cos(x)$. Alors, on a $f'(x) =$

(a) $2 \cos(x)$ (b) $2 \sin(x)$ (c) $\sin(x) - \cos(x)$ (d) $\cos(x) - \sin(x)$

.....

b) Soit $f : x \mapsto x \sin(x)$. Alors, on a $f'(x) =$

(a) $\sin(x) - x \cos(x)$ (b) $x \sin(x) - \cos(x)$ (c) $\sin(x) + x \cos(x)$ (d) $x \sin(x) + \cos(x)$

.....

Calcul 35.5



Dans chacun des cas suivants, donner la réponse correcte.

a) Soit $f : x \mapsto x^2 \cos(x)$. Alors, on a $f'(x) =$

(a) $2x \cos(x) - x^2 \sin(x)$

(c) $2x \sin(x) - x^2 \cos(x)$

(b) $2x \cos(x) + x^2 \sin(x)$

(d) $2x \sin(x) + x^2 \cos(x)$

b) Soit $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$. Alors, on a $f'(x) =$

(a) $\frac{x \cos(x) + \sin(x)}{x^2}$

(b) $\frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^2}$

(c) $\frac{x \sin(x) + \cos(x)}{x^2}$

(d) $\frac{x \sin(x) - \cos(x)}{x^2}$

Calcul 35.6



Déterminer l'expression de la dérivée de chacune des fonctions suivantes.

a) $f : x \mapsto e^x \cos(x)$

c) $f : x \mapsto \cos(x^2)$

b) $f : x \mapsto \cos(-5x + 3)$...

Calcul 35.7



Sans tenir compte du domaine de définition, déterminer l'expression de la dérivée de chacune des fonctions suivantes.

a) $f : x \mapsto e^{\sin(x)} + \cos(x)$

b) $f : x \mapsto 2\sqrt{\sin(x)} - 2\sqrt{\cos(x)}$

c) $f : x \mapsto (1 + 3 \sin(2x))^4$

Calcul 35.8



Sans tenir compte du domaine de définition, déterminer l'expression de la dérivée de chacune des fonctions suivantes.

a) $f : x \mapsto \sin(\sqrt{x^2 + 5})$

b) $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos^2(3x)}$

c) $f : x \mapsto x^3 \sqrt{\sin(x)}$

Autres calculs

Calcul 35.9



On considère la fonction $f : x \mapsto e^{-x} \sin(x)$. Calculer $f''(x) + 2f'(x) + 2f(x)$

Calcul 35.10



On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $f : x \mapsto x \sin(x)$. Calculer $xf(x) - 2f'(x) + xf''(x)$

Calcul 35.11 — Des limites.



En utilisant la définition du nombre dérivé, déterminer les limites suivantes.

a) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x) - \sin(a)}{x - a}$ où a est un réel

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$

c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(2x - \frac{2\pi}{3})}{x - \frac{\pi}{3}}$

Calculs plus avancés

Calcul 35.12 — Une fonction mystérieuse.



On désigne par g la fonction définie sur $] -1, 1[$ par

$$g(0) = 0 \quad \text{et} \quad g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

pour tout $x \in] -1, 1[$. On ne cherchera pas à expliciter $g(x)$.

On considère alors la fonction composée h , définie sur $] -\pi, 0[$ par $h(x) = g(\cos(x))$.

a) Pour tout réel x de $] -\pi, 0[$, calculer $h'(x)$

b) Calculer $h\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

c) Donner l'expression de $h(x)$

Calcul 35.13 — Dérivée de la tangente.



La fonction tangente est définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Calculer une expression de la dérivée de la fonction tangente

Calcul 35.14 — Autour de la tangente.



Sans tenir compte du domaine de définition, déterminer l'expression de la dérivée de chacune des fonctions suivantes.

a) $f : x \mapsto \tan(3x) + 2 \tan(x)$

b) $f : x \mapsto 2 \tan^2(x)$

c) $f : x \mapsto 8\sqrt{\tan(3x)} + \frac{4}{\sin^2(\sqrt{x})}$

Réponses mélangées

$$\begin{array}{ccccccc}
 ab(7a - 4b) & x^6 - x^5 - x^4 + x^2 + x - 1 & \frac{\cos(x) \cos(3x) + 6 \sin(x) \sin(3x)}{\cos^3(3x)} & & & & \\
 -2x \sin(x^2) & 24 \cos(2x)(1 + 3 \sin(2x))^3 & \textcircled{b} & 2 & 0 & \cos(a) & \frac{1}{\cos^2(x)} \\
 \frac{12}{\cos^2(3x)\sqrt{\tan(3x)}} - \frac{4 \cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x} \sin^3(\sqrt{x})} & \{-9, 5\} & x + \frac{\pi}{2} & \textcircled{c} & \textcircled{d} & e^x(\cos(x) - \sin(x)) & \\
 x - 1 & 1 & 5 \sin(-5x + 3) & \frac{x \cos(\sqrt{x^2 + 5})}{\sqrt{x^2 + 5}} & \textcircled{a} & (1 + a)(1 + b) & \\
 \frac{3}{\cos^2(3x)} + \frac{2}{\cos^2(x)} & x^3 + y^3 & \frac{4 \tan(x)}{\cos^2(x)} & 1 & \cos(x)e^{\sin(x)} - \sin(x) & & \\
 0 & \left\{\frac{5}{2}\right\} & \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}} + \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}} & -2 \sin(x) & 3x^2 \sqrt{\sin(x)} + \frac{x^3 \cos(x)}{2 \sqrt{\sin(x)}} & &
 \end{array}$$

► Réponses et corrigés page 269

Intégration des fonctions trigonométriques

Premières intégrales

Calcul 36.1 — Pour commencer.



Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_0^{\pi} \sin(t) dt$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \cos(t) dt$

c) $\int_0^{\pi} (\cos(t) - \sin(t)) dt$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 \sin(t) + 5 \cos(t)) dt$

Calcul 36.2 — Avec des bornes plus compliquées.



Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_0^{2\pi} \sin(t) dt$

c) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin(t) dt$

b) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) dt$

d) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{2\pi + \frac{\pi}{3}} \sin(t) dt$

Calcul 36.3 — Composition avec des fonctions affines.



Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(3t) dt$

b) $\int_{-\frac{1}{6}}^1 \cos\left(3\pi t + \frac{\pi}{2}\right) dt$

Secondes intégrales

Calcul 36.4 — Reconnaître la dérivée d'une composée .



Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} 2t \cos(t^2) dt$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(t) \cos(t) dt$

Calcul 36.5 — Une formule générale.



Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Combien vaut $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin^n(t) dt$?

(a) n

(b) $n + 1$

(c) $n - 1$

(d) $\frac{1}{n}$

(e) $\frac{1}{n + 1}$

(f) $\frac{1}{n - 1}$

.....

Calcul 36.6 — À l'aide d'une intégration par parties (I).



Calculer les intégrales suivantes. On pourra intégrer par parties.

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos(t) dt$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos(t) dt$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin(t) dt$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (t^2 + t + 1) \sin(t) dt$

Calcul 36.7 — À l'aide d'une intégration par parties (II).



Calculer les intégrales suivantes. On pourra intégrer par parties.

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \cos(t) dt$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t} \sin(t) dt$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \sin(t) dt$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{-2t} \sin(3t) dt$

Réponses mélangées

$\sqrt{2}$	$\frac{\pi^2}{4} - 2$	$\frac{e^{\frac{\pi}{2}} + 1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1 + 2e^\pi}{5}$	$\frac{1}{4}$	2	-2	8	$-\frac{1}{3\pi}$	π
$\frac{\pi - 2}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{2}$	$\frac{\sqrt{3} - 1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{3 - 2e^{-\frac{\pi}{3}}}{13}$	0	(e)	

► Réponses et corrigés page 272

Réponses et corrigés

Fiche n° 1. Généralités sur les suites

Réponses

1.1 a).....	3^{20}	1.7 a).....	$4n^2 - 2n$	1.12 c).....	27
1.1 b).....	-3^2	1.7 b).....	$n^2 + n$	1.12 d).....	729
1.1 c).....	-6^4	1.7 c).....	$4n^2 + 2n$	1.13 a).....	1
1.2 a).....	$\frac{4x+5}{6}$	1.8 a).....	$\frac{1}{2n}$	1.13 b).....	2
1.2 b).....	$\frac{5x}{6}$	1.8 b).....	$\frac{-1}{2n+1}$	1.13 c).....	3
1.2 c).....	$\frac{3x+2}{5}$	1.8 c).....	$\frac{1}{4n}$	1.13 d).....	4
1.3 a).....	$9x^2 + 6x + 1$	1.8 d).....	$\frac{1}{2n+2}$	1.14 a).....	$\frac{1}{2}$
1.3 b).....	$16x^2 - 24x + 9$	1.9 a).....	7	1.14 b).....	$\frac{3}{4}$
1.4 a).....	1	1.9 b).....	15	1.14 c).....	$\frac{15}{8}$
1.4 b).....	6	1.9 c).....	31	1.14 d).....	$\frac{105}{16}$
1.4 c).....	13	1.9 d).....	63	1.15 a).....	$2a + 1$
1.4 d).....	22	1.10 a).....	0	1.15 b).....	$4a + 3$
1.5 a).....	-1	1.10 b).....	-1	1.15 c).....	$8a + 7$
1.5 b).....	$\frac{3}{2}$	1.10 c).....	0	1.15 d).....	$16a + 15$
1.5 c).....	$\frac{7}{3}$	1.10 d).....	-1	1.16 a).....	1
1.5 d).....	$\frac{11}{4}$	1.11 a).....	2	1.16 b).....	a
1.6 a).....	$2n + 1$	1.11 b).....	6	1.16 c).....	a^3
1.6 b).....	$2n - 3$	1.11 c).....	24	1.16 d).....	a^6
1.6 c).....	$4n - 1$	1.11 d).....	120	1.17.....	$\frac{13}{36}$
1.6 d).....	$2n$	1.12 a).....	1	1.18 a).....	10
		1.12 b).....	3	1.18 b).....	8

Corrigés

1.6 a) On a $u_{n+1} = 2(n+1) - 1 = 2n + 2 - 1 = 2n + 1$.

1.6 b) On a $u_{n-1} = 2(n-1) - 1 = 2n - 2 - 1 = 2n - 3$.

1.6 c) On a $u_{2n} = 2(2n) - 1 = 4n - 1$.

1.6 d) On a $u_n + 1 = 2n - 1 + 1 = 2n$.

1.11 a) On a $u_1 = u_{0+1} = (0 + 2)u_0 = 2 \times 1 = 2$.

1.11 b) On a $u_2 = u_{1+1} = (1 + 2)u_1 = 3 \times 2 = 6$.

1.11 c) On a $u_3 = u_{2+1} = (2 + 2)u_2 = 4 \times 6 = 24$.

1.11 d) On a $u_4 = u_{3+1} = (3 + 2)u_3 = 5 \times 24 = 120$.

1.16 a) On a $w_1 = a^0 \times w_0$, d'où $w_1 = 1 \times 1$. Ainsi $w_1 = 1$.

1.16 b) On a $w_2 = a^1 \times w_1$, d'où $w_2 = a \times 1$. Ainsi $w_2 = a$.

1.16 c) On a $w_3 = a^2 \times w_2$, d'où $w_3 = a^2 \times a$. Ainsi $w_3 = a^3$.

1.16 d) On a $w_4 = a^3 \times w_3$, d'où $w_4 = a^3 \times a^3$. Ainsi $w_4 = a^6$.

1.17 On trouve $u_2 = \frac{1}{2}$, $u_3 = \frac{1}{3}$ et $u_4 = \frac{1}{4}$. La moyenne de u_2 , u_3 et u_4 est : $\frac{u_2 + u_3 + u_4}{3} = \frac{13}{36}$.

1.18 a) On résout l'équation $-6n + 64 = 4$ et on trouve $n = 10$.

1.18 b) Résolvons l'équation $\frac{n^2 - 20}{n + 3} = 4$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{n^2 - 20}{n + 3} = 4 &\iff n^2 - 20 = 4(n + 3) \\ &\iff n^2 - 20 = 4n + 12 \\ &\iff n^2 - 4n - 32 = 0.\end{aligned}$$

On reconnaît une équation du second degré de discriminant 144. Les racines de $X^2 - 4X - 32$ sont -4 et 8 .

Le nombre n étant un entier naturel, on ne garde que la racine positive. C'est-à-dire $n = 8$.

Fiche n° 2. Suites arithmétiques

Réponses

2.1 a)	$\frac{7}{6}$	2.4 a)	10	2.8 a)	$-\frac{16}{5}$
2.1 b)	$-\frac{1}{15}$	2.4 b)	14	2.8 b)	$\frac{83}{5}$
2.1 c)	$\frac{16}{7}$	2.4 c)	18	2.8 c)	$\frac{3}{5}$
2.1 d)	$\frac{12}{7}$	2.4 d)	406	2.8 d)	$\frac{163}{5}$
2.2 a)	9	2.5 a)	-2	2.9 a)	$\frac{5}{54}$
2.2 b)	$-\frac{55}{6}$	2.5 b)	1	2.9 b)	$\frac{37}{54}$
2.2 c)	$\frac{8}{11}$	2.5 c)	4	2.10 a)	11a
2.3 a)	$\left\{ \frac{1}{3} - \sqrt{2}, \frac{1}{3} + \sqrt{2} \right\}$	2.5 d)	292	2.10 b)	$(n+1)a$
2.3 b)	$\left\{ -\frac{3}{4}, \frac{5}{4} \right\}$	2.6 a)	$\frac{4}{3}$	2.11 a)	$\frac{1}{a}$
2.3 c)	{3}	2.6 b)	$-\frac{2}{3}$	2.11 b)	a
2.3 d)	$\left\{ -\frac{1}{2} \right\}$	2.6 c)	$-\frac{8}{3}$	2.12	$\frac{4}{5}$
		2.6 d)	$-\frac{44}{3}$	2.13 a)	3
		2.7 a)	-4	2.13 b)	1 + 3n
		2.7 b)	53		
		2.7 c)	296		
		2.7 d)	596		

Corrigés

2.3 a) On a $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = 2 \iff \left(x - \frac{1}{3}\right) = \pm\sqrt{2}$.

2.3 c) On a $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$. Ainsi, on a $x^2 - 6x + 9 = 0 \iff x = 3$.

2.3 d) On a $(x - 1)^2 = (x + 2)^2 \iff x^2 - 2x + 1 = x^2 + 4x + 4 \iff -6x = 3 \iff x = -\frac{1}{2}$.

2.8 a) On sait que $u_n = u_p + (n - p) \times r$. Donc $u_8 = u_3 + 5r$. D'où $5r = u_8 - u_3$. Ainsi $r = \frac{1}{5}(u_8 - u_3) = -\frac{16}{5}$.

2.9 a) On a $u_{13} - u_7 = (13 - 7)r$. D'où $r = \frac{u_{13} - u_7}{6} = \frac{\frac{17}{9} - \frac{4}{3}}{6} = \frac{\frac{17}{9} - \frac{12}{9}}{6} = \frac{\frac{5}{9}}{6} = \frac{5}{54}$.

2.9 b) On a $u_7 = u_0 + 7r$. D'où $u_0 = u_7 - 7r = \frac{4}{3} - 7 \times \frac{5}{54} = \frac{4 \times 18}{3 \times 18} - \frac{35}{54} = \frac{72}{18} - \frac{35}{54} = \frac{37}{54}$.

2.10 a) On a $u_{10} = u_0 + 10 \times a = a + 10a = 11a$.

2.10 b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_n = a + n \times a = (n+1)a$.

2.11 a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_{n+1} - u_n = \frac{a^2 + (n+1-1)}{a} - \frac{a^2 + (n-1)}{a} = \frac{a^2 + n - a^2 - n + 1}{a} = \frac{1}{a}$.

2.11 b) On a $u_1 = \frac{a^2 + (1-1)}{a} = \frac{a^2}{a} = a$.

2.12 Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_{n+1} - u_n = \frac{3 + 5a(n+1)}{2} - \frac{3 + 5an}{2} = \frac{5a}{2}$. De plus, $\frac{5a}{2} = 2 \iff 5a = 4 \iff a = \frac{4}{5}$.

2.13 a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $v_{n+1} - v_n = u_{n+1}^2 - u_n^2 = 3 + u_n^2 - u_n^2 = 3$. Ainsi, $(v_n)_n$ est arithmétique de raison 3.

2.13 b) On a $v_0 = u_0^2 = 1$. Donc, pour tout entier n , on a $v_n = 1 + 3n$.

Fiche n° 3. Suites géométriques

Réponses

3.1 a) $4x^2 - 12x + 9$

3.1 b) $49 - 64x^2$

3.1 c) $-15x^2 + 48x - 36$

3.1 d) $5x^2 - 5x + 2$

3.2 a) $(2x - 7)(2x + 7)$

3.2 b) $3(1 - 3x)(3 - x)$

3.2 c) $-3x\left(\frac{x}{2} + 2\right)$

3.2 d) $\left(\frac{2x}{3} - \frac{5}{2}\right)\left(\frac{2x}{3} + \frac{5}{2}\right)$

3.2 e) $(11x - 5)^2$

3.2 f) $(3x - 7)(5x + 2)$

3.3 a) $-\frac{9}{40}$

3.3 b) $\frac{\sqrt{2} - 3}{5}$

3.4 a) 20

3.4 b) 26

3.5 a) 48

3.5 b) 192

3.6 a) $-\sqrt{3}^{n-1}$

3.6 b) -3^{61}

3.7 a) $16 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-6}$

3.7 b) 3^4

3.8 a) 3

3.8 b) $\frac{\sqrt{2}}{27}$

3.9 a) $4 \text{ ou } -4$

3.9 b) $\frac{3}{64}$

3.10 a) $\frac{4}{5}$

3.10 b) $-\frac{4}{5} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{41}$

3.11 a) $-\sqrt{2}$

3.11 b) $-\frac{5}{8}$

3.11 c) $-5 \times 2^{n-3}$

3.11 d) $\frac{(-1)^{n+1} \times 5}{\times 2^{n-3} \times \sqrt{2}^n}$

Corrigés

3.1 a) On a $(2x - 3)^2 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 3 + 3^2 = 4x^2 - 12x + 9$.

3.1 b) On a $(7 - 8x)(8x + 7) = (7 - 8x)(7 + 8x) = 7^2 - (8x)^2 = 49 - 64x^2$.

3.1 c) On a $-3(-x + 2)(6 - 5x) = (3x - 6)(6 - 5x) = 3x \times 6 - 3x \times 5x - 6 \times 6 + 6 \times 5x$
 $= 18x - 15x^2 - 36 + 30x = -15x^2 + 48x - 36$.

3.1 d) On a $5\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 5\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4} = 5x^2 - 5x + \frac{5}{4} + \frac{3}{4} = 5x^2 - 5x + 2$.

3.2 a) On a $4x^2 - 49 = (2x)^2 - 7^2 = (2x - 7)(2x + 7)$.

3.2 b) On a $(5 - 3x)^2 - 16 = (5 - 3x)^2 - 4^2 = (5 - 3x - 4)(5 - 3x + 4) = (1 - 3x)(9 - 3x) = 3(1 - 3x)(3 - x)$.

3.2 c) On a $-\frac{3}{2}x^2 - 6x = -3x \times \frac{x}{2} - 3x \times 2 = -3x\left(\frac{x}{2} + 2\right)$.

3.2 d) On a $\frac{4}{9}x^2 - \frac{25}{4} = \left(\frac{2x}{3}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{2x}{3} - \frac{5}{2}\right)\left(\frac{2x}{3} + \frac{5}{2}\right)$.

3.2 e) On a $121x^2 - 110x + 25 = (11x)^2 - 2 \times 11x \times 5 + 5^2 = (11x - 5)^2$.

3.2 f) On a $(3x - 7)(x + 5) - (3x - 7)(-4x + 3) = (3x - 7)((x + 5) - (-4x + 3)) = (3x - 7)(5x + 2)$.

3.3 a) On a $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\frac{3}{4}}{2} - \frac{3}{5} = \frac{3}{8} - \frac{3}{5} = \frac{15}{40} - \frac{24}{40} = -\frac{9}{40}$.

3.3 b) On a $f\left(\frac{2\sqrt{2}}{5}\right) = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{5}}{2} - \frac{3}{5} = \frac{\sqrt{2}}{5} - \frac{3}{5} = \frac{\sqrt{2} - 3}{5}$.

3.4 a) On a les équivalences suivantes :

$$-\frac{1}{4}x + 5 = 0 \iff \frac{1}{4}x = 5 \iff x = 5 \times 4 = 20.$$

L'antécédent de 0 par la fonction f est 20.

3.4 b) On a les équivalences suivantes :

$$-\frac{1}{4}x + 5 = -\frac{3}{2} \iff \frac{1}{4}x = 5 + \frac{3}{2} \iff x = \frac{13}{2} \times 4 = 26.$$

L'antécédent de $-\frac{3}{2}$ par la fonction f est 26.

3.5 a) On a $u_4 = u_0 \times q^4 = 3 \times 2^4 = 48$.

3.5 b) On a $u_6 = u_0 \times q^6 = 3 \times 2^6 = 192$.

3.6 a) On a $u_n = -\frac{1}{\sqrt{3}} \times \sqrt{3}^n = -\sqrt{3}^{n-1}$.

3.6 b) On a $u_{123} = u_0 \times q^{123}$. Donc, $u_{123} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \times \sqrt{3}^{123} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}^{122}$. Donc, $u_{123} = -3^{61}$.

3.7 a) On a $u_n = u_6 \times q^{n-6} = 16 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-6}$.

3.7 b) On a $u_{10} = 16 \times \left(\frac{3}{2}\right)^4 = 3^4$.

3.8 a) On a $u_6 = u_3 \times q^3$ donc $q^3 = \frac{u_6}{u_3} = 27$ donc $q = 3$.

3.8 b) On a $u_0 = u_3 \times q^{-3} = 3^{-3} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{3^3} = \frac{\sqrt{2}}{27}$.

3.9 a) On a $q^2 = \frac{u_4}{u_2} = \frac{12}{\frac{3}{4}} = 16$ donc $q = 4$ ou $q = -4$.

3.9 b) On a $u_0 = u_2 \times q^{-2}$. Donc, on a $u_0 = \frac{3}{4^3} = \frac{3}{64}$.

3.10 a) Supposons la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ géométrique. On a $u_{42}^2 = u_{41} \times u_{43}$. En effet, si on note q la raison de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a alors $u_{42}^2 = u_0^2 q^{84}$ et $u_{41} \times u_{43} = u_0 q^{41} \times u_0 q^{43}$. Donc, on a $(a - 2)^2 = a(a + 1)$ donc $a^2 - 4a + 4 = a^2 + a$ donc $5a = 4$ et donc $a = \frac{4}{5}$.

3.10 b) On a $q = \frac{u_{42}}{u_{41}} = \frac{a-2}{a} = -\frac{3}{2}$. Donc, on a $u_0 = u_{41} \times q^{-41} = -\frac{4}{5} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{41}$.

3.11 a) On a $u_9 = u_6 \times q^3$ donc $q^3 = \frac{u_9}{u_6} = \frac{10\sqrt{2}}{-5} = -2\sqrt{2}$. On en déduit que $q = \sqrt[3]{-2\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$.

3.11 b) On a $u_6 = u_0 \times q^6$ donc $u_0 = \frac{u_6}{q^6} = \frac{-5}{(-\sqrt{2})^6} = -\frac{5}{8}$.

3.11 c) Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{2n} = u_0 \times q^{2n} = -\frac{5}{8} \times (-\sqrt{2})^{2n} = -5 \times 2^{-3} \times 2^n = -5 \times 2^{n-3}$.

3.11 d) Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{3n} = u_0 \times q^{3n} = -\frac{5}{8} \times (-\sqrt{2})^{3n} = -5 \times 2^{-3} \times (-\sqrt{2})^{2n} \times (-\sqrt{2})^n$. On obtient

$$u_{3n} = -5 \times 2^{n-3} \times (-1)^n \times \sqrt{2}^n = (-1)^{n+1} \times 5 \times 2^{n-3} \times \sqrt{2}^n.$$

Fiche n° 4. Calcul de sommes I

Réponses

4.1 a) $-4\sqrt{5}$

4.1 b) $16\sqrt{2}$

4.1 c) $2\sqrt{6}$

4.2 a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

4.2 b) $\frac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{3}$

4.2 c) $\frac{7 - 2\sqrt{10}}{3}$

4.2 d) $\frac{2\sqrt{2} - 1}{7}$

4.3 a) $\frac{m^2 - m - 1}{m(m+1)}$

4.3 b) $\frac{m^2 - 6}{2m(m-2)}$

4.3 c) $\frac{3m^2 - m + 2}{m(m+1)(m-1)}$

4.4 a) $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

4.4 b) $\frac{n^2 + n - 2}{2}$

4.4 c) $\frac{n(n+3)}{2}$

4.4 d) $\frac{n(n-1)}{2}$

4.4 e) $\frac{3n(n+1)}{2}$

4.5 a) 512

4.5 b) -497

4.6 a) $174\ 762$

4.6 b) $-398\ 520$

4.7 a) $\sum_{k=1}^{10} \frac{2^k}{3^{k+1}}$

4.7 b) $\sum_{k=0}^9 \frac{2^{1-k}}{3^{k+2}}$

4.7 c) $\sum_{k=0}^{35} (-(-2)^k)$

4.7 d) $\sum_{k=0}^n 2^{2k}$

4.8 a) n

4.8 b) $2^{n+1} - 2$

4.8 c) $2^{2n+1} - 1$

4.8 d) $2^n(2^{n+1} - 1)$

4.8 e) $\frac{3^{n+1} - 1}{2}$

4.8 f) 0

4.9 a) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}$

4.9 b) $\sum_{k=0}^n (-2)^k$

4.9 c) $\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

4.9 d) $\sum_{k=0}^n \frac{2^{k+1}}{3 \times 5^k}$

4.10 a) $3n + 2(2^n - 1)$

4.10 b) $2n + 2 + \frac{5}{2}(3^{n+1} - 1)$

4.10 c) $2(2^n - 1) + \frac{3}{2}(3^n - 1)$

4.10 d) $\boxed{n(n+1) + \frac{3}{2}(3^n - 1)}$ 4.10 e) $\boxed{n+1 + \frac{1-4^{n+1}}{3} + \frac{5n(n+1)}{2}}$

4.11 $\boxed{1\,000\,000}$

Corrigés

4.1 a) On a $\sqrt{45} - 7\sqrt{5} = 3\sqrt{5} - 7\sqrt{5} = -4\sqrt{5}$.

4.2 a) On a $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

4.2 b) On a $\frac{2 - \sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \frac{(2 - \sqrt{6}) \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{18}}{3} = \frac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{3}$.

4.2 c) On a $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2}{(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2})} = \frac{5 - 2\sqrt{10} + 2}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{7 - 2\sqrt{10}}{3}$.

4.2 d) On a $\frac{\sqrt{2} - 1}{3 - \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2} - 1)(3 + \sqrt{2})}{(3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2})} = \frac{3\sqrt{2} + 2 - 3 - \sqrt{2}}{9 - 2} = \frac{2\sqrt{2} - 1}{7}$.

4.4 a) On a $\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^n k + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2 \times (n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

4.4 b) On a $\sum_{k=2}^n k = \sum_{k=1}^n k - 1 = \frac{n(n+1)}{2} - 1 = \frac{n(n+1) - 2}{2}$.

4.5 a) On a $\sum_{k=0}^{15} u_k = \frac{16 \times (u_0 + u_{15})}{2}$. Or $u_{15} = u_0 + 15r = 2 + 15 \times 4 = 62$ donc $\sum_{k=0}^{15} u_k = \frac{16 \times (2 + 62)}{2} = 512$.

4.5 b) On a $\sum_{k=5}^{18} u_k = \frac{14 \times (u_5 + u_{18})}{2} = \frac{14 \times (-16 + (-55))}{2} = -497$.

4.6 a) On a $\sum_{k=0}^8 u_k = \frac{u_0 \times (1 - q^9)}{1 - q} = \frac{2(1 - 4^9)}{1 - 4} = 174\,762$.

4.6 b) On a $\sum_{k=5}^{12} u_k = \frac{u_5(1 - q^8)}{1 - q}$. Or $u_5 = -1 \times (-3)^5 = 243$. D'où $\sum_{k=5}^{12} u_k = \frac{243(1 - (-3)^8)}{1 - (-3)} = -398\,520$.

4.10 a) On a $\sum_{k=1}^n (3 + 2^k) = \sum_{k=1}^n 3 + \sum_{k=1}^n 2^k = 3 \times \sum_{k=1}^n 1 + \frac{2(1 - 2^n)}{1 - 2} = 3n + 2(2^n - 1)$.

4.10 b) On a

$$\sum_{k=0}^n (2 + 5 \times 3^k) = \sum_{k=0}^n 2 + \sum_{k=0}^n (5 \times 3^k) = 2 \sum_{k=0}^n 1 + 5 \sum_{k=0}^n 3^k = 2(n+1) + 5 \times \frac{3^0(1 - 3^{n+1})}{1 - 3} = 2n + 2 + \frac{5}{2}(3^{n+1} - 1).$$

4.11 Le plus grand entier impair compris entre 1 et 2 000 est $1\,999 = 2 \times 999 + 1$. La somme de tous les entiers impairs compris entre 1 et 2 000 est donc

$$\sum_{k=0}^{999} (2k+1) = 2 \times \sum_{k=0}^{999} k + \sum_{k=0}^{999} 1 = 2 \times \frac{999 \times 1\,000}{2} + 1\,000 = 1\,000\,000.$$

.....

Fiche n° 5. Calcul de sommes II

Réponses

5.1 a)	$-2 - x + x^2$	5.8 c)	$12N^2 - 5N - 2$
5.1 b)	$\frac{2}{3} + \frac{14}{3}x - \frac{5}{2}x^2$	5.9	$\textcircled{C}$
5.2 a)	$\frac{x^2}{x-1}$	5.10 a)	$\frac{4}{9} - \frac{1}{9}(-2)^{n+1}$
5.2 b)	$\frac{14-2x}{x-1}$	5.10 b)	$\frac{1-2^{n+1}}{1-\sqrt{2}}$
5.3 a)	5	5.10 c)	$9\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{2n} - 1\right)$
5.3 b)	$b^4 + ab^3 + a^2b^2 + a^3b + a^4$	5.10 d)	$\frac{2^p(1-2^{np})}{1-2^p}$
5.3 c)	$a^5 - b^5$	5.11 a)	$1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$
5.4 a)	7	5.11 b)	$\frac{9}{7}\left(\left(\frac{9}{2}\right)^{3n} - 1\right)$
5.4 b)	$a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6$	5.11 c)	$\frac{3}{2} + \frac{3^{n+1}}{2} - 2^{n+2}$
5.4 c)	$a^7 + b^7$	5.11 d)	$\frac{9}{2} - \frac{1+2^n}{3^n}$
5.5 a)	7	5.12 a)	5
5.5 b)	$a^6 - a^5 + a^4 - a^3 + a^2 - a + 1$	5.12 b)	$5 - 4 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n$
5.5 c)	$a^7 + 1$	5.12 c)	$20\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} - 20$
5.6	$1 - b^{n+1}$	5.12 d)	$5n - 15 + 20\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$
5.7 a)	120		
5.7 b)	231		
5.7 c)	$(N+1)^2$		
5.8 a)	$\frac{25}{2}$		
5.8 b)	148		

Corrigés

5.1 a) On a $(x+1)(x-2) = x^2 - 2x + x - 2 = -2 - x + x^2$.

5.1 b) On a $(2-x)\left(\frac{1}{3} + \frac{5}{2}x\right) = \frac{2}{3} + 5x - \frac{1}{3}x - \frac{5}{2}x^2 = \frac{2}{3} + \frac{15-1}{3}x - \frac{5}{2}x^2 = \frac{2}{3} + \frac{14}{3}x - \frac{5}{2}x^2$.

5.2 a) On a $x + 1 - \frac{1}{1-x} = \frac{(x+1)(1-x)}{1-x} - \frac{1}{1-x} = \frac{1-x^2}{1-x} - \frac{1}{1-x} = \frac{-x^2}{1-x} = \frac{x^2}{x-1}$.

5.2 b) On a

$$\begin{aligned}x - 4 - \frac{(x-5)(2+x)}{x-1} &= \frac{(x-4)(x-1)}{x-1} - \frac{(x-5)(2+x)}{x-1} = \frac{x^2 - 4x - x + 4 - (2x - 10 + x^2 - 5x)}{x-1} \\&= \frac{x^2 - 5x + 4 - (x^2 - 3x - 10)}{x-1} \\&= \frac{-2x + 14}{x-1} = \frac{14 - 2x}{x-1}.\end{aligned}$$

5.3 b)

$$\text{On a } \sum_{k=0}^4 a^k b^{4-k} = a^0 b^4 + a^1 b^3 + a^2 b^2 + a^3 b^1 + a^4 b^0 = b^4 + ab^3 + a^2 b^2 + a^3 b + a^4.$$

5.3 c)

$$\begin{aligned}\text{On a } (a-b) \sum_{k=0}^4 a^k b^{4-k} &= (a-b)(b^4 + ab^3 + a^2 b^2 + a^3 b + a^4) \\&= ab^4 + a^2 b^3 + a^3 b^2 + a^4 b + a^5 - b^5 - ab^4 - a^2 b^3 - a^3 b^2 - a^4 b = a^5 - b^5.\end{aligned}$$

5.4 b) On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^6 (-1)^k a^{6-k} b^k &= (-1)^0 a^6 b^0 + (-1)^1 a^5 b^1 + (-1)^2 a^4 b^2 + (-1)^3 a^3 b^3 + (-1)^4 a^2 b^4 + (-1)^5 a^1 b^5 + (-1)^6 a^0 b^6 \\&= a^6 - a^5 b + a^4 b^2 - a^3 b^3 + a^2 b^4 - ab^5 + b^6.\end{aligned}$$

5.4 c) On a

$$\begin{aligned}(a+b) \sum_{k=0}^6 (-1)^k a^{6-k} b^k &= (a-b)(a^6 - a^5 b + a^4 b^2 - a^3 b^3 + a^2 b^4 - ab^5 + b^6) \\&= a^7 - a^6 b + a^5 b^2 - a^4 b^3 + a^3 b^4 - a^2 b^5 + ab^6 + a^6 b - a^5 b^2 + a^4 b^3 - a^3 b^4 + a^2 b^5 - ab^6 + b^7 \\&= a^7 + b^7.\end{aligned}$$

5.5 b) On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^6 a^k (-1)^{6-k} &= a^0 (-1)^6 + a^1 (-1)^5 + a^2 (-1)^4 + a^3 (-1)^3 + a^4 (-1)^2 + a^5 (-1)^1 + a^6 (-1)^0 \\&= 1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5 + a^6.\end{aligned}$$

5.5 c) On a

$$\begin{aligned}(a+1) \sum_{k=0}^6 a^k (-1)^{6-k} &= (a+1)(1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5 + a^6) \\&= a - a^2 + a^3 - a^4 + a^5 - a^6 + a^7 + 1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5 + a^6 = a^7 + 1.\end{aligned}$$

5.6 On écrit

$$\begin{aligned}(1-b) \sum_{k=0}^n b^k &= \sum_{k=0}^n b^k - b \sum_{k=0}^n b^k = \sum_{k=0}^n b^k - \sum_{k=0}^n b^{k+1} \\&= (1 + b + b^2 + \dots + b^n) - (b + b^2 + \dots + b^n + b^{n+1}) = 1 - b^{n+1}.\end{aligned}$$

5.7 a)

Pour commencer, on a $u_1 = u_0 + r = 1 + 2 = 3$ et $u_{10} = u_0 + 10 \times 2 = 1 + 20 = 21$. Donc, on a

$$\sum_{n=1}^{10} u_n = \frac{(3+21) \times 10}{2} = \frac{240}{2} = 120.$$

5.7 b) Pour commencer, on a $u_5 = 1 + 5 \times 2 = 11$ et $u_{15} = 1 + 15 \times 2 = 31$. Donc, on a

$$\sum_{n=5}^{15} u_n = \frac{(11+31) \times 11}{2} = \frac{462}{2} = 231.$$

5.7 c) Pour commencer, on a $u_N = 1 + N \times 2 = 2N + 1$. Donc, on a

$$\sum_{n=0}^N u_n = \frac{(u_0 + u_N)(N+1)}{2} = \frac{(1 + 2N + 1)(N+1)}{2} = \frac{(2N+2)(N+1)}{2} = (N+1)^2.$$

5.8 a) Pour commencer, on a $u_1 = -2 + \frac{3}{2} = \frac{-1}{2}$ et $u_5 = -2 + 5 \times \frac{3}{2} = \frac{-4+15}{2} = \frac{11}{2}$. Donc, on a

$$\sum_{n=1}^5 u_n = \frac{(\frac{-1}{2} + \frac{11}{2}) \times 5}{2} = \frac{25}{2}.$$

5.8 b) On a $\sum_{n=0}^{15} u_n = \frac{(u_0 + u_{15}) \times 16}{2} = (-2 + (-2) + 15 \times \frac{3}{2}) \times 8 = (-4 + \frac{45}{2}) \times 8 = 148.$

5.8 c) On a

$$\sum_{n=0}^{4N} u_n = \frac{(-2 - 2 + 4N \times \frac{3}{2}) \times (4N + 1)}{2} = \frac{(-4 + 6N)(4N + 1)}{2} = (3N - 2)(4N + 1) = 12N^2 - 5N - 2.$$

5.9 On a $S = \sum_{k=5}^{10} u_k = u_5 + q u_5 + q^2 u_5 + q^3 u_5 + q^4 u_5 + q^5 u_5 = u_5 \sum_{k=0}^5 q^k = u_5 \frac{1 - q^6}{1 - q}.$

5.10 a) On a

$$S = \sum_{k=2}^n u_k = u_2 \sum_{k=0}^{n-2} u_k = \left(\frac{1}{3} \times (-2)^2\right) \frac{1 - (-2)^{n-2+1}}{1 - (-2)} = \frac{4}{3} \times \frac{1 - (-2)^{n-1}}{3} = \frac{4}{9} - \frac{1}{9}(-2)^{n-1+2} = \frac{4}{9} - \frac{1}{9}(-2)^{n+1}.$$

5.10 b) On a $S = \sum_{k=0}^{2n+1} u_k = u_0 \frac{1 - q^{2n+2}}{1 - q} = 1 \times \frac{1 - \sqrt{2}^{2n+2}}{1 - \sqrt{2}} = \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - \sqrt{2}}.$

5.10 c) On a $S = \sum_{k=1}^{2n} u_k = u_1 \sum_{k=0}^{2n-1} = 3 \times \frac{3 \frac{1 - (\frac{3}{2})^{2n-1+1}}{1 - \frac{3}{2}}}{2} = \frac{9}{2} \times \frac{1 - (\frac{3}{2})^{2n}}{-\frac{1}{2}} = -9 \left(1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{2n}\right) = 9 \left(\left(\frac{3}{2}\right)^{2n} - 1\right).$

5.10 d) On a $S = \sum_{k=1}^n u_k = u_1 \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0 q \frac{1 - q^{n-1+1}}{1 - q} = 2^p q \frac{1 - (2^p)^n}{1 - 2^p} = \frac{2^p(1 - 2^{np})}{1 - 2^p}.$

5.11 a) On a $S = \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{3^{k+1}} = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^n \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{3} \times \frac{1 - (\frac{2}{3})^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \times 3 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}.$

5.11 b) On a

$$\begin{aligned} S = \sum_{k=1}^{3n} \frac{3^{2k}}{2^k} &= \sum_{k=1}^{3n} \left(\frac{3^2}{2}\right)^k = \frac{9}{2} \sum_{k=0}^{3n-1} \left(\frac{9}{2}\right)^k = \frac{9}{2} \times \frac{1 - (\frac{9}{2})^{3n-1+1}}{1 - \frac{9}{2}} = \frac{9}{2} \times \frac{-2}{7} \left(1 - \left(\frac{9}{2}\right)^{3n}\right) \\ &= \frac{-9}{7} \left(1 - \left(\frac{9}{2}\right)^{3n}\right) = \frac{9}{7} \left(\left(\frac{9}{2}\right)^{3n} - 1\right). \end{aligned}$$

5.11 c) On a

$$\begin{aligned} S = \sum_{k=0}^n (3^k - 2^{k+1}) &= \sum_{k=0}^n 3^k - 2 \sum_{k=0}^n 2^k = \frac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3} - 2 \times \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = \frac{-1}{2}(1 - 3^{n+1}) + 2(1 - 2^{n+1}) \\ &= \frac{3}{2} + \frac{3^{n+1}}{2} - 2^{n+2}. \end{aligned}$$

5.11 d) On a

$$\begin{aligned} S = \sum_{k=0}^n \frac{2}{3^k} + \sum_{k=0}^n \frac{2^{k-1}}{3^k} &= 2 \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{3}\right)^k + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \left(\frac{2}{3}\right)^k = 2 \times \frac{1 - (\frac{1}{3})^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} + \frac{1}{2} \times \frac{1 - (\frac{2}{3})^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} \\ &= 2 \times \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right) + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}\right) \\ &= \frac{9}{2} - \frac{1}{3^n} - \frac{2^n}{3^n} = \frac{9}{2} - \frac{1 + 2^n}{3^n}. \end{aligned}$$

5.12 b) Pour commencer, on a $v_0 = u_0 - \alpha = 1 - 5 = -4$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n = -4 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n$.

Puis, on a $u_n = v_n + \alpha = -4 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n + 5 = 5 - 4 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n$.

5.12 c) On a

$$\sum_{k=0}^n v_k = \sum_{k=0}^n \left(-4 \times \left(\frac{4}{5} \right)^k \right) = -4 \sum_{k=0}^n \left(\frac{4}{5} \right)^k = -4 \times \frac{1 - \left(\frac{4}{5} \right)^{n+1}}{1 - \frac{4}{5}} = -4 \times 5 \left(1 - \left(\frac{4}{5} \right)^{n+1} \right) = 20 \left(\frac{4}{5} \right)^{n+1} - 20.$$

5.12 d) On a $\sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n (5 + v_k) = \sum_{k=0}^n 5 + \sum_{k=0}^n v_k = 5(n+1) + 20 \left(\frac{4}{5} \right)^{n+1} - 20 = 5n - 15 + 20 \left(\frac{4}{5} \right)^{n+1}.$

Fiche n° 6. Calcul de produits

Réponses

6.1 a) -33

6.1 b) $-\frac{4}{5}$

6.1 c) $\frac{9}{8}$

6.2 a) $a^2 + 2ab + b^2$

6.2 b) ... $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

6.2 c) ... $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$

6.3 a) $\prod_{k=1}^{99} k$

6.3 b) $\prod_{k=3}^{50} k^k$

6.3 c) $\prod_{k=3}^{15} k^{k+2}$

6.3 d) $\prod_{k=1}^8 2$

6.4 a) $\prod_{k=1}^{3n} (k^2 + 1)x_k$

6.4 b) $\prod_{k=1}^{n-1} (x_k + x_{k+1})$

6.4 c) $\prod_{k=1}^n (x_k + y_k)$

6.4 d) $\prod_{k=0}^n (x_k + y_{n-k})$

6.5 a) $\sum_{k=1}^n \prod_{i=1}^k x_i$

6.5 b) $\prod_{k=1}^n \sum_{i=1}^k x_i$

6.6 a) 120

6.6 b) 105

6.6 c) 0

6.6 d) $\frac{1}{11}$

6.7 e

6.8 d et f

6.9 a) $\frac{a_2}{a_1}$

6.9 b) $\frac{a_3}{a_1}$

6.9 c) $\frac{a_4}{a_1}$

6.9 d) $\frac{a_n}{a_1}$

6.10 e

Corrigés

6.9 a) On a $b_1 = \prod_{i=1}^1 \frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{a_2}{a_1}$.

6.9 b) On a $b_2 = \prod_{i=1}^2 \frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{a_2}{a_1} \times \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_3}{a_1}$.

6.9 c) De même, on a $b_3 = \frac{a_2}{a_1} \times \frac{a_3}{a_2} \times \frac{a_4}{a_3} = \frac{a_4}{a_1}$.

6.9 d) On a

$$b_{n-1} = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{a_2}{a_1} \times \frac{a_3}{a_2} \times \cdots \times \frac{a_{n-1}}{a_{n-1}} \times \frac{a_n}{a_{n-1}}.$$

Dans ce produit, tous les facteurs se simplifient sauf a_1 et a_n . On trouve $b_{n-1} = \frac{a_n}{a_1}$.

.....

Fiche n° 7. Limites de suites

Réponses

7.1 a)	non	7.2 a)	d	7.4 d)	non
7.1 b)	oui	7.2 b)	d	7.5 a)	+∞
7.1 c)	non	7.3 a)	c	7.5 b)	0
7.1 d)	oui	7.3 b)	1	7.6 a)	3/5
7.1 e)	non	7.4 a)	non	7.6 b)	0
7.1 f)	oui	7.4 b)	oui	7.6 c)	+∞
7.1 g)	oui	7.4 c)	oui	7.6 d)	+∞
7.1 h)	oui				

Corrigés

- 7.1 a)** La suite $(-1)^n$ prend alternativement les valeurs -1 et 1 . Elle est donc divergente et n'a pas de limite.
- 7.1 b)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2n + 1$ est impair. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(-1)^{2n+1} = -1$, qui a pour limite -1 .
- 7.1 c)** La série alterne : les termes de rang pair $u_{2n} = 2n(-1)^{2n} = 2n$ tendent vers $+\infty$. et les termes de rang impair $u_{2n+1} = (2n+1)(-1)^{2n+1} = (2n+1) \times (-1)$ tendent vers $-\infty$. La suite est donc divergente.
- 7.1 d)** Par comparaison, $n + (-1)^n \geq n - 1$ qui tend vers $+\infty$.
- 7.1 e)** La suite alterne entre $2n$ et $-2n$ donc diverge et n'admet pas de limite.
- 7.1 f)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'exposant $2n$ est pair. Donc $(-1)^{2n} = 1$ et la suite $n(-1)^{2n} = n$ tend vers $+\infty$.
- 7.1 g)** Pour les termes de rang pair, on a $\cos((-1)^n \pi) = \cos(\pi) = -1$. Et pour les termes de rang impair, on a $\cos((-1)^n \pi) = \cos(-\pi) = -1$. La suite est donc constante de valeur -1 .
- 7.1 h)** Pour les termes de rang pair, on a $\sin((-1)^n \pi) = \sin(\pi) = 0$. Et pour les termes de rang impair, on a $\sin((-1)^n \pi) = \sin(-\pi) = 0$. La suite est donc constante de valeur 0 .
- 7.2 a)** On a $\frac{13}{17} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{13}{17}\right)^n = 0$. D'un autre côté, on a l'encadrement $-1 \leq \cos(n) \leq 1$ donc, par le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{13}{17}\right)^n \cos(n) = 0$.
- 7.2 b)** On recommence l'encadrement $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ et donc $9 - 1 \leq 9 + (-1)^n \leq 9 + 1$. Finalement, on a $8 \times (0,2)^n \leq (9 + (-1)^n) \times (0,2)^n \leq 10 \times (0,2)^n$ et les deux suites de gauche et de droite tendent vers 0 (car $0,2 < 1$). Donc le théorème des gendarmes donne que $\lim_{n \rightarrow \infty} (9 + (-1)^n) \times (0,2)^n = 0$.

7.3 a) Si n impair alors $\frac{n + (-1)^n}{n - (-1)^n} = \frac{n - 1}{n - (-1)} = \frac{n - 1}{n + 1}$. Si n pair alors $\frac{n + (-1)^n}{n - (-1)^n} = \frac{n + 1}{n - (+1)} = \frac{n + 1}{n - 1}$. Or, pour tout entier $n > 1$, on a $\frac{n - 1}{n + 1} \leq \frac{n + 1}{n - 1}$.

7.3 b) On a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - 1}{n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 1}{n - 1} = 1$. Par le théorème des gendarmes, la suite $(u_n)_n$ tend donc vers 1.

7.4 a) Non. En effet, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} 3n = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 + 3n + 1 = +\infty$.

7.5 a) On factorise par les termes dominants 2^n et n^2 , ce qui donne $\frac{2^n(1 - (\frac{1}{4})^n)}{n^2(1 - (\frac{1}{n})^4)}$.

On conclut en montrant que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n^2} = +\infty$. Pour cela, on écrit

$$\ln\left(\frac{2^n}{n^2}\right) = n \ln(2) - 2 \ln(n) = n \left(\ln(2) - 2 \frac{\ln(n)}{n} \right).$$

Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$ et $\ln(2) > 0$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{2^n}{n^2}\right) = +\infty$. On conclut en raisonnant par composition des limites, grâce à $\lim_{u \rightarrow +\infty} \exp(u) = +\infty$.

7.5 b) En factorisant par 5^n , on obtient $\frac{5^n - 1}{10^n + 5} = \frac{5^n(1 - \frac{1}{5^n})}{5^n(\frac{10^n}{5^n} + \frac{5}{5^n})} = \frac{1 - \frac{1}{5^n}}{(\frac{10}{5})^n + \frac{1}{5^{n-1}}} = \frac{1 - \frac{1}{5^n}}{2^n + \frac{1}{5^{n-1}}}$.

7.6 a) En factorisant le numérateur et le dénominateur par n^3 , on trouve $\frac{n^3(3 - \frac{1}{n} - \frac{17}{n^3})}{n^3(5 + \frac{9}{n} + \frac{1}{n^2})} = \frac{3 - \frac{1}{n} - \frac{17}{n^3}}{5 + \frac{9}{n} + \frac{1}{n^2}}$.

7.6 b) On peut par exemple factoriser le dénominateur pour simplifier l'expression étudiée ; on trouve

$$\frac{(3 - n)(2 + \sqrt{n})}{9 - n^2} = \frac{(3 - n)(2 + \sqrt{n})}{(3 - n)(3 + n)} = \frac{2 + \sqrt{n}}{3 + n}.$$

Puis, en factorisant, on a $\frac{2 + \sqrt{n}}{3 + n} = \frac{n(\frac{2}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}})}{n(\frac{3}{n} + 1)} = \frac{\frac{2}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{3}{n} + 1}$, ce qui permet de trouver la limite.

7.6 c) On lève l'indétermination en écrivant $\left(\frac{8}{11}\right)^n \times \left(\frac{121}{24}\right)^n = \left(\frac{8 \times 11^2}{11 \times 3 \times 8}\right)^n = \left(\frac{11}{3}\right)^n$.

7.6 d) Pour lever la forme indéterminée, on factorise par 8^{7n} , ce qui donne

$$8^{7n} - 56^n = 8^{7n} \left(1 - \frac{56^n}{8^{7n}} \right) = 8^{7n} \left(1 - \left(\frac{56}{8^7} \right)^n \right).$$

On conclut en remarquant que $8^7 > 56$.

Fiche n° 8. Révisions sur la dérivation

Réponses

8.1 a) $\frac{1}{12}$

8.1 b) 1

8.1 c) $\frac{1}{3}$

8.1 d) $\frac{22}{5}$

8.2 a) $x^3 - 5x^2 + 7x - 3$

8.2 b) $x^3 + x^2 - 2x - 8$

8.2 c) $-x^3 + 9x + 20$

8.2 d) $12x$

8.3 a) $x \mapsto 4$

8.3 b) $x \mapsto 5$

8.3 c) $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$

8.3 d) $x \mapsto -3e^{-3x}$

8.3 e) $x \mapsto 0$

8.3 f) $x \mapsto -\frac{5}{x^6}$

8.4 a) $x \mapsto 4x^2(3 + 5x)$

8.4 b) $x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

8.4 c) $x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

8.4 d) $x \mapsto 9e^{3x} - \frac{1}{x^2}$

8.5 a) $x \mapsto e^{3x} - \frac{2}{x^2}$

8.5 b) $x \mapsto 2(3e^{2x} - 2^9 x^3)$

8.5 c) $x \mapsto 2\left(5e^{10x} - \frac{1}{x^2} - 2 \times 3^4 x^3\right)$

8.6 a) $x \mapsto (2x + 3)e^{2x}$

8.6 b) $x \mapsto (3x^2 + 2x + 3)e^{3x}$

8.7 a) $x \mapsto \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}$

8.7 b) $x \mapsto \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$

8.7 c) $x \mapsto \frac{2e^x(x^3 - x^2 + x + 1)}{(1 + x^2)^2}$

8.8 a) $x \mapsto 6(3x + 2)$

8.8 b) $x \mapsto -\frac{5}{(5x + 2)^2}$

8.8 c) $x \mapsto \frac{8}{(5 - 2x)^5}$

8.9 a) $x \mapsto 2(3x + 2)(6x + 7)e^{4x+5}$

8.9 b) $x \mapsto 4(x + e)^3 + 27(3x + 2)^2$

8.10 a) $(x + 1)e^x$

8.10 b) $(x + 2)e^x$

8.11 a) $\frac{e^x - 1 + x}{e^x}$

8.11 b) $\frac{2 - x}{e^x}$

8.12 a) $x \mapsto 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$

8.12 b) $x \mapsto \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$

8.12 c) $\frac{1 - (n + 1)x^n + nx^{n+1}}{(1 - x)^2}$

8.13 a) $\frac{2}{(3 - 2x)^2}$

8.13 b) $\frac{2^3}{(3 - 2x)^3}$

8.13 c) $\frac{3! \times 2^3}{(3 - 2x)^4}$

8.13 d) $\frac{4! \times 2^4}{(3-2x)^5}$

8.13 f) $\frac{n! \times 2^n}{(3-2x)^{n+1}}$

8.13 e) $\frac{5! \times 2^5}{(3-2x)^6}$

Corrigés

8.3 e) Cette fonction est constante !

8.4 a) En notant f la fonction, on a $f'(x) = 4 \times 3x^2 + 5 \times 4x^3 = 4x^2(3 + 5x)$.

8.5 a) En notant f la fonction et en utilisant les dérivées des fonctions élémentaires, on a

$$f'(x) = \frac{1}{3} \times 3e^{3x} + 2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{3x} - \frac{2}{x^2}.$$

8.5 b) En notant f la fonction et en utilisant les dérivées des fonctions élémentaires, on a

$$f'(x) = 3 \times 2e^{2x} - 4^4 \times 4x^3 = 2(3e^{2x} - 2 \times 4^4 x^3) = 2(3e^{2x} - 2 \times 2^8 x^3) = 2(3e^{2x} - 2^9 x^3).$$

8.5 c) En notant f la fonction et en utilisant les propriétés de la fonction exponentielle, on a

$$f(x) = e^{10x} + \frac{2}{x} - 3^4 x^4.$$

En utilisant les dérivées des fonctions élémentaires, on a

$$f'(x) = 10e^{10x} - \frac{2}{x^2} - 3^4 \times 4x^3 = 2\left(5e^{10x} - \frac{1}{x^2} - 2 \times 3^4 x^3\right).$$

8.6 a) En notant f la fonction et en utilisant les dérivées des fonctions élémentaires, on a

$$f'(x) = 1 \times e^{2x} + (x+1) \times 2e^{2x} = (1 + 2(x+1))e^{2x} = (2x+3)e^{2x}.$$

8.6 b) En notant f la fonction et en utilisant les dérivées des fonctions élémentaires, on a

$$f'(x) = 2xe^{3x} + (x^2 + 1) \times 3e^{3x} = (2x + 3(x^2 + 1))e^{3x} = (3x^2 + 2x + 3)e^{3x}.$$

8.7 a) En notant f la fonction et en utilisant les dérivées des fonctions élémentaires, on a

$$f'(x) = \frac{e^x(1 + e^x) - e^x \times e^x}{(1 + e^x)^2} = \frac{e^x(1 + e^x - e^x)}{(1 + e^x)^2} = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}.$$

8.7 b) En notant f la fonction, f est un quotient et sa dérivée vaut

$$f'(x) = \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4e^x e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}.$$

8.7 c) En notant f la fonction et en utilisant les règles habituelles sur la dérivation, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x + 2(e^x + xe^x) + 0)(1 + x^2) - (x^2 + 2xe^x + 1)2x}{(1 + x^2)^2} \\ &= \frac{(2x + 2(x + 1)e^x)(1 + x^2) - 2x(x^2 + 2xe^x + 1)}{(1 + x^2)^2} \\ &= 2 \frac{x + (x + 1)e^x + x^3 + x^2(x + 1)e^x - x^3 - 2x^2e^x - x}{(1 + x^2)^2} \\ &= 2 \frac{e^x(x + 1 + x^3 + x^2 - 2x^2)}{(1 + x^2)^2} \\ &= 2e^x \frac{x^3 - x^2 + x + 1}{(1 + x^2)^2}. \end{aligned}$$

8.8 a) La dérivée de $x \mapsto 3x + 2$ est $x \mapsto 3$ et la dérivée de $u \mapsto u^2$ est $u \mapsto 2u$. Ainsi, en notant f la fonction demandée, on a $f'(x) = 2 \times 3 \times (3x + 2) = 6(3x + 2)$.

8.8 b) En notant f la fonction demandée, on a $f'(x) = 5 \times \left(-\frac{1}{(5x + 2)^2} \right) = -\frac{5}{(5x + 2)^2}$.

8.9 a) Par composition, la dérivée de $x \mapsto (3x + 2)^2$ est $x \mapsto 3 \times 2(3x + 2)$. Par composition aussi, la dérivée de $x \mapsto e^{4x+5}$ est $x \mapsto 4e^{4x+5}$. En notant f la fonction, on a donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6(3x + 2)e^{4x+5} + (3x + 2)^2 \times 4 \times e^{4x+5} \\ &= 2(3x + 2)(3 + 2(3x + 2))e^{4x+5} \\ &= 2(3x + 2)(6x + 7)e^{4x+5}. \end{aligned}$$

8.9 b) Par composition, la dérivée de $x \mapsto (x + e)^4$ est $x \mapsto 4(x + e)^3$. Par composition aussi, la dérivée de $x \mapsto (3x + 2)^3$ est $x \mapsto 3 \times 3(3x + 2)^2$.

En notant f la fonction, on a donc $f'(x) = 4(x + e)^3 + 3 \times 9(3x + 2)^2 = 4(x + e)^3 + 27(3x + 2)^2$.

8.10 a) On pose $u(x) = x$ et $v(x) = e^x$ et on utilise la formule donnant la dérivée d'un produit.

8.11 a) On a $f'(x) = 1 + 0 - \frac{1 \times e^x - x \times e^x}{(e^x)^2} = 1 - \frac{1 - x}{e^x} = \frac{e^x - 1 + x}{e^x}$.

8.11 b) La fonction f' est un quotient de fonctions dérivables, donc

$$f''(x) = \frac{(e^x - 0 + 1) \times e^x - (e^x - 1 + x) \times e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x + 1 - e^x + 1 - x}{e^x} = \frac{2 - x}{e^x}.$$

8.12 a) On dérive chacune des fonctions de la somme. On obtient ainsi $f'(x) = \sum_{k=0}^n kx^{k-1}$.

8.12 b) Le nombre $f(x)$ est la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $x \neq 1$. D'après le cours, on a donc

$$1 + x + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

8.12 c) En utilisant la formule précédente, on a, pour $x \neq 1$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-(n+1)x^{n+1-1}(1-x) - (-1) \times (1-x^{n+1})}{(1-x)^2} = \frac{-(n+1)x^n(1-x) + (1-x^{n+1})}{(1-x)^2} \\ &= \frac{-(n+1)x^n + (n+1)x^{n+1} + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2} = \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

8.13 f) On conjecture cette formule en généralisant les calculs précédents.

Plus formellement, cette propriété se démontrerait par récurrence sur n .

Fiche n° 9. Dérivée des fonctions composées

Réponses

9.1 a) $6x^2 - 5x - 21$

9.1 b) $81x^2 - 126x + 49$

9.1 c) $x^3 - x^2 - 5x - 3$

9.1 d) $x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x + 4$

9.2 a) $\frac{2}{(3-x)(x-1)}$

9.2 b) $\frac{2x^2 - 8x - 33}{(x-7)(x-4)}$

9.2 c) $\frac{2x^3 + 3x^2 + x - 4}{x^3(x-4)}$

9.3 a) $-6x^2 e^{1-x^3}$

9.3 b) $-\frac{2e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}$

9.3 c) $\frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}$

9.3 d) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

9.4 a) $4(2x+e)(x^2+ex)^3$

9.4 b) $(x-1)(x^2-2x+3)$

9.4 c) $3(8x+3)(4x^2+3x+5)^2$

9.4 d) $\frac{-2(6x-5)}{(3x^2-5x+7)^3}$

9.5 a) $\frac{3-4x}{2\sqrt{-2x^2+3x+5}}$

9.5 b) $\textcircled{d}$

9.6 a) $-\frac{5}{4}$

9.6 b) 0

9.7 a) $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

9.7 b) $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

9.8 a) $(6x^2 + 10x + 3)e^{x^2+3}$

9.8 b) $\frac{(2x-1)(x-1)}{\sqrt{1+x^2}}$

9.9 a) $\frac{1}{2}x(\sqrt{x}+4)e^{\sqrt{x}}$

9.9 b) $\frac{(x-1)\exp(\frac{1}{x})}{x}$

9.10 $(4x^2 - 20x + 27)e^{x^2-4x+7}$

9.11 a) $\frac{x(3x^3+3x+1)e^{x^3}}{\sqrt{1+x^2}}$

9.11 b) $\frac{3x(x^3-2x+2)e^{5-x^3}}{(x^2-2)^4}$

9.12 a) ... $\frac{(5x^2+6x+3)\exp((x^2+2x+3)\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$

9.12 b) $-\frac{44(2x+5)}{(4x-1)^3}$

9.13 a) $-2f + 2f^3$

9.13 b) $-2 + 8f^2 - 6f^4$

Corrigés

9.1 a) On a $(2x+3)(3x-7) = 2x \times 3x + 2x \times (-7) + 3 \times 3x + 3 \times (-7) = 6x^2 - 14x + 9x - 21 = 6x^2 - 5x - 21$.

9.1 b) On a $(9x - 7)^2 = (9x)^2 - 2 \times 9x \times 7 + 7^2 = 81x^2 - 126x + 49$.

9.1 c) On a $(x + 1)^2(x - 3) = (x^2 + 2x + 1)(x - 3) = x^3 - 3x^2 + 2x^2 - 6x + x - 3 = x^3 - x^2 - 5x - 3$.

9.1 d) On a $(x^2 + 3x + 2)^2 = x^4 + 2x^2(3x + 2) + (3x + 2)^2 = x^4 + 6x^3 + 4x^2 + 9x^2 + 12x + 4$.

9.2 a) On a $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{3-x} = \frac{3-x+x-1}{(x-1)(3-x)} = \frac{2}{(3-x)(x-1)}$.

9.2 b) On a $\frac{2x+3}{x-4} + \frac{3}{x-7} = \frac{(2x+3)(x-7) + 3(x-4)}{(x-4)(x-7)} = \frac{2x^2 - 14x + 3x - 21 + 3x - 12}{(x-4)(x-7)} = \frac{2x^2 - 8x - 33}{(x-7)(x-4)}$.

9.2 c) On a $\frac{1}{x^3} + \frac{2x+3}{x(x-4)} = \frac{x-4 + (2x+3)x^2}{x^3(x-4)} = \frac{2x^3 + 3x^2 + x - 4}{x^3(x-4)}$.

9.3 a) On utilise le fait que $(e^u)' = u' \times e^u$.

9.3 b) On utilise le fait que $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$.

9.3 c) On utilise le fait que $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

9.3 d) On utilise aussi le fait que $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

9.4 a) On utilise le fait que $(u^4)' = 4u' \times u^3$.

9.4 b) On utilise le fait que $(u^2)' = 2uu'$.

9.4 c) On utilise le fait que $(u^3)' = 3u' \times u^2$.

9.4 d) On utilise le fait que $(u^{-2})' = -2u' \times u^{-3}$.

9.6 a) Pour tout réel $x \in \left[-3, -\frac{1}{2}\right]$, on a $f'(x) = \frac{3x^2 + 4x - 4}{2\sqrt{x^3 + 2x^2 - 4x - 1}}$. Ainsi, on a

$$f'(-1) = \frac{3 \times (-1)^2 + 4 \times (-1) - 4}{2\sqrt{(-1)^3 + 2 \times (-1)^2 - 4 \times (-1) - 1}} = \frac{3 - 4 - 4}{2 \times \sqrt{-1 + 2 + 4 - 1}} = -\frac{5}{4}.$$

9.6 b) Pour tout réel $x \in \left[-3, -\frac{1}{2}\right]$, on a $f'(x) = \frac{3x^2 + 4x - 4}{2\sqrt{x^3 + 2x^2 - 4x - 1}}$. Ainsi, on a

$$f'(-2) = \frac{3 \times (-2)^2 + 4 \times (-2) - 4}{2\sqrt{(-2)^3 + 2 \times (-2)^2 - 4 \times (-2) - 1}} = \frac{12 - 8 - 4}{2 \times \sqrt{-8 + 8 + 8 - 1}} = 0.$$

9.7 b) On a $g(1) = e^0 = 1$. De plus, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $g'(x) = \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)e^{x-\sqrt{x}}$ et donc $g'(1) = \frac{1}{2}$.

L'équation de la tangente cherchée est donc $y = \frac{1}{2}(x - 1) + 1$ et donc $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ sous forme réduite.

9.8 a) On a $f'(x) = 3e^{x^2+3} + (3x+5) \times 2xe^{x^2+3} = (6x^2+10x+3)e^{x^2+3}$.

9.8 b) On a $f'(x) = \sqrt{1+x^2} + (x-3) \times \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+x^2+x(x-3)}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{2x^2-3x+1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Par ailleurs, les racines de $2x^2-3x+1$ sont 1 et $\frac{1}{2}$. Ainsi, on a $2x^2-3x+1 = 2(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right) = (x-1)(2x-1)$ et $f'(x) = \frac{(2x-1)(x-1)}{\sqrt{1+x^2}}$.

9.9 a) On a $f'(x) = 2xe^{\sqrt{x}} + x^2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}} = 2xe^{\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}}{2}e^{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x(\sqrt{x}+4)e^{\sqrt{x}}$.

9.9 b) On a $f'(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right) + x \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)\exp\left(\frac{1}{x}\right) = \left(x - \frac{1}{x}\right)\exp\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{(x-1)\exp\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$.

9.10 Pour tout réel x , on a $f'(x) = (2x-5)e^{x^2-5x+7}$ et

$$f''(x) = 2e^{x^2-5x+7} + (2x-5)^2e^{x^2-5x+7} = (4x^2-20x+27)e^{x^2-5x+7}.$$

9.11 a) On a $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}e^{x^3} + 3x^2\sqrt{1+x^2}e^{x^3} = \frac{xe^{x^3} + 3x^2(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x(3x^3+3x+1)e^{x^3}}{\sqrt{1+x^2}}$.

9.11 b) On a

$$f'(x) = \frac{-3x^2e^{5-x^3} \times (x^2-2)^3 - e^{5-x^3} \times 6x(x^2-2)^2}{(x^2-2)^6} = -\frac{3((x^2-2)x^2+2x)e^{5-x^3}}{(x^2-2)^4} = -\frac{3x(x^3-2x+2)e^{5-x^3}}{(x^2-2)^4}.$$

9.12 a) Pour tout $x > 0$, on pose $u(x) = (x^2+2x+3)\sqrt{x}$. On a $u'(x) = (2x+2)\sqrt{x} + \frac{x^2+2x+3}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2+6x+3}{2\sqrt{x}}$.
Donc,

$$f'(x) = u'(x)e^{u(x)} = \frac{(5x^2+6x+3)\exp((x^2+2x+3)\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}.$$

9.12 b) Pour tout $x \neq \frac{1}{4}$, on pose $u(x) = \frac{2x+5}{4x-1}$. On a $u'(x) = \frac{2(4x-1) - 4(2x+5)}{(4x-1)^2} = -\frac{22}{(4x-1)^2}$. Donc,

$$f'(x) = 2u'(x)u(x) = 2 \times \left(-\frac{22}{(4x-1)^2}\right) \times \frac{2x+5}{4x-1} = -\frac{44(2x+5)}{(4x-1)^3}.$$

9.13 a) On a $f'' = (1-f^2)' = -2ff' = -2f(1-f^2) = -2f+2f^3$.

9.13 b) On a $f''' = (-2f+2f^3)' = -2f' + 6f'f^2 = -2(1-f^2) + 6(1-f^2)f^2 = -2+8f^2-6f^4$.

Fiche n° 10. Convexité

Réponses

- 10.1 $\textcircled{c}$
- 10.2 $\textcircled{b}$
- 10.3 a) $\mathcal{C}_2$
- 10.3 b) $\mathcal{C}_1$
- 10.3 c) $\textcircled{c}$
- 10.4 a) $\mathcal{C}_1$
- 10.4 b) $\mathcal{C}_2$
- 10.4 c) $\left[1, \frac{7}{2}\right]$
- 10.4 d) $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$
- 10.5 a) Croissante sur $\mathbb{R}$
- 10.5 b) $\mathbb{R}$
- 10.5 c) Croissante sur $\mathbb{R}$
- 10.5 d) $\mathbb{R}$
- 10.6 a) $\begin{array}{l} \text{Décroissante sur }]-\infty, \frac{7}{2}] \\ \text{croissante sur } [\frac{7}{2}, +\infty[\end{array}$
- 10.6 b) $\left[\frac{7}{2}, +\infty\right[$
- 10.6 c) $\begin{array}{l} \text{Croissante sur }]-\infty, -3] \\ \text{décroissante sur } [-3, +\infty[\end{array}$
- 10.6 d) $] -\infty, -3]$
- 10.7 a) $e^x + e^{-x}$
- 10.7 b) $\mathbb{R}$
- 10.7 c) $e^x - e^{-x}$
- 10.7 d) $[0, +\infty[$
- 10.8 a) $6(1 - 6x^2)e^{-3x^2+2}$
- 10.8 b) $\left[\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right]$
- 10.9 a) $[-3, 2]$
- 10.9 b) $[-6, -3]$ et $[2, 4]$
- 10.9 c) -3 et 2
- 10.9 d) $\textcircled{c}$
- 10.9 e) $\textcircled{b}$
- 10.10 a) $[-2, 2]$
- 10.10 b) $[-5, -2]$ et $[2, 5]$
- 10.10 c) -2 et 2
- 10.10 d) $\textcircled{d}$
- 10.10 e) $\textcircled{c}$
- 10.10 f) $[-2, 2]$
- 10.11 a) $f'(x)e^{f(x)}$
- 10.11 b) $(f''(x) + f'(x)^2)e^{f(x)}$
- 10.11 c) $\textcircled{c}$

Corrigés

10.3 c) On utilise les variations de f' . D'après la courbe de f' , on sait que f' est décroissante sur $\left[-5, -\frac{3}{2}\right]$ et croissante sur $\left[-\frac{3}{2}, 2\right]$.

10.4 c) On utilise le signe de f'' déterminé avec la courbe $\mathcal{C}_1$: la fonction f'' est positive sur $\left[1, \frac{7}{2}\right]$.

10.4 d) On utilise le signe de f'' déterminé avec la courbe $\mathcal{C}_1$: la fonction f'' est négative sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

10.5 a) On connaît les variations des fonctions de référence $\left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^3 \end{array} \right.$ et $\left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x \end{array} \right.$, toutes les deux croissantes sur $\mathbb{R}$. La fonction f' est donc croissante sur $\mathbb{R}$.

10.5 c) On connaît les variations des fonctions de référence $\left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 2x \end{array} \right.$ et $\left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto e^x \end{array} \right.$, toutes les deux croissantes sur $\mathbb{R}$. La fonction composée f' est donc croissante sur $\mathbb{R}$.

10.6 a) On factorise $f'(x) = x(x-7)$, sous la forme $a(x-x_1)(x-x_2)$ avec $a > 0$. Alors, f' est décroissante sur $\left]-\infty, \frac{x_1+x_2}{2}\right] = \left]-\infty, \frac{7}{2}\right]$, puis croissante sur $\left[\frac{x_1+x_2}{2}, +\infty\right[= \left[\frac{7}{2}, +\infty\right[$.

10.6 c) On a $f'(x) = -4x^2 - 24x - 36$: on reconnaît une fonction polynomiale de degré 2, pour laquelle on a « $\frac{-b}{2a} = -3$ » et « $a < 0$ ». La fonction f' est donc croissante sur $]-\infty, -3]$ puis décroissante sur $[-3, +\infty[$.

10.7 a) On a $f'(x) = e^x - e^{-x}$, puis $f''(x) = e^x + e^{-x}$.

10.7 b) Soit x un réel. On a $e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$, donc $f''(x) > 0$.

10.7 c) On a $f'(x) = e^x + e^{-x}$, puis $f''(x) = e^x - e^{-x}$.

10.7 d) On a les équivalences suivantes :

$$e^x - e^{-x} \geq 0 \iff e^x \geq e^{-x} \iff \frac{e^x}{e^{-x}} \geq 1 \iff e^{2x} \geq 1 \iff 2x \geq \ln(1) \iff 2x \geq 0.$$

Donc f'' est positive sur $[0, +\infty[$ et négative sur $]-\infty, 0]$.

10.8 a) On a $f'(x) = -e^{-3x^2+2}(-6x) = 6xe^{-3x^2+2}$ et $f''(x) = 6e^{-3x^2+2} + 6x(-6x)e^{-3x^2+2} = 6(1-6x^2)e^{-3x^2+2}$.

10.8 b) On a les équivalences suivantes

$$f''(x) \geq 0 \iff 6(1-6x^2)e^{-3x^2+2} \geq 0 \iff 1-6x^2 \geq 0 \iff \frac{1}{6} \geq x^2 \iff \frac{1}{\sqrt{6}} \geq |x|.$$

Donc $f''(x) \geq 0$ si, et seulement si, $x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right]$.

10.9 a) La courbe $\mathcal{C}_{f'}$ indique que f' est croissante uniquement sur $[-3, 2]$. Donc f est convexe sur $[-3, 2]$.

10.9 b) La courbe $\mathcal{C}_{f'}$ indique que f' est décroissante uniquement sur $[-6, -3]$ et sur $[2, 4]$. Donc f est concave sur $[-6, -3]$ et $[2, 4]$.

.....
10.9 d) On a f convexe sur $[-3, 2]$ donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus des tangentes pour les points d'abscisses appartenant à $[-3, 2]$. On a bien $0 \in [-3, 2]$, d'où la conclusion.

10.9 e) On a $-1 \in [-3, 2]$, $1 \in [-3, 2]$ et f convexe sur $[-3, 2]$. Donc, la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessous des sécantes pour les points d'abscisses appartenant à $[-1, 1]$.

10.10 a) D'après le tableau de variations de f' , la fonction f' est croissante uniquement sur $[-2, 2]$, donc f est convexe sur $[-2, 2]$.

10.10 b) D'après le tableau de variations de f' , f' est décroissante uniquement sur $[-5, -2]$ et sur $[2, 5]$, donc f est concave sur $[-5, -2]$ et $[2, 5]$.

10.11 b) On a $g''(x) = f''(x)e^{f(x)} + f'(x)e^{f(x)} \times f'(x) = (f''(x) + f'(x)^2)e^{f(x)}$.

10.11 c) Soit $x \in I$. On a $f''(x) \geq 0$ car f est convexe sur I .

Donc, on a $f''(x) + f'(x)^2 \geq 0$, et donc $(f''(x) + f'(x)^2)e^{f(x)} \geq 0$. Donc $g''(x) \geq 0$ et g est convexe sur I .

Fiche n° 11. Primitives I

Réponses

11.1 a) $x^3 - x + C$

11.2 c) $\frac{2}{3x^3} + C$

11.4 a) $\frac{1}{2}e^{x^2} + C$

11.1 b) . $\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^6 + 2x + C$

11.2 d) $5e^x - 6x + C$

11.4 b) $\sqrt{2x+1} + C$

11.2 a) $\frac{-1}{2x^2} + C$

11.3 a) $\frac{-2}{x-2} + C$

11.4 c) $\frac{1}{3}(x-1)^3 + C$

11.2 b) $2\sqrt{x} + 2x^2 + C$

11.3 b) $\frac{-3}{2(2x-1)^2} + C$

11.4 d) $\frac{1}{18}(3x-2)^6 + C$

Corrigés

11.1 a) L'expression d'une primitive de x^n est $\frac{1}{n+1}x^{n+1}$. Donc, une primitive de $3x^2$ est $3 \times \frac{1}{3}x^3 = x^3$. L'expression d'une primitive de $3x^2 - 1$ est donc $x^3 - x + C$ où C désigne une constante réelle.

11.2 c) On procède comme précédemment. L'expression d'une primitive de $\frac{-2}{x^4}$ est $\frac{2}{3x^3} + C$.

11.2 d) L'expression d'une primitive de e^x est e^x donc l'expression d'une primitive de $5e^x - 6$ est $5e^x - 6x + C$.

11.3 a) On reconnaît une expression de la forme $2\frac{u'}{u^2}$ où $u(x) = x - 2$. Par conséquent, les primitives de $\frac{2}{(x-2)^2}$ sont les expressions $\frac{-2}{u(x)} + C$, c'est-à-dire $\frac{-2}{x-2} + C$.

11.3 b) On reconnaît une expression de la forme $\frac{u'}{u^n}$ où $u(x) = 2x - 1$.

11.4 a) À un facteur près, on reconnaît une expression de la forme $u'e^u$ où $u(x) = x^2$, dont une primitive est e^u .

11.4 b) On reconnaît une expression de la forme $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ où $u(x) = 2x + 1$, dont une primitive est $\sqrt{u}$.

11.4 c) On reconnaît une expression de la forme $u'u^{n-1}$ où $u(x) = x - 1$ et $n = 3$, dont une primitive est $\frac{u^{n+1}}{n+1}$.

11.4 d) À un facteur près, on reconnaît une expression de la forme $nu'u^{n-1}$ où $u(x) = 3x - 2$ et $n = 6$. Ainsi, les primitives cherchées sont de la forme $\frac{1}{18}(3x-2)^6 + C$.

Fiche n° 12. Probabilités - Révisions

Réponses

12.1 a) $0,012$	12.7 b) $\frac{1}{20}$	12.12 a) $\frac{7}{10}$	12.19 a) $\frac{1}{4}$
12.1 b) $0,73$	12.7 c) $\frac{2}{5}$	12.12 b) $\frac{4}{5}$	12.19 b) $\frac{3}{28}$
12.1 c) $\frac{49}{24}$	12.7 d) $\frac{1}{4}$	12.12 c) $\frac{6}{25}$	12.20 a) $\frac{1}{2}$
12.2 a) $0,25$	12.7 e) $\frac{3}{5}$	12.12 d) $\frac{5}{8}$	12.20 b) $\frac{3}{10}$
12.2 b) $\frac{31}{6}$	12.7 f) $\frac{1}{4}$	12.12 e) $\frac{48}{125}$	12.20 c) $\frac{1}{2}$
12.3 a) .. $0,6 - 0,55p$	12.8 a) $\frac{3}{4}$	12.13 a) $0,16$	12.20 d) $\frac{1}{10}$
12.3 b) $1 - a$	12.8 b) $\frac{3}{4}$	12.13 b) $0,2$	12.21 a) 1
12.4 a) $0,48$	12.8 c) $\frac{n}{n+1}$	12.13 c) $0,84$	12.21 b) $\frac{1}{3}$
12.4 b) $0,6$	12.8 d) $\frac{n}{3n+2}$	12.14 a) $0,1$	12.21 c) $P_C(J) P(C) + P_{\overline{C}}(J) P(\overline{C})$
12.4 c) $0,45$	12.9 a) $\frac{1}{4}$	12.14 b) $0,7$	12.21 d) $\frac{11}{15}$
12.4 d) $0,67$	12.9 b) $\frac{3}{8}$	12.15 a) $0,48$	12.22 a) $\frac{2}{3}$
12.4 e) $0,33$	12.9 c) $\frac{1}{2}$	12.15 b) $0,87$	12.22 b) $\frac{1}{2}$
12.4 f) $0,15$	12.9 d) $\frac{7}{16}$	12.15 c) $0,39$	12.22 c) 1
12.5 a) $\frac{11}{20}$	12.9 e) $\frac{9}{16}$	12.16 a) $\frac{2+x}{3+x}$	12.22 d) $P_{R_1}(R_2) P(R_1) + P_{\overline{R_1}}(R_2) P(\overline{R_1})$
12.5 b) $\frac{7}{10}$	12.9 f) $\frac{6}{7}$	12.16 b) ... $\frac{3}{4(3+x)}$	12.22 e) $\frac{2}{3}$
12.5 c) $\frac{1}{4}$	12.10 a) $0,55$	12.16 c) .. $\frac{17+4x}{12(3+x)}$	12.23 a) $\frac{1}{9}$
12.5 d) $\frac{9}{10}$	12.10 b) $0,27$	12.16 d) ... $\frac{9}{17+4x}$	12.23 b) $\frac{5}{18}$
12.5 e) $\frac{1}{10}$	12.11 a) $0,4$	12.17 a) $0,15$	12.23 c) $\frac{11}{18}$
12.5 f) $\frac{9}{20}$	12.11 b) $0,04$	12.17 b) $0,46$	
12.6 a) $0,85$	12.11 c) $0,11$	12.18 a) 2	
12.6 b) $0,7$		12.18 b) 1	
12.7 a) $\frac{4}{5}$			

12.23 d)..... $\boxed{\frac{3}{2}}$

12.23 e)..... $\boxed{\frac{17}{36}}$

Corrigés

12.3 a) On a $p \times 0,05 + (1 - p) \times 0,6 = 0,05p + 0,6 - 0,6p = 0,6 - 0,55p$.

12.3 b) On a $-a(1 - a) + (1 - a^2) = -a + a^2 + 1 - a^2 = 1 - a$.

12.4 a) On a $P(\bar{A}) = 0,15 + 0,33 = 0,48$.

12.4 b) On a $P(B) = 0,45 + 0,15 = 0,6$.

12.4 c) On a $P(A \cap B) = 0,45$.

12.4 d) On a $P(A \cup B) = 0,45 + 0,07 + 0,15 = 0,67$.

12.5 a) On a $P(\bar{A}) = \frac{275}{500} = \frac{25 \times 11}{25 \times 20} = \frac{11}{20}$.

12.5 b) On a $P(B) = \frac{350}{500} = \frac{50 \times 7}{50 \times 10} = \frac{7}{10}$.

12.5 d) On a $P(A \cup B) = \frac{125 + 225 + 100}{500} = \frac{450}{500} = \frac{9}{10}$.

12.5 e) On a $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{50}{500} = \frac{1}{10}$.

12.5 f) On a $P(\bar{A} \cap B) = \frac{225}{500} = \frac{9 \times 25}{20 \times 25} = \frac{9}{20}$.

12.6 a) Comme $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$, on a $P(A \cup B) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - 0,15 = 0,85$.

12.6 b) On a $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0,3 = 0,7$.

12.7 a) L'énoncé permet de remplir le tableau :

	S	$\bar{S}$	Total
R	25	75	100
$\bar{R}$	100	300	400
Total	125	375	500

On obtient donc $P(\bar{R}) = \frac{400}{500} = \frac{4}{5}$.

12.7 b) On a $P(S \cap R) = \frac{25}{500} = \frac{1}{20}$.

12.7 c) On a $P(S \cup R) = \frac{25 + 75 + 100}{500} = \frac{200}{500} = \frac{2}{5}$.

12.7 d) On a $P(S) = \frac{125}{500} = \frac{1}{4}$.

12.7 e) On a $P(\overline{S} \cap \overline{R}) = \frac{300}{500} = \frac{3}{5}$.

12.7 f) On a $P_R(S) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$.

12.8 a) Le total est $n^2 + 2n + 2n^2 + n + n + n^2 = 4n^2 + 4n$, donc on a $P(\overline{A}) = \frac{2n + 2n^2 + n + n^2}{4n^2 + 4n} = \frac{3n^2 + 3n}{4n^2 + 4n} = \frac{3}{4}$.

12.8 b) On a $P(A \cup B) = \frac{n^2 + 2n + 2n^2 + n}{4n^2 + 4n} = \frac{3n^2 + 3n}{4n^2 + 4n} = \frac{3}{4}$.

12.8 c) On a $P_A(B) = \frac{n^2}{n^2 + n} = \frac{n}{n + 1}$.

12.8 d) On a $P_B(A) = \frac{n^2}{3n^2 + 2n} = \frac{n}{3n + 2}$.

12.9 b) On a $P(C \cap \overline{D}) = P(C) \times P_C(\overline{D}) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$.

12.9 d) Les événements C et $\overline{C}$ forment une partition de l'univers, la formule des probabilités totales donne :

$$P(D) = P(C) \times P_C(D) + P(\overline{C}) \times P_{\overline{C}}(D) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{7}{16}.$$

12.9 e) On a $P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 1 - \frac{7}{16} = \frac{9}{16}$.

12.9 f) On a $P_D(C) = \frac{P(D \cap C)}{P(D)} = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{1}{2}}{\frac{7}{16}} = \frac{3}{8} \times \frac{16}{7} = \frac{6}{7}$.

12.10 b) On a $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0,45 \times 0,6 = 0,27$.

12.11 a) On a $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \times P_A(B)}{P(B)} = \frac{0,05 \times 0,8}{0,1} = 0,4$.

12.11 b) On a $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0,05 \times 0,8 = 0,04$.

12.11 c) On a $P(\overline{A} \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,05 + 0,1 - 0,04 = 0,11$.

12.12 a) On a $P(\overline{J}) = 1 - \frac{30}{100} = \frac{70}{100} = \frac{7}{10}$.

12.12 b) On a $P_J(S) = 1 - P_J(\overline{S}) = 1 - \frac{20}{100} = \frac{80}{100} = \frac{4}{5}$.

12.12 c) On a $P(J \cap S) = P(J) \times P_J(S) = \frac{3}{10} \times \frac{8}{10} = \frac{24}{100} = \frac{6}{25}$.

12.12 d) Comme les événements J et $\bar{J}$ forment une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales, on a $P(S) = P(J \cap S) + P(\bar{J} \cap S) = \frac{6}{25} + \frac{7}{10} \times \frac{55}{100} = \frac{6}{25} + \frac{77}{200} = \frac{48}{200} + \frac{77}{200} = \frac{125}{200} = \frac{5}{8}$.

12.12 e) On a $P_S(J) = \frac{P(S \cap J)}{P(S)} = \frac{6/25}{5/8} = \frac{6}{25} \times \frac{8}{5} = \frac{48}{125}$.

12.13 a) On a $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ car A et B sont indépendants. On obtient $P(A \cap B) = 0,8 \times 0,2 = 0,16$.

12.13 b) Les événements A et B sont indépendants, donc $P_A(B) = P(B)$. On obtient $P_A(B) = 0,2$.

12.13 c) On a $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,8 + 0,2 - 0,16 = 0,84$.

12.14 c) Les événements A, B et C forment une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales, on a donc $P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D) = P(A) \times P_A(D) + P(B) \times P_B(D) + P(C) \times P_C(D)$.
D'où $P(D) = 0,3 \times 0,7 + 0,6 \times 0,6 + 0,1 \times 0,3 = 0,21 + 0,36 + 0,03 = 0,6$.

12.14 d) On a $P_D(A) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0,3 \times 0,7}{0,6} = \frac{0,3 \times 0,7}{0,3 \times 2} = 0,35$.

12.15 a) On a $P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ car A et B sont indépendants. On obtient $P(B) = \frac{0,36}{0,75} = 0,48$.

12.15 b) On a $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,75 + 0,48 - 0,36 = 0,87$.

12.15 c) On a $P(A \cap \bar{B}) = P(A) \times P(\bar{B})$ car A et $\bar{B}$ sont indépendants. Comme $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,48 = 0,52$, on obtient $P(A \cap \bar{B}) = 0,52 \times 0,75 = 0,39$.

12.16 b) On a $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = \frac{1}{3+x} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4(3+x)}$.

12.16 c) Les événements A et $\bar{A}$ forment une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales, on a $P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B) = \frac{1}{3+x} \times \frac{3}{4} + \frac{2+x}{3+x} \times \frac{1}{3} = \frac{9}{12(3+x)} + \frac{4(2+x)}{12(3+x)} = \frac{17+4x}{12(3+x)}$.

12.16 d) On a $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{12+4x}}{\frac{17+4x}{36+12x}} = \frac{3}{12+4x} \times \frac{36+12x}{17+4x} = \frac{9}{17+4x}$.

12.17 b) On a $P(X \leq 4) = 0,1 + 0,15 + 0,2 + 0,01 = 0,46$.

12.18 a) On a $E(X) = \sum_{i=1}^4 x_i \times P(X = x_i) = 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{2}{10} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{4}{10} = \frac{20}{10} = 2$.

12.18 b) On a $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \sum_{i=1}^4 x_i^2 \times P(X = x_i) - 2^2$. Donc, on a

$$V(X) = 0^2 \times \frac{1}{10} + 1^2 \times \frac{2}{10} + 2^2 \times \frac{3}{10} + 3^2 \times \frac{4}{10} - 2^2 = \frac{50}{10} - 4 = 1.$$

12.19 a) On a $P(X = 3) = P(X \leq 3) - P(X \leq 2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

12.20 a) La somme des probabilités vaut 1.

12.20 b) On a $P(X \leq 1) = P\left(X = -\frac{3}{2}\right) + P(X = 0)$.

12.20 c) On a $P(X \geq 3) = P(X = 3)$.

12.20 d) On a $P(X < 0) = P\left(X = -\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{10}$.

12.21 c) On utilise la formule des probabilités totales ou une représentation avec un arbre.

12.21 d) On a $\frac{60}{100} \times 1 + \frac{40}{100} \times \frac{1}{3} = \frac{3 \times 3 + 2}{3 \times 5} = \frac{11}{15}$.

12.22 b) Sachant qu'une boule rouge a été tirée, il reste une boule rouge et une boule noire dans l'urne.

12.22 c) Sachant qu'une boule noire a été tirée, il reste uniquement deux boules rouges dans l'urne.

12.22 d) On utilise la formule des probabilités totales ou une représentation avec un arbre.

12.22 e) On a $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 1 = \frac{2}{3}$.

12.23 a) On dessine un arbre et la probabilité recherchée vaut : $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

12.23 b) On dessine un arbre et la probabilité recherchée vaut : $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{3+2}{18} = \frac{5}{18}$.

12.23 c) On dessine un arbre et la probabilité recherchée vaut : $\frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{6+3+2}{18} = \frac{11}{18}$.

12.23 d) En utilisant la loi de X déterminée précédemment et la définition de l'espérance, on trouve

$$E(X) = 1 \times \frac{11}{18} + 2 \times \frac{5}{18} + 3 \times \frac{1}{9} = \frac{11+10+6}{18} = \frac{3}{2}.$$

12.23 e) En utilisant la loi de X déterminée précédemment et la définition de la variance, on trouve

$$\begin{aligned} V(X) &= \left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 \times \frac{11}{18} + \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 \times \frac{5}{18} + \left(3 - \frac{3}{2}\right)^2 \times \frac{1}{9} = \frac{(2-3)^2 \times 11 + (4-3)^2 \times 5 + (6-3)^2 \times 2}{4 \times 18} \\ &= \frac{11+5+18}{4 \times 18} = \frac{17}{36}. \end{aligned}$$

Fiche n° 13. Autour de la loi binomiale

Réponses

13.1 a)	$2x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 7x - 2$	13.5 b).....	0	13.10 b).....	$\mathcal{B}(10; 0,9)$
13.1 b)	$x^5 - 2x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 4x + 4$	13.5 c).....	0	13.10 c)	$(0,1)^{10}$
13.1 c) ...	$4x^4 + 16x^3 + 5x^2 - 5x - 2$	13.5 d).....	$\frac{n+1}{2^n}$	13.10 d).....	$9 \times (0,1)^9$
13.1 d)	$x^4 - 6x^2 - 3x + 2$	13.6 a).....	(d)	13.10 e) .	$45 \times (0,9)^2 \times (0,1)^8$
13.2 a).....	$(2x-3)(2x+3)$	13.6 b).....	(b)	13.10 f)	$(0,9)^9$
13.2 b).....	$(3x+1)^2$	13.6 c).....	(d)	13.10 g).....	$(0,9)^{10}$
13.2 c)	$(x-1)(x-2)$	13.7 a).....	$\left(5, \frac{1}{2}\right)$	13.10 h)	9
13.2 d)	$x(x+3)(x-1)$	13.7 b)	$\left(3, \frac{1}{6}\right)$	13.10 i)	0,01
13.3	(b)	13.7 c).....	$\left(6, \frac{1}{4}\right)$	13.10 j)	$\mathcal{B}(10; 0,99)$
13.4 a).....	$(1-p)^n$	13.8 a).....	non	13.10 k).....	9,9
13.4 b)	p^n	13.8 b)	non	13.11 a).....	$\left(\frac{5}{8}\right)^{10}$
13.4 c)	$np(1-p)^{n-1}$	13.8 c).....	$\left(n, \frac{1}{6}\right)$	13.11 b)	$1 - \left(\frac{5}{8}\right)^{10}$
13.4 d)	$np^{n-1}(1-p)$	13.8 d)	$\left(n, \frac{1}{2}\right)$	13.11 c).....	$1 - 7 \times \left(\frac{5}{8}\right)^{10}$
13.4 e)	$\frac{n(n-1)}{2} p^2(1-p)^{n-2}$	13.9 a).....	$\left(4, \frac{3}{8}\right)$	13.11 d).....	$\frac{1 - 7 \times \left(\frac{5}{8}\right)^{10}}{1 - \left(\frac{5}{8}\right)^{10}}$
13.4 f) .	$\frac{n(n-1)}{2} p^{n-2}(1-p)^2$	13.9 b)	non	13.12 a).....	$\frac{n}{4}$
13.5 a)	$\binom{n}{k} \frac{1}{2^n}$	13.10 a).....	$\mathcal{B}(0,9)$	13.12 b)	0

Corrigés

13.1 a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$(x^2 + 3x + 1)(2x^2 - x - 2) = 2x^4 - x^3 - 2x^2 + 6x^3 - 3x^2 - 6x + 2x^2 - x - 2 = 2x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 7x - 2.$$

13.2 a) On a $4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2 = (2x-3)(2x+3)$ d'après l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

13.2 b) On reconnaît une identité remarquable : on a $9x^2 + 6x + 1 = (3x)^2 + 2 \times (3x) \times 1 + 1^2 = (3x+1)^2$.

13.2 c) L'expression $x^2 - 3x + 2$ est une expression polynomiale du second degré. Le discriminant associé vaut $(-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1$ et les racines associées sont $\frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2 \times 1} = 1$ et $\frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \times 1} = 2$.

13.2 d) On a $(x^2 + 3x)(x - 2) + x(x + 3) = x(x + 3)(x - 2) + x(x + 3) = x(x + 3)(x - 2 + 1) = x(x + 3)(x - 1)$.

13.3 D'après la formule du cours, on a $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$.

13.4 a) Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$. En particulier, pour $k = 0$, on obtient $P(X = 0) = \binom{n}{0} p^0 (1 - p)^{n-0} = 1 \times 1 \times (1 - p)^n = (1 - p)^n$. On procède de même dans les calculs suivants.

13.5 a) On a $P(X = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+n-k} = \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}$.

13.5 b) On a $P(X = 0) = \binom{n}{0} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n}$ et $P(X = n) = \binom{n}{n} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n}$ donc $P(X = 0) - P(X = n) = 0$.

13.5 c) De même, on a $P(X = k) = \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}$ et $P(X = n - k) = \binom{n}{n - k} \frac{1}{2^n} = \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}$ d'après la propriété de symétrie des coefficients binomiaux, donc $P(X = k) - P(X = n - k) = 0$.

13.5 d) L'événement $\{X \leq 1\}$ est la réunion des deux événements incompatibles $\{X = 0\}$ et $\{X = 1\}$. On a donc $P(X \leq 1) = P(\{X = 0\} \cup \{X = 1\}) = P(X = 0) + P(X = 1) = \binom{n}{0} \frac{1}{2^n} + \binom{n}{1} \frac{1}{2^n} = \frac{1 + n}{2^n}$.

13.6 a) Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a $P(X = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{n-k}$. En particulier, pour $k = 0$, on a $P(X = 0) = \binom{n}{0} \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^{n-0} = 1 \times 1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{3^n}{4^n}$. On procède de même dans les calculs suivants.

13.7 a) On peut considérer le lancer d'une pièce de monnaie comme une épreuve de Bernoulli (expérience à deux issues : succès et échec), dans laquelle l'événement « obtenir pile » représente le succès. Puisque la variable aléatoire X compte le nombre de succès lorsqu'on répète indépendamment cette épreuve, elle suit une loi binomiale. L'épreuve étant répétée 5 fois et la probabilité d'un succès étant $\frac{1}{2}$, X suit la loi binomiale de paramètre $\left(5, \frac{1}{2}\right)$.

13.7 b) On peut considérer le lancer d'un dé à six faces comme une épreuve de Bernoulli, dans laquelle l'événement « obtenir 1 » représente le succès. Puisque la variable aléatoire X compte le nombre de succès lorsqu'on répète indépendamment cette épreuve, elle suit une loi binomiale. L'épreuve étant répétée 3 fois et la probabilité d'un succès étant $\frac{1}{6}$, X suit la loi binomiale de paramètre $\left(3, \frac{1}{6}\right)$.

13.7 c) On peut considérer le tirage d'une boule de l'urne comme une épreuve de Bernoulli, dans laquelle l'événement « obtenir une boule bleue » représente le succès. Puisque la variable aléatoire X compte le nombre de succès lorsqu'on répète 6 fois l'expérience, elle suit la loi binomiale de paramètre $\left(6, \frac{1}{4}\right)$.

13.8 a) Comme la variable aléatoire X ne peut pas prendre la valeur 0, X ne suit pas une loi binomiale.

13.8 b) Comme la variable aléatoire X ne peut pas prendre la valeur 0, X ne suit pas une loi binomiale.

13.8 c) On peut considérer le lancer d'un dé à six faces comme une épreuve de Bernoulli, dans laquelle l'événement « obtenir 6 » représente le succès. Puisque la variable aléatoire X compte le nombre de succès lorsqu'on répète indépendamment cette épreuve, elle suit une loi binomiale. L'épreuve étant répétée n fois et la probabilité d'un succès étant $\frac{1}{6}$, X suit la loi binomiale de paramètre $\left(n, \frac{1}{6}\right)$.

13.8 d) On peut considérer le lancer d'un dé à six faces comme une épreuve de Bernoulli, dans laquelle l'événement « obtenir un nombre pair » représente le succès. Puisque la variable aléatoire X compte le nombre de succès lorsqu'on répète indépendamment cette épreuve, elle suit une loi binomiale. L'épreuve étant répétée n fois et la probabilité d'un succès étant $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, X suit la loi binomiale de paramètre $\left(n, \frac{1}{2}\right)$.

13.9 b) Intuitivement : les tirages n'étant ici plus indépendants, X ne représente pas le nombre de succès lors de la répétition indépendante d'une même épreuve de Bernoulli et donc X ne suit pas une loi binomiale.

13.10 a) Puisque la variable aléatoire X_1 ne peut prendre que les valeurs 0 et 1, sa loi est la loi de Bernoulli de paramètre $P(X_1 = 1) = p = 0,9$.

13.10 b) La variable aléatoire X est la somme de 10 variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre $p = 0,9$. Donc, X suit la loi binomiale de paramètre $(10; 0,9)$.

13.10 c) Puisque X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10, 0,9)$, on a $P(X = k) = \binom{10}{k} (0,9)^k (1 - 0,9)^{10-k}$ pour tout $k \in \llbracket 0, 10 \rrbracket$. En particulier, pour $k = 0$, on obtient $P(X = 0) = \binom{10}{0} (0,9)^0 (0,1)^{10} = (0,1)^{10}$.

13.10 h) D'après la formule de l'espérance d'une loi binomiale, on a $E(X) = 10 \times 0,9 = 9$.

13.10 i) Pour $j \in \{1, 2\}$, on note A_j l'événement : « le j -ième relecteur a corrigé la première erreur ». Les événements A_1 et A_2 sont indépendants, donc leurs contraires $\overline{A_1}$ et $\overline{A_2}$ le sont aussi. On a ainsi

$$P(X_1 = 0) = P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) = P(\overline{A_1}) P(\overline{A_2}) = 0,1 \times 0,1 = 0,01.$$

13.10 j) La variable aléatoire X est la somme de 10 variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre $p = 0,99$, donc X suit la loi binomiale de paramètre $(10; 0,99)$.

13.10 k) D'après la formule de l'espérance d'une loi binomiale, on a $E(X) = 10 \times 0,99 = 9,9$.

13.11 a) La variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{B}\left(10, \frac{3}{8}\right)$. Donc, on a $P(X = 0) = \binom{10}{0} \left(\frac{3}{8}\right)^0 \left(1 - \frac{3}{8}\right)^{10-0} = \left(\frac{5}{8}\right)^{10}$.

13.11 b) Les événements $\{X \geq 1\}$ et $\{X = 0\}$ étant contraires, on a $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{5}{8}\right)^{10}$.

13.11 c) Les événements $\{X \geq 2\}$ et $\{X \leq 1\}$ étant contraires, on a $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1)$. Or, l'événement $\{X \leq 1\}$ est la réunion des deux événements incompatibles $\{X = 0\}$ et $\{X = 1\}$. On a donc

$$\begin{aligned} P(X \leq 1) &= P(\{X = 0\} \cup \{X = 1\}) = P(X = 0) + P(X = 1) \\ &= \left(\frac{5}{8}\right)^{10} + \binom{10}{1} \left(\frac{3}{8}\right)^1 \left(\frac{5}{8}\right)^9 = \left(\frac{5}{8}\right)^{10} + \frac{30}{8} \left(\frac{5}{8}\right)^9 = \left(\frac{5}{8}\right)^{10} + 6 \left(\frac{5}{8}\right)^{10} = 7 \left(\frac{5}{8}\right)^{10}. \end{aligned}$$

Donc, $P(X \geq 2) = 1 - 7 \times \left(\frac{5}{8}\right)^{10}$.

.....

13.11 d) On a $P_{(X \geq 1)}(X \geq 2) = \frac{P(\{X \geq 2\} \cap \{X \geq 1\})}{P(X \geq 1)} = \frac{P(X \geq 2)}{P(X \geq 1)} = \frac{1 - 7 \times \left(\frac{5}{8}\right)^{10}}{1 - \left(\frac{5}{8}\right)^{10}}$.

.....

13.12 a) Pour commencer, il faut montrer que X suit la loi $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{4}\right)$. Puis, on en déduit que $E(X) = \frac{n}{4}$.

.....

13.12 b) Puisque chacune des X bonnes réponses rapporte 3 points et chacune des $n - X$ mauvaises réponses retire 1 point, la note est $N = 3 \times X - 1 \times (n - X) = 4X - n$. Donc, $E(N) = 4E(X) - n = 4 \frac{n}{4} - n = 0$.

.....

Fiche n° 14. Limites de fonctions et continuité

Réponses

14.1 a) $x^2 + x$

14.1 b) $x^2 + 1$

14.1 c) $x + 1 + x^2$

14.2 a) e^x

14.2 b) e^{2x}

14.2 c) e^{3x+1}

14.2 d) e^{4x+1}

14.3 a) $+\infty$

14.3 b) $-\infty$

14.3 c) 3

14.3 d) 0

14.4 a) 1

14.4 b) $-\frac{1}{2}$

14.5 a) $-\infty$

14.5 b) $+\infty$

14.5 c) 0

14.5 d) $-\infty$

14.6 a) 2

14.6 b) $+\infty$

14.6 c) $-\frac{1}{4}$

14.6 d) $\frac{1}{2}$

14.7 a) -2

14.7 b) $\frac{5}{2}$

14.8 a) 0

14.8 b) 1

14.9 a) Oui

14.9 b) Non

14.10 a) dérivable donc continue.

14.10 b) strictement décroissante sur $[2, 5]$.

14.10 c) l'intervalle $[f(5), f(2)]$

Corrigés

14.1 a) On a $\frac{x^3 + x^2}{x} = \frac{x(x^2 + x)}{x} = x^2 + x$.

14.2 a) On a $e^{2x} \times e^{-x} = e^{2x-x} = e^x$.

14.2 b) On a $\frac{e^{3x}}{e^x} = e^{3x-x} = e^{2x}$.

14.2 c) On a $\frac{e^{2x+1}}{e^{-x}} = e^{2x+1-(-x)} = e^{3x+1}$.

14.3 a) On simplifie $\frac{x^2 + 1}{x} = x + \frac{1}{x}$ et on en déduit la limite.

14.3 b) On factorise par les termes dominants en écrivant

$$\frac{x^3 + 1}{x^2 - x} = \frac{x^3 \left(1 + \frac{1}{x^3}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right)} = \frac{x \left(1 + \frac{1}{x^3}\right)}{1 - \frac{1}{x}}.$$

On en déduit la limite.

14.3 c) On factorise par les termes dominants en écrivant

$$\frac{3x^2 - 2}{x^2 + x} = \frac{x^2 \left(3 - \frac{2}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{3 - \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}}.$$

On en déduit la limite.

14.3 d) On factorise par les termes dominants en écrivant

$$\frac{x + 3}{x^2 + x + 1} = \frac{x \left(1 + \frac{3}{x}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1 + \frac{3}{x}}{x \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}.$$

On en déduit la limite.

14.4 a) On met en facteur les termes dominants. On trouve :

$$\frac{\sqrt{x^2 + x}}{x + 2} = \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)}}{x \left(1 + \frac{2}{x}\right)} = \frac{\sqrt{x^2} \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x \left(1 + \frac{2}{x}\right)} = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{1 + \frac{2}{x}}.$$

On en déduit la limite.

14.4 b) On procède comme ci-dessus en mettant x^4 en facteur dans la racine et x^2 en facteur au dénominateur.

14.5 a) On met au même dénominateur en écrivant $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$. On en déduit le résultat par quotient.

14.5 b) On y voit plus clair en développant : on a $(x+2)^2 - x^2 = 4x + 4$; on en déduit le résultat. On pouvait aussi factoriser en reconnaissant l'expression $a^2 - b^2$.

14.5 c) En l'absence d'idée, on peut mettre au même dénominateur et simplifier. Il est plus judicieux de multiplier « en haut et en bas » par x . On écrit

$$\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}} = \frac{1 - \frac{1}{x}}{\sqrt{x} + 1},$$

et on en déduit le résultat.

14.5 d) On développe

$$\left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 - x(x+1) = x^2 + 2\sqrt{x} + \frac{1}{x} - x^2 - x = x \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} - 1\right).$$

On en déduit le résultat.

14.6 a) On a $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x+1$. Donc, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 2$.

14.6 b) On a $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{x+1}{x-1}$. On en déduit le résultat.

.....

14.6 c) On a $\frac{x+2}{x^2-4} = \frac{x+2}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{x-2}$. Donc, $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{4}$.

.....

14.6 d) On a $\frac{2x-1}{4x^2-1} = \frac{2x-1}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{1}{2x+1}$. On en déduit le résultat.

.....

14.7 a) Le polynôme $x^2 - 3x + 2$ s'annule en 1 et 2, ainsi on a $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$. On en déduit

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{(x - 1)(x - 2)} = \frac{x + 1}{x - 2},$$

puis la limite demandée.

.....

14.7 b) Le polynôme $x^2 - x - 6$ s'annule en 3 et -2 , ainsi on a $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$. On en déduit

$$\frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 2x} = \frac{(x - 3)(x + 2)}{x(x + 2)} = \frac{x - 3}{x},$$

puis la limite demandée.

.....

14.8 a) On reconnaît le taux d'accroissement de $\cos$ en 0. Puisque $\cos$ est dérivable en 0, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - \cos(0)}{x - 0} = \cos'(0) = -\sin(0) = 0.$$

.....

14.8 b) On reconnaît le taux d'accroissement de $\sin$ en 0. Puisque la fonction $\sin$ est dérivable en 0, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = \sin'(0) = \cos(0) = 1.$$

.....

Fiche n° 15. Droites dans l'espace

Réponses

15.1 a)	$2^{n+1} - 1$	15.5 a)	oui	15.12 b)	oui
15.1 b)	$3 \times \frac{3^n - 1}{2}$	15.5 b)	non	15.12 c)	non
15.1 c)	$\frac{4^{n+1} - 1}{3}$	15.6 a)	3	15.12 d)	$x \in \mathbb{R}$
15.1 d)	$\frac{e^{n+1} - 1}{e - 1}$	15.6 b)	7	15.12 e)	1
15.2 a)	$[-1, 7]$	15.7 a)	non	15.13 a)	-3
15.2 b) ..	$] -\infty, -3] \cup [2, +\infty[$	15.7 b)	$(0, -1, 1)$	15.13 b)	-2
15.2 c)	$[-4, 10]$	15.8 a)	$(-1, -3)$	15.13 c)	impossible
15.3 a)	non	15.8 b)	$x = 2$	15.13 d) ..	$(2, -2)$ et $(-4, -8)$
15.3 b)	oui	15.9 a)	non	15.14 a)	$\emptyset$
15.3 c)	oui	15.9 b)	non	15.14 b)	$M(-1, 10, -5)$
15.3 d)	non	15.9 c)	$(5, 2)$	15.14 c)	$\emptyset$
15.3 e)	oui	15.10 a)	non	15.14 d)	$\emptyset$
15.4 a)	oui	15.10 b)	oui	15.15 a)	$m = 4, M(4, 1, 0)$
15.4 b)	non	15.10 c)	oui	15.15 b)	$m = \frac{3}{8}$
		15.11	$\frac{7}{2}$		
		15.12 a) ...	$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \vec{k} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$		

Corrigés

15.1 a) C'est la somme des termes d'une suite géométrique de raison 2 entre les rangs 0 et n .

15.1 b) C'est la somme des termes d'une suite géométrique de raison 3 entre les rangs 1 et n : on a

$$\sum_{k=1}^n 3^k = 3 \sum_{k=0}^{n-1} 3^k = 3 \times \frac{3^n - 1}{2}.$$

15.1 c) Observons que $2^{2k} = 4^k$ pour tout entier k . On calcule donc la somme des termes d'une suite géométrique de raison 4 entre les rangs 0 et n .

15.1 d) On calcule donc la somme des termes d'une suite géométrique de raison e entre les rangs 0 et n .

15.2 a) On a les équivalences : $|x - 3| \leq 4 \iff -4 \leq x - 3 \leq 4 \iff -1 \leq x \leq 7$.

15.2 b) On a les équivalences : $|2x + 1| \geq 5 \iff (2x + 1 \geq 5 \text{ ou } 2x + 1 \leq -5) \iff x \geq 2 \text{ ou } x \leq -3$.

15.2 c) On a les équivalences : $|-x + 3| \leq 7 \iff |x - 3| \leq 7 \iff -7 \leq x - 3 \leq 7 \iff -4 \leq x \leq 10$.

15.3 a) Ces deux vecteurs étant non nuls, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel λ tel que $\vec{u} = \lambda \vec{v}$, ce qui signifie $2 = \lambda \times (-1)$, $4 = \lambda \times 3$ et $-6 = \lambda \times 2$. Comme $\frac{2}{-1} \neq \frac{4}{3}$, un tel nombre réel λ ne peut pas exister.

15.4 a) Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ n'étant pas colinéaires, les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement s'il existe deux réels α et β vérifiant $\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$, ce qui donne un système de trois équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ 2\alpha + \beta = 3 \\ \alpha + 2\beta = 3. \end{cases}$$

Ici, il y a une solution évidente $\alpha = \beta = 1$.

15.4 b) Le système à résoudre s'écrit $\begin{cases} -2\alpha + \beta = 1 \\ \alpha + \beta = 1 \\ 3\alpha + \beta = -3 \end{cases}$. Les deux premières équations donnent $\alpha = 0$ et $\beta = 1$, or le couple $(0, 1)$ ne vérifie pas la troisième équation. Il n'y a donc pas de solution au système considéré.

15.5 a) On a $\vec{w} = \frac{7}{3}\vec{u} - \frac{19}{3}\vec{v}$. Donc, les vecteurs considérés sont coplanaires.

15.6 a) Toujours la même démarche : le système à résoudre s'écrit $\begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ 2\alpha + \beta = 3 \\ \alpha + 2\beta = m \end{cases}$. Les deux premières équations donnent $\alpha = \beta = 1$; d'où, en reportant dans la troisième, $m = 3$.

15.6 b) On trouve comme ci-dessus $\vec{w} = -2\vec{u} + 3\vec{v}$ pour $m = 7$.

15.7 b) Là encore, il s'agit d'un système de trois équations à trois inconnues (a , b et c) à résoudre.

15.8 a) On cherche (a, b) de telle sorte que le vecteurs $\overrightarrow{AC}$ soit colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$, c'est-à-dire qu'on cherche un scalaire λ tel que $\begin{pmatrix} a-1 \\ b+2 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ce qui donne $\lambda = -1$ puis $a = -1$ et $b = -3$.

15.8 b) On cherche x de telle sorte que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$ soient colinéaires, ce qui est réalisé si, et seulement si, $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{EF}$ et $x = 2$.

15.9 a) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont jamais colinéaires !

15.9 c) Il suffit de regarder la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$.

15.10 a) Pour commencer, remarquons que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\beta\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

On cherche (α, β) vérifiant $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$: ce système n'admet pas de solution.

15.10 b) Les points sont bien coplanaires : en effet, on a $B = D$!

15.10 c) On trouve $\overrightarrow{AD} = \frac{27}{7}\overrightarrow{AB} - \frac{18}{7}\overrightarrow{AC}$.

15.11 On cherche α, β vérifiant $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$. Les deux dernières équations permettent de trouver α et β , d'où l'unique valeur de a convenable en reportant dans la première équation.

15.12 a) Une représentation paramétrique de la droite est $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\vec{k} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ce qui donne le point C pour $t = 1$.

15.12 b) Une représentation paramétrique de la droite est $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\vec{k} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ce qui donne le point C pour $t = 1$.

15.12 d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, le point $D(1, 2, x)$ appartient à (d) .

15.13 a) La relation $\overrightarrow{AB} = t\vec{u}$ donne $t = 0$ pour les deux premières équations et impose $x = -3$ pour la troisième.

15.13 b) Cette fois-ci, on trouve $t = 1$; d'où $x = -2$.

15.13 c) La relation $\overrightarrow{AD} = t\vec{u}$ impose $1 + t = 1$ et $6 - 2t = 5$; comme ces deux équations sont incompatibles, aucun x ne peut convenir.

15.13 d) Si $\overrightarrow{AE} = t\vec{u}$, alors on a $\begin{cases} x = 1 + t \\ x^2 = 6 - 2t \\ y = -3 + t \end{cases}$. Les deux premières équations entraînent $(1 + t)^2 = 6 - 2t$, d'où $t = 1$ ou $t = -5$. Pour $t = 1$ on trouve $x = 2$ et $y = -2$, pour $t = -5$ on trouve $x = -4$ et $y = -8$.

15.14 a) La première droite est décrite par la représentation paramétrique $A + t\vec{u}$, la seconde par $B + s\vec{v}$. Chercher leur intersection c'est chercher (s, t) vérifiant

$$\begin{cases} 1 + t = 2 + s \\ 6 - 2t = 6 + s \\ -3 + t = -2 - s. \end{cases}$$

Or, ce système de trois équations à deux inconnues n'a pas de solution, ce qui signifie concrètement que les droites ne se coupent pas : elles ne sont pas coplanaires.

15.14 b) On cherche (s, t) vérifiant

$$\begin{cases} 1 + t = 11 + s \\ 6 - 2t = 10 \\ -3 + t = 7 + s, \end{cases}$$

ce qui donne $t = -2$ et $s = -12$. On calcule ensuite les coordonnées du point d'intersection.

Fiche n° 16. Propriétés algébriques du logarithme I

Réponses

16.1 a).....	$\frac{4}{5}$	16.5 a).....	2	16.10 b).....	> 0
16.1 b).....	$\frac{1}{2}$	16.5 b).....	-11	16.11 a).....	$x \geq -2$
16.1 c).....	$\frac{6}{5}$	16.5 c).....	$\frac{1}{2}$	16.11 b).....	$1 < x < 1 + e$
16.1 d).....	$\frac{15}{2}$	16.5 d).....	$\frac{7}{2}$	16.11 c)....	$x \geq 1$ ou $x \leq -1$
16.2 a).....	$\frac{7}{3}$	16.6 a).....	$\frac{7}{5}$	16.11 d)....	$-2 \leq x \leq \frac{e^2 - 5}{2}$
16.2 b).....	$\frac{11}{10}$	16.6 b).....	1 000	16.12 a).....	$\frac{1}{2} < x < 4$
16.2 c).....	$\frac{6}{7}$	16.6 c).....	$\frac{1}{\ln(3)}$	16.12 b).....	$0 < x \leq 1$
16.2 d).....	$x = \frac{24}{55}$	16.7 a).....	$\ln(2)$	16.12 c).....	$1 < x \leq 2$
16.3 a).....	0	16.7 b).....	2	16.12 d).....	$x \in [-\sqrt{e}, 0[\cup]0, \sqrt{e}]$
16.3 b).....	$\ln(5)$	16.7 c).....	0	16.13 a).....	$x = 3$
16.3 c).....	$\ln(7)$	16.7 d).....	$\ln(5)$	16.13 b)....	$x = e$ ou $x = e^2$
16.4 a).....	$5 \ln(2)$	16.8 a).....	$x > -1$	16.14 a).....	$\frac{1}{e} \leq x \leq e$
16.4 b).....	$-4 \ln(3)$	16.8 b).....	$x < 0$ ou $x > 3$	16.14 b).....	tous les réels
16.4 c).....	$2 \ln(2) + \ln(3)$	16.8 c).....	$x > 1$	16.15.....	$[-4, -3[\cup]0, 1]$
16.4 d).....	$\ln(3) - \ln(2)$	16.9 a).....	> 0	16.16 a).....	$\frac{k-1}{k}$
16.4 e).....	$\frac{3}{2} \ln(3)$	16.9 b).....	< 0	16.16 b)....	$\ln(k-1) - \ln(k)$
16.4 f).....	$\frac{1}{2} \ln(2) + \frac{1}{2} \ln(3)$	16.9 c).....	< 0	16.16 c).....	$-\ln(n)$
		16.9 d).....	> 0	16.17.....	$2x$
		16.9 e).....	< 0		
		16.9 f).....	> 0		
		16.10 a).....	$0 < x < e$		

Corrigés

16.1 a) On a $\frac{36}{45} = \frac{9 \times 4}{9 \times 5} = \frac{4}{5}$.

16.1 b) On a $\frac{2}{7} \times \frac{28}{16} = \frac{2}{7} \times \frac{4 \times 7}{16} = \frac{2 \times 4}{16} = \frac{1}{2}$.

16.1 c) On a $\frac{\frac{9}{25}}{\frac{3}{10}} = \frac{9}{25} \times \frac{10}{3} = \frac{3 \times 3}{5 \times 5} \times \frac{2 \times 5}{3} = \frac{6}{5}$.

16.1 d) On a $\frac{10^3 \times 3^5}{6^4 \times 5^2} = \frac{2^3 \times 5^3 \times 3^5}{2^4 \times 3^4 \times 5^2} = \frac{5 \times 3}{2} = \frac{15}{2}$.

16.2 c) On a les équivalences suivantes :

$$\frac{4}{3}x - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}x + \frac{1}{2} \iff \frac{8}{6}x - \frac{1}{6}x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \iff \frac{7}{6}x = 1 \iff x = \frac{6}{7}.$$

16.2 d) On a les équivalences suivantes :

$$\frac{5}{3}x = \frac{3}{4}x + \frac{2}{5} \iff \frac{20}{12}x - \frac{9}{12}x = \frac{2}{5} \iff \frac{11}{12}x = \frac{2}{5} \iff x = \frac{2}{5} \times \frac{12}{11} \iff x = \frac{24}{55}.$$

16.3 a) On a $\ln(3) + \ln\left(\frac{1}{3}\right) = \ln(3) - \ln(3) = 0$.

16.3 b) On a $\ln(10) - \ln(2) = \ln\left(\frac{10}{2}\right) = \ln(5)$.

16.3 c) On a $2\ln(\sqrt{7}) = \ln(\sqrt{7^2}) = \ln(7)$.

16.4 a) On a $\ln(32) = \ln(2^5) = 5\ln(2)$.

16.4 b) On a $\ln\left(\frac{1}{81}\right) = -\ln(81) = -\ln(3^4) = -4\ln(3)$.

16.4 c) On a $\ln(12) = \ln(2^2 \times 3) = \ln(2^2) + \ln(3) = 2\ln(2) + \ln(3)$.

16.4 e) On a $\ln(\sqrt{27}) = \frac{1}{2}\ln(27) = \frac{1}{2}\ln(3^2) = \frac{3}{2}\ln(3)$.

16.5 a) On a $\ln(e^2) = 2\ln(e) = 2 \times 1 = 2$.

16.5 c) On a $\ln(\sqrt{e}) = \frac{1}{2}\ln(e) = \frac{1}{2}$.

16.6 a) On a $e^{\ln(7) - \ln(5)} = e^{\ln\left(\frac{7}{5}\right)} = \frac{7}{5}$.

16.6 b) On a $e^{3\ln(10)} = e^{\ln(10^3)} = 10^3 = 1\,000$.

16.7 a) On a $\ln(\sqrt{3} - 1) + \ln(\sqrt{3} + 1) = \ln((\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1))$. Or (par identité remarquable), on a

$$(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1) = \sqrt{3}^2 - 1^2 = 3 - 1 = 2.$$

Donc $\ln(\sqrt{3} - 1) + \ln(\sqrt{3} + 1) = \ln(2)$.

16.7 c) On a

$$\ln((\sqrt{2}-1)^{15}) + \ln((\sqrt{2}+1)^{15}) = 15\ln(\sqrt{2}-1) + 15\ln(\sqrt{2}+1) = 15\ln((\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)) = 15\ln(1) = 0.$$

16.8 a) Le réel $\ln(1+x)$ est bien défini si, et seulement si, $1+x > 0$, autrement dit si, et seulement si, $x > -1$.

16.8 b) On doit résoudre $x^2 - 3x > 0$. On factorise $x^2 - 3x = x(x-3)$. Comme le signe de ce trinôme est > 0 à l'extérieur des racines (qui sont 0 et 3), on a l'équivalence suivante :

$$x^2 - 3x > 0 \iff x < 0 \quad \text{ou} \quad x > 3.$$

16.8 c) Déjà il faut que $x > 0$. Puis on doit résoudre $\ln(x) > 0$, ce qui revient à $x > 1$.

16.9 a) On a $2 > 1$ donc $\ln(2) > 0$.

16.9 f) On a $3 > e$ donc $\ln(3) > 1$ donc $\ln(3) - 1 > 0$.

16.10 b) On a $\ln(x) < 0$ donc $1 - \ln(x) > 1$ et donc $\ln(1 - \ln(x)) > 0$.

16.11 a) On a les équivalences suivantes :

$$\ln(5+2x) \geq 0 \iff 5+2x \geq 1 \iff 2x \geq -4 \iff x \geq -2.$$

16.11 b) On a les équivalences suivantes :

$$\ln(x-1) < 1 \iff 0 < x-1 < e \iff 1 < x < 1+e.$$

16.11 c) On a les équivalences suivantes :

$$\ln(x^2) \geq 0 \iff x^2 \geq 1 \iff x \geq 1 \quad \text{ou} \quad x \leq -1.$$

16.11 d) On a les équivalences suivantes :

$$0 \leq \ln(2x+5) \leq 2 \iff 1 \leq 2x+5 \leq e^2 \iff -4 \leq 2x \leq e^2-5 \iff -2 \leq x \leq \frac{e^2-5}{2}.$$

16.12 a) Déjà, pour que les termes soient bien définis, il faut que $x+3 > 0$ et $2x-1 > 0$, c'est-à-dire il faut que $x > \frac{1}{2}$. Puis, pour tout $x > \frac{1}{2}$, on a les équivalences suivantes :

$$\ln(x+3) > \ln(2x-1) \iff x+3 > 2x-1 \iff 4 > x.$$

16.12 b) Déjà, pour que les termes soient bien définis, il faut que $x > 0$ et $x + 2 > 0$, c'est-à-dire il faut que $x > 0$. Puis, pour tout $x > 0$, on a les équivalences suivantes :

$$\ln(x) + \ln(x + 2) \leq \ln(3) \iff \ln(x(x + 2)) \leq \ln(3) \iff x(x + 2) \leq 3 \iff x^2 + 2x - 3 \leq 0.$$

Après calcul du discriminant, on trouve que les racines de ce trinôme sont -3 et 1 . Donc, on a l'équivalence

$$x^2 + 2x - 3 \leq 0 \iff -3 \leq x \leq 1.$$

Comme $x > 0$, on obtient donc comme ensemble de solutions : $]0, 1]$.

16.12 c) Déjà, pour que les termes soient bien définis, il faut que $x > 0$ et $x - 1 > 0$, c'est-à-dire il faut que $x > 1$. Puis, pour tout $x > 1$, on a les équivalences suivantes :

$$\ln(x) + \ln(x - 1) \leq \ln(2) \iff \ln(x(x - 1)) \leq \ln(2) \iff x(x - 1) \leq 2 \iff x^2 - x - 2 \leq 0.$$

Après calcul du discriminant, on trouve que les racines de ce trinôme sont -1 et 2 . Donc, on a l'équivalence

$$x^2 - x - 2 \leq 0 \iff -1 \leq x \leq 2.$$

Comme $x > 1$, on obtient donc comme ensemble de solutions : $]1, 2]$.

16.12 d) Pour que $\ln(x^2)$ soit bien défini, il faut que $x^2 > 0$, autrement dit, il faut que $x \neq 0$. Puis, pour tout $x \neq 0$, on a les équivalences suivantes :

$$\ln(x^2) \leq 1 \iff x^2 \leq e \iff -\sqrt{e} \leq x \leq \sqrt{e}.$$

16.13 a) On a les équivalences suivantes :

$$\ln\left(\frac{x + 1}{3x - 5}\right) = 0 \iff \frac{x + 1}{3x - 5} = 1 \iff x + 1 = 3x - 5 \iff 6 = 2x \iff x = 3.$$

16.13 b) On pose $y = \ln(x)$ et on résout l'équation $y^2 - 3y + 2 = 0$; ses solutions (qu'on trouve en calculant le discriminant) sont $y_1 = \frac{3 - 1}{2} = 1$ et $y_2 = \frac{3 + 1}{2} = 2$. Donc, on a les équivalences suivantes :

$$\ln(x)^2 - 3\ln(x) + 2 = 0 \iff \left(\ln(x) = 1 \text{ ou } \ln(x) = 2\right) \iff \left(x = e \text{ ou } x = e^2\right).$$

16.14 a) On a les équivalences suivantes :

$$\ln(x)^2 \leq 1 \iff -1 \leq \ln(x) \leq 1 \iff e^{-1} \leq e^{\ln(x)} \leq e \iff \frac{1}{e} \leq x \leq e.$$

16.14 b) On a l'équivalence suivante :

$$\ln(x^2 + 3) \geq 1 \iff x^2 + 3 \geq e.$$

Or, on a $x^2 + 3 \geq 3$ et $e \approx 2,7$ donc l'inégalité $x^2 + 3 \geq e$ est vérifiée pour tout réel x .

16.15 On a les équivalences suivantes :

$$\ln\left(\frac{x^2+3x}{4}\right) \leq 0 \iff 0 < \frac{x^2+3x}{4} \leq 1 \iff 0 < x^2+3x \leq 4 \iff (x^2+3x > 0 \text{ et } x^2+3x-4 \leq 0).$$

Or, on a les équivalences suivantes :

$$x^2+3x > 0 \iff x(x+3) > 0 \iff x < -3 \text{ ou } x > 0.$$

De plus, après calcul des racines par le discriminant, on a également les équivalences suivantes :

$$x^2+3x-4 \leq 0 \iff (x+4)(x-1) \leq 0 \iff -4 \leq x \leq 1.$$

On obtient donc les équivalences suivantes :

$$\ln\left(\frac{x^2+3x}{4}\right) \leq 0 \iff (x < -3 \text{ ou } x > 0) \quad \text{et} \quad -4 \leq x \leq 1 \iff x \in [-4, -3[\cup]0, 1].$$

16.16 c) En utilisant la question précédente, on remarque que :

$$\ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \ln(1) - \ln(2) + \ln(2) - \ln(3) = -\ln(3).$$

De même :

$$\underbrace{\ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{3}\right)}_{-\ln(3)} + \ln\left(1 - \frac{1}{4}\right) = -\ln(3) + \ln(3) - \ln(4) = -\ln(4)$$

et ainsi de suite.

16.17 On a

$$e^{f(x)} = x + \sqrt{x^2+1} \quad \text{et} \quad e^{-f(x)} = \frac{1}{e^{f(x)}} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}}$$

donc on a

$$\begin{aligned} e^{f(x)} - e^{-f(x)} &= x + \sqrt{x^2+1} - \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{(x + \sqrt{x^2+1})^2 - 1}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2 + 2x\sqrt{x^2+1} + (x^2+1) - 1}{x + \sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{2x^2 + 2x\sqrt{x^2+1}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{2x(x + \sqrt{x^2+1})}{x + \sqrt{x^2+1}} = 2x. \end{aligned}$$

Fiche n° 17. Propriétés algébriques du logarithme II

Réponses

17.1 a)	$\sqrt{5}$	17.8 b)	3
17.1 b)	$\sqrt{3} + 1$	17.8 c)	4,5
17.1 c)	$5\sqrt{5}$	17.8 d)	$\frac{1}{4}$
17.2 a)	9	17.8 e)	$-\frac{1}{4}$
17.2 b)	$-\frac{8}{7}$	17.8 f)	2
17.3 a)	$3\ln(2)$	17.9	c
17.3 b)	$-2\ln(2) - 2\ln(5)$	17.10 a)	$]2, +\infty[$
17.3 c)	$2\ln(2)$	17.10 b)	3
17.3 d)	$-\ln(2)$	17.11 a)	4
17.4 a)	$\ln(3)$	17.11 b)	$\frac{\ln(e^7 - 3)}{2}$
17.4 b)	$10\ln(3)$	17.12 a)	$]1, +\infty[$
17.5 a)	$-1,61 \leq \ln(0,2) \leq -1,60$	17.12 b)	$\ln(x + 1)$
17.5 b)	$2,29 \leq \ln(10) \leq 2,31$	17.12 c)	$e - 1$
17.6 a)	$0,46 \leq \ln\left(\frac{8}{5}\right) \leq 0,50$	17.13	-2
17.6 b)	$1,61 \leq \ln(5,12) \leq 1,70$	17.14 a)	e
17.6 c)	$-2,254 \leq \ln(25) \ln\left(\frac{1}{2}\right) \leq -2,208$	17.14 b)	$x = 1$ ou $x = e$
17.6 d) ..	$2,98 \leq \ln(5 + \sqrt{5}) + \ln(5 - \sqrt{5}) \leq 3,01$	17.14 c)	$e^{\sqrt{2}} + 2$
17.7 a)	3	17.15 a)	$x > e^p - 1$
17.7 b)	$\frac{3}{2}$	17.15 b)	$-\frac{1}{p} < x \leq 1$
17.7 c)	3	17.16 a)	2
17.7 d)	$\frac{5}{3}$	17.16 b)	3
17.7 e)	2	17.16 c)	1
17.7 f)	1	17.16 d)	-2
17.8 a)	$\frac{1}{\ln(2)}$	17.17 a)	17
		17.17 b)	2
		17.17 c)	$\frac{1}{2}$

17.17 d) $\boxed{-3}$

17.18 $\boxed{\ln(n+1)}$

17.19 $\boxed{\frac{n(n+1)\ln(2)}{2}}$

Corrigés

17.1 a) On calcule $\sqrt{45} - \sqrt{20} = \sqrt{9 \times 5} - \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{9} \times \sqrt{5} - \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 3 \times \sqrt{5} - 2 \times \sqrt{5} = (3-2)\sqrt{5} = \sqrt{5}$.

17.1 b) En utilisant la quantité conjuguée : $\frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}^2-1^2} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{2} = \sqrt{3}+1$.

17.1 c) On a $2\sqrt{5} + \sqrt{45} = 2\sqrt{5} + \sqrt{9 \times 5} = 2\sqrt{5} + \sqrt{9} \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5} + 3 \times \sqrt{5} = 5\sqrt{5}$.

17.2 a) On a $\left| \frac{3}{2} \times \frac{8}{9} \right| + \left| \frac{7}{3} - 10 \right| = \left| \frac{3 \times 8}{2 \times 9} \right| + \left| \frac{7}{3} - \frac{30}{3} \right| = \left| \frac{1 \times 4}{1 \times 3} \right| + \left| \frac{7-30}{3} \right| = \left| \frac{4}{3} \right| + \left| \frac{-23}{3} \right| = \frac{4}{3} + \frac{23}{3} = \frac{27}{3} = 9$.

17.2 b) On a $\left| \frac{1}{14} - \frac{4}{7} \right| - \left| \frac{6}{7} - \frac{5}{2} \right| = \left| \frac{1-8}{14} \right| - \left| \frac{12}{14} - \frac{35}{14} \right| = \left| \frac{-7}{14} \right| - \left| \frac{-23}{14} \right| = \frac{7}{14} - \frac{23}{14} = \frac{-16}{14} = \frac{-8}{7}$.

17.3 a) On a $\ln(8) = \ln(2^3) = 3\ln(2)$.

17.3 b) On a $0,01 = 10^{-2} = 2^{-2} \times 5^{-2}$. Donc, on a

$$\ln(0,01) = \ln(2^{-2} \times 5^{-2}) = \ln(2^{-2}) + \ln(5^{-2}) = -2\ln(2) - 2\ln(5).$$

17.3 c) On a $\ln(12) + \ln(9) - \ln(27) = \ln(3 \times 4) + \ln(3^2) - \ln(3^3) = \ln(3) + \ln(2^2) + 2\ln(3) - 3\ln(3) = 2\ln(2)$.

17.3 d) En utilisant le fait que $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln(x)$, on obtient

$$\ln(\sqrt{8}) - \ln(16) + \frac{3}{2}\ln(2) = \frac{1}{2}\ln(2^3) - \ln(2^4) + \frac{3}{2}\ln(2) = \frac{3}{2}\ln(2) - 4\ln(2) + \frac{3}{2}\ln(2) = -\ln(2).$$

17.4 a) On a $\ln(4 + \sqrt{13}) + \ln(\sqrt{4} - \sqrt{13}) = \ln((4 + \sqrt{13}) \times (4 - \sqrt{13})) = \ln(4^2 - \sqrt{13}^2) = \ln(3)$.

17.4 b) On a $\ln((\sqrt{10} - 1)^5) + \ln((\sqrt{10} + 1)^5) = 5\ln((\sqrt{10} - 1)(\sqrt{10} + 1)) = 5\ln(9) = 10\ln(3)$.

17.5 a) On a $\ln(0,2) = \ln\left(\frac{1}{5}\right) = -\ln(5)$ donc $-1,61 \leq -\ln(5) \leq -1,60$.

17.5 b) Comme $\ln(10) = \ln(2 \times 5) = \ln(2) + \ln(5)$, on a $0,69 + 1,60 \leq \ln(2) + \ln(5) \leq 0,70 + 1,61$ et donc

$$2,29 \leq \ln(10) \leq 2,31.$$

17.6 a) On a $\ln\left(\frac{8}{5}\right) = \ln(8) - \ln(5)$. Or, $\ln(8) = \ln(2^3) = 3\ln(2)$ donc $2,07 \leq \ln(8) \leq 2,10$.

De plus, on a $-1,61 \leq -\ln(5) \leq -1,60$. Ainsi, on a $2,07 - 1,61 \leq \ln(8) - \ln(5) \leq 2,10 - 1,60$ et finalement

$$0,46 \leq \ln\left(\frac{8}{5}\right) \leq 0,50.$$

17.6 b) On a $\ln(5,12) = \ln\left(\frac{512}{100}\right) = \ln\left(\frac{2^9}{2^2 \times 5^2}\right) = \ln(2^7) - \ln(5^2) = 7\ln(2) - 2\ln(5)$.

Or, on a $4,83 \leq 7\ln(2) \leq 4,90$ et $-3,22 \leq -2\ln(5) \leq -3,20$. Finalement, on a ainsi

$$4,83 - 3,22 \leq 7\ln(2) - 2\ln(5) \leq 4,90 - 3,20 \quad \text{donc} \quad 1,61 \leq \ln(5,12) \leq 1,70.$$

17.6 c) Comme $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$ et $\ln(25) = 2\ln(5)$, on utilise les encadrements

$$0,69 \leq \ln(2) \leq 0,70 \quad \text{et} \quad 3,2 \leq \ln(25) \leq 3,22.$$

Attention, les nombres doivent être positifs pour multiplier membre à membre. On obtient

$$0,69 \times 3,2 \leq \ln(2) \ln(25) \leq 0,7 \times 3,22$$

ce qui donne $-2,254 \leq \ln(25) \ln\left(\frac{1}{2}\right) \leq -2,208$.

17.6 d) On a

$$\begin{aligned} \ln(5 + \sqrt{5}) + \ln(5 - \sqrt{5}) &= \ln((5 + \sqrt{5})(5 - \sqrt{5})) = \ln(5^2 - 5) = \ln(20) \\ &= \ln(4 \times 5) = \ln(2^2) + \ln(5) = 2\ln(2) + \ln(5). \end{aligned}$$

Comme $1,38 \leq 2\ln(2) \leq 1,4$ et $1,6 \leq \ln(5) \leq 1,61$, on a ainsi $1,38 + 1,6 \leq 2\ln(2) + \ln(5) \leq 1,4 + 1,61$ et donc

$$2,98 \leq 2\ln(2) + \ln(5) \leq 3,01.$$

17.7 a) On a $\ln(e^5) - \ln(e^2) = 5\ln(e) - 2\ln(e) = 5 - 2 = 3$.

17.7 b) On a $\ln(\sqrt{e}) - \ln\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2}\ln(e) - (-1)\ln(e) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$.

17.7 c) On a $2\ln(e\sqrt{e}) = 2(\ln(e) + \ln(\sqrt{e})) = 2\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3$.

17.7 d) On a $e^{\ln(5) - \ln(3)} = e^{\ln\left(\frac{5}{3}\right)} = \frac{5}{3}$.

17.7 e) On a $e^{\frac{1}{2}\ln(4)} = e^{\ln(\sqrt{4})} = \sqrt{4} = 2$.

17.7 f) On a $\ln\left(\frac{e^2}{e+3}\right) + \ln\left(\frac{e+3}{e}\right) = \ln\left(\frac{e^2}{e+3} \times \frac{e+3}{e}\right) = \ln\left(\frac{e^2}{e}\right) = \ln(e) = 1$.

17.8 a) On a $\exp(-\ln(\ln(2))) = \exp\left(\ln\left(\frac{1}{\ln(2)}\right)\right) = \frac{1}{\ln(2)}$.

17.8 b) On a $\ln(\sqrt{e^6}) = \frac{1}{2}\ln(e^6) = \frac{1}{2} \times 6 = 3$.

17.8 c) On a $\ln\left(\sqrt{\exp\left(\frac{1}{3}\ln e^{27}\right)}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\exp\left(\frac{1}{3}\times 27\right)\right) = \frac{1}{2}\ln(\exp(9)) = \frac{1}{2}\times 9 = 4,5$.

17.8 d) On a $\ln\left(\sqrt{\sqrt{e}}\right) = \frac{1}{2}\ln(\sqrt{e}) = \frac{1}{2}\times \frac{1}{2}\ln(e) = \frac{1}{4}\times 1 = \frac{1}{4}$.

17.8 e) On a $\ln\left(\sqrt{\exp(-\ln(\sqrt{e}))}\right) = \frac{1}{2}\ln(\exp(-\ln(\sqrt{e}))) = -\frac{1}{2}\ln(\sqrt{e}) = -\frac{1}{4}\ln(e) = -\frac{1}{4}$.

17.8 f) On calcule

$$\begin{aligned}\exp\left(2\ln\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)\right) &= \exp\left(\ln\left((\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}})^2\right)\right) \\ &= \left(\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2 \\ &= \left(\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2 - 2\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}\right) + \left(\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2 \\ &= 3 + \sqrt{5} - 2\sqrt{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} + 3 - \sqrt{5} \\ &= 6 - 2\sqrt{3^2 - 5} = 6 - 2\sqrt{4} = 6 - 4 = 2.\end{aligned}$$

17.9 On factorise par e^x en remarquant que $1 = e^0 = e^{x-x} = e^x e^{-x}$. Donc,

$$\ln(e^x + 1) = \ln(e^x \times 1 + e^x e^{-x}) = \ln(e^x(1 + e^{-x})) = \ln(e^x) + \ln(1 + e^{-x}) = x + \ln(e^{-x} + 1).$$

17.10 a) On doit avoir $x - 2 > 0$ (donc $x > 2$) et $x - 1 > 0$ (donc $x > 1$). Ainsi, l'équation a un sens quand $x > 2$.

17.10 b) Soit $x > 2$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}\ln(x-2) + \ln(x-1) = \ln(2) &\iff \ln((x-2)(x-1)) = \ln(2) \iff (x-2)(x-1) = 2 \iff x^2 - 3x = 0 \\ &\iff x(x-3) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 3.\end{aligned}$$

Comme on a $x > 2$, la seule solution est 3.

17.11 a) Pour commencer, on remarque que l'équation n'est définie que si $2x - 1 > 0$ et $x + 3 > 0$. Il faut donc que $x > \frac{1}{2}$. On a alors, pour $x > \frac{1}{2}$, les équivalences suivantes :

$$\ln(2x-1) = \ln(x+3) \iff 2x-1 = x+3 \iff x = 4.$$

17.11 b) On a les équivalences suivantes :

$$\ln(e^{2x} + 3) = 7 \iff e^{2x} + 3 = e^7 \iff e^{2x} = e^7 - 3 \iff x = \frac{\ln(e^7 - 3)}{2}.$$

17.12 a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes

$$\text{l'équation a un sens pour } x \iff \begin{cases} x-1 > 0 \\ x+1 > 0 \\ x^2-1 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 1 \\ x > -1 \\ x^2 > 1 \end{cases} \iff x > 1.$$

17.12 b) Soit $x > 1$. On a

$$\begin{aligned}\ln(x-1) + 2\ln(x+1) - \ln(x^2-1) &= \ln(x-1) + \ln((x+1)^2) - \ln(x^2-1) \\ &= \ln\left(\frac{(x-1)(x+1)^2}{x^2-1}\right) = \ln(x+1).\end{aligned}$$

17.12 c) Soit $x > 1$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}\ln(x-1) + 2\ln(x+1) - \ln(x^2-1) = 1 &\iff \ln(x+1) = 1 \iff \ln(x+1) = \ln(e) \\ &\iff x+1 = e \iff x = e-1.\end{aligned}$$

On a bien $e-1 > 1$ car on sait que $e \approx 2,71$.

17.13 On a les équivalences suivantes :

$$\ln(2^x) = \ln(4^{x+1}) \iff x \ln(2) = (x+1) \ln(2^2) \iff x = 2(x+1) \iff x = -2.$$

17.14 a) Pour $x > 0$, on a les équivalences suivantes :

$$(\ln(x))^2 = \ln(x^2) - 1 \iff (\ln(x))^2 - 2\ln(x) + 1 = 0 \iff (\ln(x) - 1)^2 = 0 \iff \ln(x) = 1 \iff x = e.$$

17.14 b) Pour $x > 0$, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}(\ln(x))^2 + \ln\left(\frac{1}{x}\right) = 0 &\iff (\ln(x))^2 - \ln(x) = 0 \\ &\iff \ln(x)(\ln(x) - 1) = 0 \iff \ln(x) = 0 \text{ ou } \ln(x) = 1 \iff x = 1 \text{ ou } x = e.\end{aligned}$$

17.14 c) Pour $x > 2$, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}(\ln(x-2))^2 = 2 &\iff 2\ln(\ln(x-2)) = \ln(2) \\ &\iff \ln(\ln(x-2)) = \frac{\ln(2)}{2} \iff \ln(\ln(x-2)) = \ln(\sqrt{2}) \\ &\iff \ln(x-2) = \sqrt{2} \\ &\iff x = e^{\sqrt{2}} + 2.\end{aligned}$$

17.15 a) Pour $x > -1$, on a les équivalences suivantes :

$$\ln(x+1) > p \iff x+1 > e^p \iff x > e^p - 1.$$

17.15 b) Pour que cette équation ait un sens, il faut avoir $px+1 > 0$ (donc $x > \frac{-1}{p}$) et $x+p > 0$ (donc $x > -p$).

Comme $p > 1$, ces deux conditions se réduisent à $x > \frac{-1}{p}$. Pour $x > \frac{-1}{p}$, on a les équivalences suivantes :

$$\ln(px+1) \leq \ln(x+p) \iff px+1 \leq x+p \iff px-x \leq p-1 \iff x(p-1) \leq p-1 \iff x \leq 1.$$

17.16 a) On simplifie $\log_{10}(100) = \frac{\ln(100)}{\ln(10)} = \frac{\ln(10^2)}{\ln(10)} = \frac{2\ln(10)}{\ln(10)} = 2$.

17.16 b) On a $\log_{10}(4) + \log_{10}(250) = \frac{\ln(4)}{\ln(10)} + \frac{\ln(250)}{\ln(10)} = \frac{\ln(4) + \ln(250)}{\ln(10)} = \frac{\ln(4 \times 250)}{\ln(10)} = \frac{3 \ln(10)}{\ln(10)} = 3$.

17.16 c) On a $\log_{10}(120) - \log_{10}(12) = \frac{\ln(120)}{\ln(10)} - \frac{\ln(12)}{\ln(10)} = \frac{\ln(120) - \ln(12)}{\ln(10)} = \frac{\ln(120/12)}{\ln(10)} = \frac{\ln(10)}{\ln(10)} = 1$.

17.16 d) On a

$$\begin{aligned} 5 \log_{10}(2) - \log_{10}(3200) &= 5 \frac{\ln(2)}{\ln(10)} - \frac{\ln(3200)}{\ln(10)} = \frac{\ln(2^5)}{\ln(10)} - \frac{\ln(3200)}{\ln(10)} = \frac{\ln(32) - \ln(3200)}{\ln(10)} \\ &= \frac{\ln(32/3200)}{\ln(10)} = \frac{\ln(1/100)}{\ln(10)} = \frac{\ln(10^{-2})}{\ln(10)} = -2 \frac{\ln(10)}{\ln(10)} = -2. \end{aligned}$$

17.17 a) On calcule $\log_3(3^{17}) = \frac{\ln(3^{17})}{\ln(3)} = \frac{17 \ln(3)}{\ln(3)} = 17$.

17.17 b) On a $\log_6(4) + \log_6(9) = \frac{\ln(4)}{\ln(6)} + \frac{\ln(9)}{\ln(6)} = \frac{\ln(4) + \ln(9)}{\ln(6)} = \frac{\ln(4 \times 9)}{\ln(6)} = \frac{\ln(6^2)}{\ln(6)} = 2 \frac{\ln(6)}{\ln(6)} = 2$.

17.17 c) On a $\log_5(\sqrt{e}) \times \ln(5) = \frac{\ln(\sqrt{e})}{\ln(5)} \times \ln(5) = \frac{1}{2} \ln(e) = \frac{1}{2}$.

17.17 d) On a

$$\begin{aligned} (1 + \log_2(0,25))(\log_2(200) - \log_2(25)) &= \left(1 + \frac{\ln(2^{-2})}{\ln(2)}\right) \left(\frac{\ln(200)}{\ln(2)} - \frac{\ln(25)}{\ln(2)}\right) = (1 - 2) \frac{\ln(200) - \ln(25)}{\ln(2)} \\ &= -\frac{\ln(200/25)}{\ln(2)} = -\frac{\ln(8)}{\ln(2)} = -\frac{\ln(2^3)}{\ln(2)} = -3. \end{aligned}$$

17.18 Pour tous $a, b > 0$, on a $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$. On en déduit la formule

$$\ln(a_1) + \ln(a_2) + \cdots + \ln(a_n) = \ln(a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n).$$

On a donc

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{2}{1}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) &= \ln\left(\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \cdots \times \frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(\frac{2 \times 3 \times \cdots \times n \times (n+1)}{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n}\right) \\ &= \ln\left(\frac{n+1}{1}\right) = \ln(n+1). \end{aligned}$$

17.19 On a $\sum_{k=1}^n \ln(2^k) = \sum_{k=1}^n k \ln(2) = \ln(2) \sum_{k=1}^n k = \ln(2) \times \frac{n \times (n+1)}{2} = \frac{n(n+1) \ln(2)}{2}$.

Fiche n° 18. Fonctions logarithmes

Réponses

18.1 a) e^{8x+3}

18.1 b) e^{10t-19}

18.1 c) e^{-8x+3}

18.1 d) 1

18.2 a) $5 \ln(2)$

18.2 b) $2 \ln(5)$

18.2 c) $2 \ln(5)$

18.2 d) $5 \ln(3)$

18.3 a) $\frac{2x-1}{x}$

18.3 b) $\frac{4x^2 + 11x + 4}{x(x+1)^2}$

18.4 a) $\frac{1 - \ln(x) - 6x^3}{x^2}$

18.4 b) $\frac{(x \ln(x) + 1)e^x}{x}$

18.5 a) $\ln(x)$

18.5 b) $\frac{1 - \ln(x)}{x^2}$

18.5 c) $\frac{(2x-1)\ln(x) - x + 1}{(\ln(x))^2}$

18.5 d) $\frac{\ln(x) + 2}{2\sqrt{x}}$

18.6 a) $\frac{3 \ln(x)^2}{x}$

18.6 b) $-\frac{1}{x \ln(x)^2}$

18.6 c) $\frac{1}{2x\sqrt{\ln(x)}}$

18.6 d) $-\frac{4}{x \ln(x)^5}$

18.7 a) $\frac{2x-4}{x^2-4x+7}$

18.7 b) $\frac{e^x}{1+e^x}$

18.7 c) $-\frac{3x^2}{1-x^3}$

18.7 d) $\frac{1}{x \ln(x)}$

18.8 a) $\frac{16x^3 + 24x^2 + 52x - 3}{2x^2 + 3x + 7}$

18.8 b) $\frac{6x + 6\sqrt{x} + 1}{2(x + \sqrt{x})}$

18.8 c) $-\frac{2x(x+2)}{(1+x)(2x^2+x+1)}$

18.9 a) $-\frac{x^2 - 6x + 2}{(x-3)(x^2-2)}$

18.9 b) $\frac{3}{7}$

18.10 a) $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

18.10 b) $\frac{1}{x^2-1}$

18.10 c) $\frac{2xe^{x^2+1}}{1+e^{x^2+1}}$

18.10 d) $\frac{1}{x \ln(x) \ln(\ln(x))}$

18.11 a) $\frac{(1+x-3x^3)e^{x-x^3}}{1+xe^{x-x^3}}$

18.11 b) $\frac{2xe^{x^2}}{(1+e^{x^2})(1+\ln(1+e^{x^2}))}$

18.12 a) FI

18.12 b) $+\infty$

18.12 c) FI

18.12 d).....	$-\infty$	18.17 b).....	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
18.13 a).....	0	18.17 c).....	1
18.13 b).....	$+\infty$	18.18	0
18.13 c).....	$e^{-7} + 3$	18.19 a).....	$-\infty$
18.13 d).....	$+\infty$	18.19 b).....	0
18.14 a).....	$+\infty$	18.20 a).....	1
18.14 b).....	0	18.20 b).....	$\frac{1}{2}$
18.15 a).....	$+\infty$	18.21	$g' = 1 - g$
18.15 b).....	1	18.22 a).....	$-\frac{1}{x \ln(x)^2}$
18.15 c).....	-1	18.22 b).....	$\frac{6x + 1}{\ln(3x^2 + x + 2)}$
18.15 d).....	$+\infty$	18.22 c).....	$\frac{e^x}{x}$
18.16	$\odot$		
18.17 a).....	$\frac{\sqrt{2}}{2}$		

Corrigés

18.1 a) On a $e^{3x+1} \times e^{5x+2} = e^{3x+1+5x+2} = e^{8x+3}$.

18.1 b) On a $(e^{2t-4})^5 \times e = e^{5(2t-4)+1} = e^{10t-19}$.

18.1 c) On a $\frac{e^{2x+1} \times e^{5-8x}}{e^{2x+3}} = e^{2x+1+5-8x-2x-3} = e^{-8x+3}$.

18.1 d) On a $\frac{e^{2x+5t} \times e^{4x-3t}}{e^{2t+6x}} = e^{2x+5t+4x-3t-2t-6x} = e^0 = 1$.

18.2 a) On a $3 \ln(2) + \ln(4) = 3 \ln(2) + \ln(2^2) = 3 \ln(2) + 2 \ln(2) = 5 \ln(2)$.

18.2 b) On a $\ln(100) - \ln(28) + \ln(21) - \ln(3) = \ln(5^2 \times 2^2) - \ln(7 \times 2^2) + \ln(3 \times 7) - \ln(3)$.

Ainsi, $\ln(100) - \ln(28) + \ln(21) - \ln(15) = 2 \ln(2) + 2 \ln(5) - 2 \ln(2) - \ln(7) + \ln(3) + \ln(7) - \ln(3) = 2 \ln(5)$.

18.2 c) On a

$$\begin{aligned} \ln(7 - 2\sqrt{6}) + \ln(7 + 2\sqrt{6}) &= \ln((7 - 2\sqrt{6})(7 + 2\sqrt{6})) = \ln(7^2 - (2\sqrt{6})^2) \\ &= \ln(49 - 24) = \ln(25) = \ln(5^2) = 2 \ln(5). \end{aligned}$$

18.2 d) On a

$$4 \ln(9) - 2 \ln(27) + 6 \ln(\sqrt{3}) = 4 \ln(3^2) - 2 \ln(3^3) + 6 \times \frac{1}{2} \ln(3) \\ = 8 \ln(3) - 6 \ln(3) + 3 \ln(3) = 5 \ln(3).$$

18.3 a) On a $f'(x) = 2 - \frac{1}{x} = \frac{2x-1}{x}$.

18.3 b) On a $f'(x) = \frac{4}{x} + \frac{3}{(x+1)^2} = \frac{4+8x+4x^2+3x}{x(x+1)^2} = \frac{4x^2+11x+4}{x(x+1)^2}$.

18.4 a) On a $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1}{x^2} - 6x = \frac{1 - \ln(x) - 6x^3}{x^2}$.

18.4 b) On a $f'(x) = e^x \times \frac{1}{x} + e^x \times \ln(x) = e^x \left(\frac{1}{x} + \ln(x) \right) = \frac{(x \ln(x) + 1)e^x}{x}$.

18.5 a) On a $f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x)$.

18.5 b) On a $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$.

18.5 c) On a $f'(x) = \frac{(2x-1) \ln(x) - (x^2-x) \times \frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = \frac{(2x-1) \ln(x) - x + 1}{(\ln(x))^2}$.

18.5 d) On a $f'(x) = \sqrt{x} \times \frac{1}{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} \ln(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}} \ln(x) = \frac{\ln(x) + 2}{2\sqrt{x}}$.

18.6 a) On utilise la formule $(u^3)' = 3u'u^2$.

18.6 b) On utilise la formule $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$.

18.6 c) On utilise la formule $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

18.6 d) On utilise la formule $\left(\frac{1}{u^4}\right)' = -\frac{4u'}{u^5}$.

18.7 a) On utilise la formule $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$.

18.8 a) On a $f'(x) = 8x - \frac{4x+3}{2x^2+3x+7} = \frac{16x^3+24x^2+56x-4x-3}{2x^2+3x+7} = \frac{16x^3+24x^2+52x-3}{2x^2+3x+7}$.

18.8 b) On a $f'(x) = 3 + \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+\sqrt{x}} = 3 + \frac{1}{2(x+\sqrt{x})} = \frac{6x+6\sqrt{x}+1}{2(x+\sqrt{x})}$.

18.8 c) On a $f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{4x+1}{2x^2+x+1} = \frac{2x^2+x+1-(4x+1)(1+x)}{(1+x)(2x^2+x+1)} = -\frac{2x(x+2)}{(1+x)(2x^2+x+1)}$.

18.9 a) Pour $x > 3$, on pose $u(x) = \frac{x-3}{x^2-2}$. On a $u'(x) = \frac{1 \times (x^2-2) - (x-3) \times 2x}{(x^2-2)^2} = \frac{-x^2+6x-2}{(x^2-2)^2}$.

Ainsi, on a $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{-x^2+6x-2}{(x^2-2)^2} \times \frac{x^2-2}{x-3} = -\frac{x^2-6x+2}{(x-3)(x^2-2)}$.

Il est aussi possible d'utiliser le fait que, pour tout réel $x > 3$, on a $\ln\left(\frac{x-3}{x^2-2}\right) = \ln(x-3) - \ln(x^2-2)$.

.....

18.10 a) On a $f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

.....

18.10 c) Pour tout réel x , on pose $u(x) = e^{x^2+1}$. On a $u'(x) = 2xe^{x^2+1}$. Ainsi, $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2xe^{x^2+1}}{1 + e^{x^2+1}}$.

.....

18.11 a) Pour $x > -1$, on pose $u(x) = 1 + xe^{x-x^3}$. On a $u'(x) = e^{x-x^3} + x \times (1-3x^2)e^{x-x^3} = (1+x-3x^3)e^{x-x^3}$.

On a $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{(1+x-3x^3)e^{x-x^3}}{1 + xe^{x-x^3}}$.

.....

18.11 b) Pour tout réel x , on pose $u(x) = 1 + \ln(1 + e^{x^2})$. On a $u'(x) = \frac{2xe^{x^2}}{1 + e^{x^2}}$. On a

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2xe^{x^2}}{(1 + e^{x^2})(1 + \ln(1 + e^{x^2}))}.$$

18.12 b) On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, d'où le résultat.

18.12 d) Attention à ne pas tomber dans le piège !

Ce n'est pas une forme indéterminée puisqu'on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$, d'où le résultat par quotient.

18.13 a) C'est direct, par croissance comparée.

18.13 b) On met en facteur les termes dominants en écrivant

$$\frac{e^x - x^8}{x + 1} = \frac{e^x}{x} \times \frac{1 - \frac{x^8}{e^x}}{1 + \frac{1}{x}}.$$

Or, par croissance comparée, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^8}{e^x} = 0$ et donc on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{x^8}{e^x}}{1 + \frac{1}{x}} = 1$. Toujours par croissance comparée,

on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$. On conclut par produit de limites.

18.13 c) Les exponentielles se simplifient quand on écrit :

$$\frac{e^{x-7} + 3e^x}{e^x + x} = \frac{e^x(e^{-7} + 3)}{e^x\left(1 + \frac{x}{e^x}\right)} = \frac{e^{-7} + 3}{1 + \frac{x}{e^x}}.$$

Or, par croissance comparée, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$. On en déduit le résultat.

18.13 d) On simplifie par e^x et on procède comme ci-dessus.

18.14 a) On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} xe^{\frac{1}{x}} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$, par croissance comparée.

18.14 b) On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^3} = \lim_{X \rightarrow +\infty} X^3 e^{-X} = 0$, par croissance comparée.

18.15 a) On factorise par x^2 en écrivant $x^2 - \ln(x) = x^2 \left(1 - \frac{\ln(x)}{x^2}\right)$.

Or, par croissance comparée, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$. On en déduit la limite.

18.15 b) On factorise par x « en haut et en bas » et on conclut comme ci-dessus.

18.15 c) On a $\frac{\ln(x) - \sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x} \left(\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} - 1 \right)}{\sqrt{x} \times \sqrt{1 + \frac{1}{x}}} = \frac{\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}}$. Or, par croissance comparée, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0$.

On en déduit la limite.

18.15 d) On factorise par $\ln(x)$ « en haut et en bas ».

18.16 C'est un cas de croissance comparée.

18.17 a) Grâce à la définition, on a

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2} \ln(\frac{1}{2})} = e^{-\frac{1}{2} \ln(2)} = \frac{1}{e^{\frac{1}{2} \ln(2)}} = \frac{1}{e^{\ln(\sqrt{2})}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

On peut retenir que, avec cette définition, on a, pour $x > 0$, $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.

18.17 b) C'est un calcul similaire.

18.17 c) Par croissance comparée, on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$. On obtient le résultat par passage à l'exponentielle, ce qui est possible par continuité de la fonction exponentielle : on a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln(x)} = e^0 = 1.$$

18.18 On a

$$\ln(e^x + 4x) = \ln(e^x(1 + 4xe^{-x})) = \ln(e^x) + \ln(1 + 4xe^{-x}) = x + \ln(1 + 4xe^{-x}).$$

Ainsi, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(e^x + 4x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + 4xe^{-x})$.

Or, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$ par croissance comparée. Donc, finalement, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(e^x + 4x) - x) = \ln(1) = 0$.

18.19 a) On factorise : $\sqrt{\ln(x)} - \ln(x) = \sqrt{\ln(x)}(1 - \sqrt{\ln(x)})$, et on en déduit la limite par produit de limites.

18.19 b) On a $\frac{e^{\sqrt{\ln(x)}}}{x} = \frac{e^{\sqrt{\ln(x)}}}{e^{\ln(x)}} = e^{\sqrt{\ln(x)} - \ln(x)}$. On conclut avec la question précédente.

18.20 a) On introduit $f(x) = \ln(1+x)$ et on raisonne comme à la question précédente. Puisque la fonction f est dérivable en 0, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0).$$

Comme on a $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, on a $f'(0) = 1$. D'où le résultat.

18.20 b) On procède comme ci-dessus.

18.21 On a $g' = \frac{f'}{f}$. Or, pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = f(x)(1 - \ln(f(x)))$ et donc $\frac{f'(x)}{f(x)} = 1 - \ln(f(x))$, c'est-à-dire $g'(x) = 1 - g(x)$.

18.22 a) On utilise la formule $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$.

18.22 b) On a $f'(x) = (6x + 1) \operatorname{li}'(3x^2 + x + 2) = \frac{6x + 1}{\ln(3x^2 + x + 2)}$.

18.22 c) On a $g'(x) = \frac{e^x}{\ln(e^x)} = \frac{e^x}{x}$.

Fiche n° 19. Produit scalaire dans l'espace

Réponses

19.1 a)	$\frac{11}{6}$	19.7 c)	$6 \ \vec{v}\ ^2 - 3 \ \vec{w}\ ^2 + 7 \vec{v} \cdot \vec{w}$
19.1 b)	$\frac{43}{3}$	19.7 d)	$9 \ \vec{w}\ ^2 - \ \vec{v}\ ^2$
19.1 c)	$\frac{10}{3}$	19.8 a)	$\ \vec{v}\ ^2 + 4 \ \vec{w}\ ^2 + 4 \vec{v} \cdot \vec{w}$
19.1 d)	$\frac{7}{3} + \frac{1}{2}\sqrt{2}$	19.8 b)	$9 \ \vec{v}\ ^2 + \ \vec{w}\ ^2 - 6 \vec{v} \cdot \vec{w}$
19.2 a)	5	19.8 c)	$4 \ \vec{v}\ ^2 + 3 \ \vec{w}\ ^2 + 4\sqrt{3} \vec{v} \cdot \vec{w}$
19.2 b)	10	19.8 d)	$4 \ \vec{v}\ ^2 + 5 \ \vec{w}\ ^2 - 4\sqrt{5} \vec{v} \cdot \vec{w}$
19.2 c)	7	19.9 a)	-48
19.2 d)	4	19.9 b)	-54
19.3 a)	non	19.9 c)	-14
19.3 b)	oui	19.9 d)	85
19.3 c)	non	19.9 e)	13
19.3 d)	oui	19.9 f)	12
19.3 e)	oui	19.10 a)	$2x - y + 2z - 11 = 0$
19.3 f)	oui	19.10 b)	$2x - y + 2z - 10 = 0$
19.4 a)	non	19.10 c)	$5x + 6y + 14 = 0$
19.4 b)	non	19.11	(b)
19.4 c)	oui	19.12 a)	non
19.4 d)	oui	19.12 b)	oui
19.4 e)	oui	19.12 c)	non
19.4 f)	oui	19.12 d)	non
19.5 a)	$\left\{ -\frac{8}{5} \right\}$	19.12 e)	oui
19.5 b)	$\{-1, 1\}$	19.12 f)	non
19.6 a)	$\{-5, 0\}$	19.13 a)	$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
19.6 b)	$\{-5 - \sqrt{31}, -5 + \sqrt{31}\}$	19.13 b)	$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 2t \\ z = 2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$
19.7 a)	$6 \vec{v} \cdot \vec{w} - 2 \ \vec{v}\ ^2$	19.13 c)	$-2x + 2y + z - 14 = 0$
19.7 b)	$6 \ \vec{w}\ ^2 - \ \vec{v}\ ^2 + \vec{v} \cdot \vec{w}$	19.13 d)	$H(-1, 4, 4)$

$$19.13 \text{ e)} \dots\dots\dots \boxed{4\sqrt{5}}$$

$$19.14 \text{ a)} \dots\dots\dots \boxed{x + 2y - z - 2 = 0}$$

$$19.14 \text{ b)} \dots\dots\dots \boxed{H\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{8}{3}\right)}$$

$$19.14 \text{ c)} \dots\dots\dots \boxed{\frac{7\sqrt{3}}{3}}$$

$$19.15 \text{ a)} \dots\dots\dots \boxed{\sqrt{2t^2 - 6t + 9}}$$

$$19.15 \text{ b)} \dots\dots\dots \boxed{\frac{2t - 3}{\sqrt{2t^2 - 6t + 9}}}$$

$$19.15 \text{ c)} \dots\dots\dots \boxed{\frac{3\sqrt{2}}{2}}$$

$$19.16 \text{ a)} \dots\dots\dots \boxed{\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 4 - 3t \\ z = 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}}$$

$$19.16 \text{ b)} \dots\dots\dots \boxed{H\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 1\right)}$$

$$19.16 \text{ c)} \dots\dots\dots \boxed{\frac{\sqrt{14}}{2}}$$

$$19.17 \text{ a)} \dots\dots\dots \boxed{AM_t = |t|\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$19.17 \text{ b)} \dots\dots\dots \boxed{-\frac{ax_A + by_A + cz_A + d}{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$19.17 \text{ c)} \dots\dots\dots \boxed{\frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

$$19.18 \text{ a)} \dots\dots\dots \boxed{BP \times BH}$$

$$19.18 \text{ b)} \dots\dots\dots \boxed{\sqrt{6}}$$

$$19.18 \text{ c)} \dots\dots\dots \boxed{1}$$

$$19.18 \text{ d)} \dots\dots\dots \boxed{\frac{\sqrt{6}}{6}}$$

$$19.18 \text{ e)} \dots\dots\dots \boxed{PF = \frac{\sqrt{30}}{6}}$$

$$19.19 \text{ a)} \dots\dots\dots \boxed{\begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 2 + t \\ z = 2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}}$$

$$19.19 \text{ b)} \dots\dots\dots \boxed{\frac{5\sqrt{3}}{3}}$$

$$19.19 \text{ c)} \dots\dots\dots \boxed{\frac{5\sqrt{2}}{2}}$$

Corrigés

$$19.1 \text{ a)} \quad \text{On a } P(1) = 1^2 + \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{3} = \frac{6}{6} + \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{11}{6}.$$

$$19.1 \text{ b)} \quad \text{On a } P(-4) = (-4)^2 + \frac{1}{2} \times (-4) + \frac{1}{3} = \frac{48}{3} + \frac{-6}{3} + \frac{1}{3} = \frac{43}{3}.$$

$$19.1 \text{ c)} \quad \text{On a } P\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{3} = \frac{12}{4} + \frac{1}{3} = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}.$$

$$19.1 \text{ d)} \quad \text{On a } P(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 + \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{7}{3} + \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

$$19.2 \text{ a)} \quad \text{On a } u_1 = u_0 + 0 + 1 = 5.$$

$$19.2 \text{ b)} \quad \text{On a } u_2 = u_1 + 1 + 1 = 7, \text{ d'où } u_3 = u_2 + 2 + 1 = 10.$$

$$19.2 \text{ c)} \quad \text{On a } v_1 = v_0 + 0 = 4, \text{ d'où } v_2 = v_1 + 1 = 5 \text{ et } v_3 = v_2 + 2 = 7.$$

19.2 d) On a $w_1 = w_0 - 0 + 1 = 5$, d'où $w_2 = w_1 - 1 + 1 = 5$ et $w_3 = w_2 - 2 + 1 = 4$.

19.3 a) On a $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \times 14 + 3 \times (-1) + (-4) \times (-8) = 29$. Comme $\vec{a} \cdot \vec{b} \neq 0$, $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ne sont pas orthogonaux.

19.3 b) On a $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \times 2 + 3 \times 4 + (-4) \times 3 = 0$, on a ainsi montré que $\vec{a}$ et $\vec{c}$ sont orthogonaux.

19.4 a) Remarquons pour commencer que $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$ et qu'ainsi $\sqrt{2} \times \sqrt{6} = 2\sqrt{3}$ et $\sqrt{3} \times \sqrt{6} = 3\sqrt{2}$.

On a $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \times (-2) + (-\sqrt{6}) \times (\sqrt{3} + \sqrt{6}) + 3\sqrt{2} \times (1 - 3\sqrt{2}) = -8 - 3\sqrt{2} - 6 + 3\sqrt{2} - 18 = -32$.

On a montré que $\vec{a} \cdot \vec{b} \neq 0$ donc que $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ne sont pas orthogonaux.

19.4 b) On a $\vec{a} \cdot \vec{c} = 4 \times 2 + (-\sqrt{6}) \times \sqrt{3} + 3\sqrt{2} \times 1 = 8 - 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 8 \neq 0$.

19.4 c) On a $\vec{a} \cdot \vec{d} = [4 \times (-2\sqrt{3})] + [(-\sqrt{6}) \times (3 - \sqrt{2})] + [3\sqrt{2} \times (\sqrt{3} + \sqrt{6})]$
 $= [-8\sqrt{3}] + [-3\sqrt{6} + \sqrt{6} \times \sqrt{2}] + [3\sqrt{2} \times \sqrt{3} + 3\sqrt{2} \times \sqrt{6}]$
 $= [-8\sqrt{3}] + [-3\sqrt{6} + 2\sqrt{3}] + [3\sqrt{6} + 6\sqrt{3}] = 0$.

19.4 d) On a $\vec{b} \cdot \vec{c} = -2 \times 2 + (\sqrt{3} + \sqrt{6}) \times \sqrt{3} + (1 - 3\sqrt{2}) \times 1 = -4 + 3 + 3\sqrt{2} + 1 - 3\sqrt{2} = 0$.

19.4 e) On a $\vec{b} \cdot \vec{d} = [-2 \times (-2\sqrt{3})] + [(\sqrt{3} + \sqrt{6}) \times (3 - \sqrt{2})] + [(1 - 3\sqrt{2}) \times (\sqrt{3} + \sqrt{6})]$
 $= [4\sqrt{3}] + [3\sqrt{3} - \sqrt{3} \times \sqrt{2} + 3\sqrt{6} - \sqrt{6} \times \sqrt{2}] + [\sqrt{3} + \sqrt{6} - 3\sqrt{2} \times \sqrt{3} - 3\sqrt{2} \times \sqrt{6}]$
 $= [4\sqrt{3}] + [3\sqrt{3} - \sqrt{6} + 3\sqrt{6} - 2\sqrt{3}] + [\sqrt{3} + \sqrt{6} - 3\sqrt{6} - 6\sqrt{3}] = 0$.

19.4 f) On a $\vec{c} \cdot \vec{d} = 2 \times (-2\sqrt{3}) + \sqrt{3} \times (3 - \sqrt{2}) + 1 \times (\sqrt{3} + \sqrt{6}) = -4\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - \sqrt{6} + \sqrt{3} + \sqrt{6} = 0$.

19.5 a) On a $\vec{v} \cdot \vec{w} = 4(t + 3) + 6t + 4 = 10t + 16$. On en déduit que $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ si, et seulement si, $t = -\frac{8}{5}$.

19.5 b) On a $\vec{v} \cdot \vec{w} = 2t^2 + (2 + t)(2 - t) - 5 = (t - 1)(t + 1)$, donc $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ si, et seulement si, $t = -1$ ou $t = 1$.

19.6 a) On a $\vec{v} \cdot \vec{w} = 4t + t + t^2 = t^2 + 5t = t(t + 5)$, donc $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ si, et seulement si, $t = 0$ ou $t = -5$.

19.6 b) On a $\vec{v} \cdot \vec{w} = (t - 1)(t + 1) + (t + 2)^2 - (t - 3)^2 = t^2 + 10t - 6 = (t + 5)^2 - 31 = (t + 5 - \sqrt{31})(t + 5 + \sqrt{31})$, donc $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ si, et seulement si, $t = -5 - \sqrt{31}$ ou $t = -5 + \sqrt{31}$.

19.7 a) On a $2\vec{v} \cdot (3\vec{w} - \vec{v}) = 6\vec{v} \cdot \vec{w} - 2\vec{v} \cdot \vec{v} = 6\vec{v} \cdot \vec{w} - 2\|\vec{v}\|^2$.

19.7 b) On a $(\vec{v} + 2\vec{w}) \cdot (3\vec{w} - \vec{v}) = 3\vec{v} \cdot \vec{w} - \vec{v} \cdot \vec{v} + 6\vec{w} \cdot \vec{w} - 2\vec{w} \cdot \vec{v} = 6\|\vec{w}\|^2 + \vec{v} \cdot \vec{w} - \|\vec{v}\|^2$.

19.7 c) On a $(3\vec{v} - \vec{w}) \cdot (2\vec{v} + 3\vec{w}) = 6\vec{v} \cdot \vec{v} + 9\vec{v} \cdot \vec{w} - 2\vec{w} \cdot \vec{v} - 3\vec{w} \cdot \vec{w} = 6\|\vec{v}\|^2 - 3\|\vec{w}\|^2 + 7\vec{v} \cdot \vec{w}$.

19.7 d) On a $(\vec{v} + 3\vec{w}) \cdot (3\vec{w} - \vec{v}) = (3\vec{w} + \vec{v}) \cdot (3\vec{w} - \vec{v}) = \|3\vec{w}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 9\|\vec{w}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$.

19.8 a) On a $\|\vec{v} + 2\vec{w}\|^2 = (\vec{v} + 2\vec{w})^2 = \vec{v}^2 + 2 \times (\vec{v} \cdot (2\vec{w})) + (2\vec{w})^2 = \|\vec{v}\|^2 + 4 \vec{v} \cdot \vec{w} + 4 \|\vec{w}\|^2$.

19.8 b) On a $\|3\vec{v} - \vec{w}\|^2 = \|3\vec{v}\|^2 - 2 \times (3\vec{v}) \cdot \vec{w} + \|\vec{w}\|^2 = 9\|\vec{v}\|^2 - 6\vec{v} \cdot \vec{w} + \|\vec{w}\|^2$.

19.8 c) On a $\|2\vec{v} + \sqrt{3}\vec{w}\|^2 = \|2\vec{v}\|^2 + 2 \times (2\vec{v}) \cdot (\sqrt{3}\vec{w}) + \|\sqrt{3}\vec{w}\|^2 = 4\|\vec{v}\|^2 + 4\sqrt{3}\vec{v} \cdot \vec{w} + 3\|\vec{w}\|^2$.

19.9 a) On a $(2\vec{v} - 3\vec{w}) \cdot (3\vec{v} + 2\vec{w}) = 6\|\vec{v}\|^2 - 6\|\vec{w}\|^2 - 5\vec{v} \cdot \vec{w} = 6 \times 1^2 - 6 \times 3^2 - 5 \times 0 = -48$.

19.9 b) On a $(2\vec{v} - 3\vec{w}) \cdot (3\vec{u} + 2\vec{w}) = 6\vec{v} \cdot \vec{u} + 4\vec{v} \cdot \vec{w} - 9\vec{w} \cdot \vec{u} - 6\|\vec{w}\|^2 = -6 \times 3^2 = -54$.

19.9 c) On a $(\vec{u} + \vec{w}) \cdot (2\vec{u} - 2\vec{w}) = 2\|\vec{u}\|^2 - 2\|\vec{w}\|^2 = 2 \times (\sqrt{2})^2 - 2 \times 3^2 = -14$.

19.9 d) On a $\|2\vec{v} + 3\vec{w}\|^2 = 4\|\vec{v}\|^2 + 9\|\vec{w}\|^2 + 12\vec{v} \cdot \vec{w} = 4 \times 1^2 + 9 \times 3^2 + 12 \times 0 = 85$.

19.9 e) On a $\|\sqrt{2}\vec{u} + \vec{w}\|^2 = 2\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 + 2\sqrt{2} \times \vec{u} \cdot \vec{w} = 2 \times (\sqrt{2})^2 + 3^2 + 2 \times 0 = 13$.

19.9 f) On a $\|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + 2\vec{u} \cdot \vec{w} + 2\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 = 12$.

19.10 a) Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- M appartient à $\mathcal{P}$.
- $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.
- $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-5 \\ z-6 \end{pmatrix}$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux.
- $2(x-2) - (y-5) + 2(z-6) = 0$.
- $2x - y + 2z - 11 = 0$.

On a montré que $\mathcal{P}$ admet pour équation $2x - y + 2z - 11 = 0$.

19.10 b) Le plan $\mathcal{P}$ admet $\vec{n}$ pour vecteur normal donc $\mathcal{P}$ admet une équation de la forme $2x - y + 2z + d = 0$ avec d réel. De plus, $A(1, -2, 3)$ appartient à $\mathcal{P}$ donc $2 \times 1 - (-2) + 2 \times 3 + d = 0$ donc $d = -10$.

Le plan $\mathcal{P}$ admet pour équation $2x - y + 2z - 10 = 0$.

19.10 c) Pour cette question et la suivante, on procède de façon identique à la question a) ou à la question b).

19.11 On substitue les coordonnées de A dans le membre de droite des différentes équations :

$$1 + 2 \times 2 + 3 = 8, \quad 1 + 0 - 2 \times 2 + 3 = 0, \quad 1 + 0 + 2 \times 2 - 5 = 0, \quad 1 + 2 \times 2 - 5 = 0.$$

On en déduit que la réponse (a) n'est pas l'équation d'un plan passant par A.

Les plans dont les équations sont les réponses (b), (c) et (d) admettent respectivement pour vecteurs normaux :

$$\vec{n}_b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{n}_c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{n}_d \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}. \text{ Le vecteur } \vec{n}_b \text{ est le seul de ces vecteurs qui soit colinéaire à } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

La seule réponse correcte est donc la réponse (b).

19.12 a) Les plans $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$ et $\mathcal{P}_4$ admettent respectivement $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{n}_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{n}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{n}_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour vecteurs normaux. On a ainsi $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 1 \times 2 + 1 \times (-1) + 1 \times 0 = 1$. Les vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ ne sont pas orthogonaux donc les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ne sont pas perpendiculaires. On procède de façon identique pour les questions suivantes.

19.13 b) Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace. M appartient à (BC) si, et seulement si, $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BM} \begin{pmatrix} x-3 \\ y-0 \\ z-2 \end{pmatrix}$ sont colinéaires, c'est-à-dire si, et seulement si, il existe un réel t tel que $\begin{cases} x-3 = -2t \\ y = 2t \\ z-2 = t \end{cases}$, c'est-à-dire $\begin{cases} x = 3-2t \\ y = 2t \\ z = 2+t \end{cases}$.

19.13 c) Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- M appartient à $\mathcal{P}$.
- $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-3 \\ y-4 \\ z-12 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux.
- $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.
- $-2(x-3) + 2(y-4) + z-12 = 0$.
- $-2x + 2y + z - 14 = 0$.

On a montré que $\mathcal{P}$ admet pour équation $-2x + 2y + z - 14 = 0$.

19.13 d) Le point H appartient à (BC) donc il existe un réel t tel que ses coordonnées soient $H(3-2t, 2t, 2+t)$. De plus, H appartient à $\mathcal{P}$ donc $-2(3-2t) + 2 \times 2t + 2+t-14 = 0$. On en déduit que $t = 2$ et $H(-1, 4, 4)$.

19.13 e) On a $AH = \sqrt{(-1-3)^2 + (4-4)^2 + (4-12)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$.

19.14 a) Le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d et un vecteur normal à $\mathcal{P}$, on en déduit que $\mathcal{P}$ admet une équation de la forme $x + 2y - z + d = 0$. De plus, $\mathcal{P}$ passe par $A(5, 0, 3)$ donc $5 + 2 \times 0 - 3 + d = 0$ et $d = -2$. Le plan $\mathcal{P}$ admet $x + 2y - z - 2 = 0$ pour équation.

19.14 b) Le point H appartient à d donc il existe un réel t tel que $H(3+t, 5+2t, 1-t)$. Le point H appartient à $\mathcal{P}$ donc $3+t + 2(5+2t) - (1-t) - 2 = 0$. On en déduit que $t = -\frac{5}{3}$ et que $H(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{8}{3})$.

19.14 c) On a $AH = \sqrt{\left(\frac{4}{3}-5\right)^2 + \left(\frac{5}{3}-0\right)^2 + \left(\frac{8}{3}-3\right)^2} = \sqrt{\frac{147}{9}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$.

19.15 a) On a $AM = \sqrt{(t+1-2)^2 + (2-4)^2 + (2-t-0)^2} = \sqrt{(t-1)^2 + 4 + (t-2)^2} = \sqrt{2t^2 - 6t + 9}$.

19.15 b) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel t , on a $f'(t) = \frac{4t-6}{2\sqrt{2t^2-6t+9}} = \frac{2t-3}{\sqrt{2t^2-6t+9}}$.

19.15 c) En étudiant le signe de f' , on montre que f admet un minimum en $t = \frac{3}{2}$. Ce minimum vaut $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. La distance de A à d est donc égale à $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

19.16 a) Le plan $\mathcal{P}$ admet pour vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. La droite (AH) passe par A et admet pour vecteur

directeur $\vec{n}$, on en déduit une représentation paramétrique de (AH) : $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 4 - 3t \\ z = 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

19.16 b) D'après la question précédente, il existe un réel t tel que $H(2+t, 4-3t, 2t)$. De plus, H appartient à $\mathcal{P}$ donc $2+t-3(4-3t)+2 \times 2t+3=0$ d'où $t = \frac{1}{2}$ et $H\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 1\right)$.

19.17 a) On a $AM_t = \sqrt{(x_A + at - x_A)^2 + (y_A + bt - y_A)^2 + (z_A + ct - z_A)^2} = \sqrt{(at)^2 + (bt)^2 + (ct)^2}$
 $= \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)t^2} = |t|\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$

19.17 b) Les propositions suivantes sont équivalentes :

- $M_t(x_A + at, y_A + bt, z_A + ct)$ appartient à $\mathcal{P}$;
 - $a(x_A + at) + b(y_A + bt) + c(z_A + ct) + d = 0$;
 - $(a^2 + b^2 + c^2)t + ax_A + by_A + cz_A + d = 0.$
- On a ainsi $t_H = -\frac{ax_A + by_A + cz_A + d}{a^2 + b^2 + c^2}.$

19.17 c) La distance de A à $\mathcal{P}$ est : $AM_{t_H} = \left| -\frac{ax_A + by_A + cz_A + d}{a^2 + b^2 + c^2} \right| \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$

19.18 a) On a $\vec{BF} \cdot \vec{BH} = (\vec{BP} + \vec{PF}) \cdot \vec{BH} = \vec{BP} \cdot \vec{BH} + \vec{PF} \cdot \vec{BH} = BP \times BH + 0.$

19.18 b) Dans le triangle DAB rectangle en A, on a $BA^2 + AD^2 = BD^2$, d'où $BD^2 = 5$.

Dans le triangle DHB rectangle en D, on a $BD^2 + DH^2 = BH^2$, d'où $BH^2 = 6$ et $BH = \sqrt{6}.$

19.18 c) On a $\vec{BF} \cdot \vec{BH} = \vec{BF} \cdot (\vec{BF} + \vec{FH}) = \|\vec{BF}\|^2 + \vec{BF} \cdot \vec{FH} = 1 + 0.$

19.18 d) D'une part, on a $\vec{BF} \cdot \vec{BH} = 1$, d'autre part on a $\vec{BF} \cdot \vec{BH} = BP \times BH$. Ainsi $\sqrt{6} \times BP = 1$ et $BP = \frac{1}{\sqrt{6}}.$

19.18 e) Dans BPF, on a $BF^2 = BP^2 + PF^2$, d'où $PF^2 = BF^2 - BP^2 = 1^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2 = \frac{5}{6}$ et $PF = \sqrt{\frac{5}{6}} = \frac{\sqrt{30}}{6}.$

19.19 b) Le plan $\mathcal{P}$ perpendiculaire à (BC) et passant par A admet $\vec{BC}$ pour vecteur directeur, on en déduit que $\mathcal{P}$ admet pour équation cartésienne : $-2x + y + z = 0.$

En utilisant la représentation paramétrique de (BC) et l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$, on obtient les coordonnées du projeté orthogonal H de A sur (BC) : $H\left(\frac{8}{3}; \frac{8}{3}; \frac{8}{3}\right)$. On en déduit $AH = \frac{5\sqrt{3}}{3}.$

19.19 c) On a $BC = \sqrt{6}$ et $AH = \frac{5\sqrt{3}}{3}$. On en déduit que l'aire de ABC est égale à $\frac{BC \times AH}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$

Fiche n° 20. Plans et sphères dans l'espace

Réponses

20.1 a) $\emptyset$

20.1 b) la droite

20.1 c) $\{M(9, -21)\}$

20.2 a) $] -\infty, -1[\cup \left[\frac{3}{2}, +\infty[$

20.2 b) $\left] -3, \frac{5}{2} \right[$

20.2 c) $\left[-\frac{1}{2}, 5 \right[$

20.3 a) $A(3, 0, 0)$

20.3 b) $A(0, 4, 0)$

20.3 c) $A(6, 0, 0)$

20.3 d) $A(18, 0, 0)$

20.4 a) $x = 1$

20.4 b) $z = 1$

20.4 c) $2x + 3y = 8$

20.5 a) $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

20.5 b) $\vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

20.5 c) $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

20.5 d) $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

20.6 a) $z = 3$

20.6 b) $y = 2$

20.6 c) $y = 2$

20.6 d) $x = 1$

20.7 a) $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

20.7 b) $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

20.8 a) $3x - 2y + 4z = -13$

20.8 b) $2x - y + 3z = -9$

20.9 a) $3x - 2y + 2z = -7$

20.9 b) $x - 2y + 4z = -15$

20.10 a) $x + y = 1$

20.10 b) $x + y = 1$

20.10 c) $z = 1$

20.11 $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 1$

20.12 a) $x = -1$

20.12 b) $x - y = 3$

20.13 a) $\{I(0, 3, -3)\}$

20.13 b) $\left\{ I \left(\frac{11}{4}, \frac{1}{4}, \frac{5}{2} \right) \right\}$

20.13 c) $\emptyset$

20.14 a) $\left\{ I \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 2 \right) \right\}$

20.14 b) (d)

20.15 a) $A(1, -1, 0)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

20.15 b) $A(2, 0, -1)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

20.15 c) $A(-1, 1, 0)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

20.16 d) $A \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u} \begin{pmatrix} 28 \\ 27 \\ 5 \end{pmatrix}$

20.16 a) $A(-6, 12, 0), \vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

20.17 a) .. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 35 = 0$

20.17 b) ... $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z + 2 = 0$

20.16 b) $A(9, -3, 0), \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

20.18 a) $\Omega(0, 0, 0)$ et $R = 2$

20.18 b) $\emptyset$

20.16 c) $A(3, 4, 0), \vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

20.18 c) $\Omega(-1, 2, 3)$ et $R = \sqrt{13}$

20.19 a) $\Omega\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ et $R = 2$

20.19 b) $\Omega(\cos(\alpha), \sin(\alpha), 0)$ et $R = 2$

Corrigés

20.2 a) Un trinôme est du signe de « a » à l'extérieur de l'intervalle des racines ! Et ici, les racines sont $\frac{3}{2}$ et -1 .

20.2 b) Ici, le coefficient « a » vaut -2 .

20.8 a) On détermine un vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Les nombres x, y, z vérifient $\begin{cases} 4x + 2y - 2z = 0 \\ 4y + 2z = 0 \end{cases}$,

ce qui donne $\begin{cases} x = \frac{3}{4}z \\ y = -\frac{1}{2}z \end{cases}$. On cherche un (seul) vecteur normal, on choisit donc par exemple $z = 4$, ce qui donne $x = 3$ et $y = -2$. Ainsi, une équation du plan est de la forme $3x - 2y + 4z = d$. Puis, on détermine d en écrivant que A appartient au plan.

20.8 b) On détermine un vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Les nombres x, y, z vérifient $\begin{cases} x + 5y + z = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases}$,

ce qui donne $x = -2y$ avec la seconde équation, d'où $z = -x - 5y = -3y$. On cherche un (seul) vecteur normal : on choisit par exemple $y = -1$, ce qui donne $x = 2$ et $z = 3$; donc, une équation du plan est de la forme $2x - y + 3z = d$. Puis, on détermine d en écrivant que A appartient au plan.

20.9 a) On procède comme précédemment. On trouve le système $\begin{cases} 4x + y - 5z = 0 \\ 2x - 2y - 5z = 0 \end{cases}$, donc $\begin{cases} 4x - y = 5z \\ 2x - 2y = 5z \end{cases}$.

En choisissant $z = 2$, on trouve l'équation $3x - 2y + 2z = d$ pour le plan. On détermine d en utilisant le point A.

20.9 b) On détermine un vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$, ainsi x, y, z vérifient $\begin{cases} 2x + 3y + z = 0 \\ 4x + 8y + 3z = 0 \end{cases}$, ce qu'on

choisit de réécrire $\begin{cases} 2x + z = -3y \\ 4x + 3z = -8y \end{cases}$, d'où $z = -2y$ et $x = -\frac{1}{2}y$. On cherche un (seul) vecteur normal : on choisit

par exemple $y = -2$, ce qui donne $x = 1$ et $z = 4$; donc, une équation du plan est de la forme $x - 2y + 4z = d$. Puis, on détermine d en écrivant que A appartient au plan.

20.12 a) Ce plan passe par $I(-1, 0, 0)$ et est orthogonal à $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

20.12 b) Ce plan passe par $I(3, 0, -3)$ et est orthogonal à $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

20.13 a) Une représentation paramétrique de la droite est donnée par $A + \lambda \vec{u}$. La droite et le plan ont un point d'intersection si, et seulement si, l'équation $(1 + \lambda) + 2(2 - \lambda) = 6$ admet une solution, ce qui est le cas ici (pour $\lambda = -1$). On en déduit les coordonnées du point d'intersection $\begin{pmatrix} 1 + \lambda \times 1 \\ 2 + \lambda \times (-1) \\ -1 + \lambda \times 2 \end{pmatrix}$.

20.13 b) On trouve $\lambda = \frac{7}{4}$.

20.13 c) Le point A n'appartient pas au plan mais la droite est parallèle au plan; en effet le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, qui est un vecteur normal au plan, est orthogonal au vecteur $\vec{u}$. Ainsi, la droite est strictement parallèle au plan.

20.14 a) On trouve $\lambda = \frac{3}{2}$.

20.14 b) Là encore, le vecteur directeur de la droite (d) est orthogonal au vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, donc la droite est parallèle au plan. Mais, ici, le point A appartient au plan, donc la droite est toute entière incluse dans le plan.

20.15 a) Il suffit de se représenter la position de ces deux plans : ils sont tous deux parallèles au vecteur $\vec{k} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

20.16 a) L'intersection de ces deux plans est une droite, dont les points vérifient $\begin{cases} x + y - 2z = 6 \\ y + z = 12 \end{cases}$, qu'on écrit plutôt $\begin{cases} x = -6 + 3z \\ y = 12 - z \end{cases}$. Comme il n'y a aucune condition sur z , on obtient la droite donnée par la représentation paramétrique $A \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + z \vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

20.16 b) L'intersection de ces deux plans est une droite, dont les points vérifient $\begin{cases} x + y - 2z = 6 \\ x - y + z = 12 \end{cases}$ et donc, après calcul, $\begin{cases} x = 9 + \frac{1}{2}z \\ y = -3 + \frac{3}{2}z \end{cases}$. On obtient la droite donnée par la représentation paramétrique $A \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + z \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

20.17 a) On rappelle que la sphère de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points M vérifiant $\Omega M = R$. On en obtient une équation cartésienne en écrivant $\Omega M^2 = R^2$, c'est-à-dire $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 49$.

.....
20.18 b) L'équation $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 3z + 10 = 0$ est équivalente à $(x+1)^2 + (y-2)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} = 0$,
et cette équation n'a pas de solution.
.....

20.18 c) L'équation $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + 1 = 0$ est équivalente à $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 - 13 = 0$.
.....

20.19 a) On a $x^2 + y^2 + z^2 - x - 3y + z - \frac{5}{4} = 0 \iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} - \frac{5}{4} = 0$.
.....

Fiche n° 21. Équations différentielles I

Réponses

21.1 a) $e^{\frac{1}{3}}$

21.1 b) $e^{-\frac{17}{20}}$

21.1 c) $e^{\frac{\pi}{6}}$

21.1 d) e^6

21.2 a) $\frac{2}{7}$

21.2 b) -2

21.2 c) $-\frac{18}{13}$

21.2 d) $\frac{25}{23}$

21.3 a) $x \mapsto Ce^{2x}$

21.3 b) $x \mapsto Ce^{-7x}$

21.3 c) $x \mapsto Ce^{3x/2}$

21.3 d) $x \mapsto Ce^{-5x/7}$

21.4 a) $x \mapsto 5e^{-11x}$

21.4 b) $x \mapsto \pi e^{-5x}$

21.5 a) $x \mapsto e^{\frac{1}{3} - \frac{4}{9}x}$

21.5 b) $x \mapsto e^{2-\sqrt{2}x}$

21.6 a) $x \mapsto 3$

21.6 b) $x \mapsto Ce^x$

21.6 c) $x \mapsto ke^x + 3$

21.7 a) $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{6}}$

21.7 b) $x \mapsto Ce^{\sqrt{3}x}$

21.7 c) ... $x \mapsto Ce^{\sqrt{3}x} + \frac{1}{\sqrt{6}}$

Corrigés

21.1 a) On a $e^{\frac{3}{2}} \times e^{-\frac{7}{6}} = e^{\frac{3}{2} - \frac{7}{6}} = e^{\frac{9-7}{6}} = e^{\frac{2}{6}} = e^{\frac{1}{3}}$.

21.1 b) On a $(e^{-\frac{3}{4}})^3 \times (e^{\frac{7}{25}})^5 = e^{-\frac{9}{4}} \times e^{\frac{7}{5}} = e^{-\frac{9}{4} + \frac{7}{5}} = e^{-\frac{45+28}{20}} = e^{-\frac{17}{20}}$.

21.1 c) On a $e^{\frac{\pi}{2}} \times e^{-\frac{\pi}{3}} = e^{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}} = e^{\frac{3\pi-2\pi}{6}} = e^{\frac{\pi}{6}}$.

21.1 d) On a $\frac{e^{3x+7} \times e^{2x+1}}{(e^{x+2/5})^5} = \frac{e^{5x+8}}{e^{5x+2}} = e^{5x+8-5x-2} = e^6$.

21.2 b) Soit $x \in \mathbb{R}$ différent de 0 et de -1 . On a les équivalences suivantes (en multipliant par $x(x+1)$) :

$$\frac{1}{x+1} = \frac{2}{x} \iff x = 2(x+1) \iff x = -2.$$

21.3 a) D'après le cours, les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions du type $x \mapsto Ce^{ax}$, où C parcourt $\mathbb{R}$. Ici, comme a vaut 2, on trouve que les solutions sont les fonctions $x \mapsto Ce^{2x}$.

21.4 a) D'après le cours, les solutions de l'équation $y' = -11y$ sont les fonctions du type $x \mapsto Ce^{-11x}$, où C parcourt $\mathbb{R}$. La condition $f(0) = 5$ impose que $Ce^{-11 \times 0} = 5$ et donc que $C = 5$.

21.4 b) L'équation différentielle donnée est équivalente à l'équation $y' = -5y$ dont les solutions sont les fonctions $x \mapsto Ce^{-5x}$, où $C \in \mathbb{R}$. La condition $f(0) = \pi$ impose que $Ce^{-5 \times 0} = \pi$ et donc que $C = \pi$.

21.5 a) L'équation différentielle donnée est équivalente à l'équation $y' = -\frac{4}{9}y$ dont les solutions sont les fonctions $x \mapsto Ce^{-\frac{4}{9}x}$, où C parcourt $\mathbb{R}$. Comme $f(3) = e^{-1}$, on a $Ce^{-\frac{4}{9} \times 3} = e^{-1}$ et donc $C = e^{-1} \times e^{\frac{4}{3}} = e^{\frac{1}{3}}$.

.....
21.5 b) L'équation différentielle donnée est équivalente à l'équation $y' = -\sqrt{2}y$ dont les solutions sont les fonctions $x \mapsto Ce^{-\sqrt{2}x}$, où C parcourt $\mathbb{R}$. Comme $f(\sqrt{2}) = 1$, on a $Ce^{-\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = 1$ et donc $C = e^2$.

21.6 a) Si f est une solution constante de l'équation différentielle (E) , alors f' est nulle. La fonction f vérifie donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 = f(x) - 3$ et donc $f(x) = 3$.

21.6 c) D'après le cours, les solutions de (E) s'obtiennent en ajoutant la solution constante avec la solution générale de l'équation homogène associée à (E) .

21.7 a)

Première solution.

Si f est une solution constante de l'équation différentielle (E) , alors f' est nulle.

La fonction f vérifie donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 = \sqrt{6}f(x) - 1$ et donc $f(x) = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

Deuxième solution.

En général, on peut remarquer qu'une solution constante de l'équation différentielle $ay' = by + c$ est la fonction $x \mapsto -\frac{c}{b}$. Ici, comme $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{6}$ et $c = -1$, on trouve qu'une solution constante de l'équation est $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{6}}$.

Fiche n° 22. Équations différentielles II

Réponses

22.1 (d)

22.2 (b)

22.3 a) $x \mapsto Ce^{-\frac{2}{3}x}$, où $C \in \mathbb{R}$

22.3 b) $\frac{15}{2}$

22.3 c) $x \mapsto Ce^{-\frac{2}{3}x} + \frac{15}{2}$, où $C \in \mathbb{R}$

22.4 a) (c)

22.4 b) $x \mapsto Ce^{\frac{1}{2}x}$, où $C \in \mathbb{R}$

22.4 c) $x \mapsto Ce^{\frac{1}{7}x}$, où $C \in \mathbb{R}$

22.4 d) $x \mapsto -14$

22.4 e) $x \mapsto Ce^{\frac{1}{2}x} - 14$, où $C \in \mathbb{R}$

22.5 a) (b)

22.5 b) $x \mapsto \frac{5}{2}$

22.5 c) $x \mapsto Ce^{-\frac{1}{10}x} + \frac{5}{2}$, où $C \in \mathbb{R}$

22.6 a) $x \mapsto Ce^{\frac{2}{3}x} - \frac{7}{2}$, où $C \in \mathbb{R}$

22.6 b) $x \mapsto Ce^{3x} + \frac{8}{3}$, où $C \in \mathbb{R}$

22.6 c) $x \mapsto Ce^{\frac{9}{4}x} - \frac{2}{3}$, où $C \in \mathbb{R}$

22.6 d) $x \mapsto Ce^{-\frac{3}{\pi}x} - \frac{\pi}{4}$, où $C \in \mathbb{R}$

22.7 a) $x \mapsto \frac{1}{2} - \frac{9}{2}e^{2x}$

22.7 b) $x \mapsto -7 + 7e^{-2}e^{2x}$

22.8 a) $x \mapsto \frac{b}{3} + Ce^{-\frac{3}{2}x}$, où $C \in \mathbb{R}$

22.8 b) $x \mapsto \frac{b}{3} + \frac{2b}{3}e^{-\frac{3}{2}x}$

22.8 c) $x \mapsto \frac{b}{3} + (c - \frac{b}{3})e^{-\frac{3}{2}x}$

22.8 d) $x \mapsto \frac{b}{3} + \frac{2b}{3}e^{\frac{3}{2}c}e^{-\frac{3}{2}x}$

22.9 (c)

22.10 a) $x \mapsto Ce^{5x}$, où $C \in \mathbb{R}$

22.10 b) $(\frac{-2}{5}, \frac{13}{25})$

22.10 c) ... $x \mapsto -\frac{2}{5}x + \frac{13}{25} + Ce^{5x}$, où $C \in \mathbb{R}$

22.11 a) (d)

22.11 b) $x \mapsto -\frac{2}{5}\cos(x) - \frac{6}{5}\sin(x) + Ce^{3x}$, où $C \in \mathbb{R}$

22.11 c) $x \mapsto -\frac{2}{5}\cos(x) - \frac{6}{5}\sin(x) + (\sqrt{2} + \frac{2}{5})e^{3x}$

22.12 a) (b)

22.12 b) $x \mapsto (\sin(x) + C)e^{-2x}$, où $C \in \mathbb{R}$

22.12 c) $x \mapsto (\sin(x) + 1)e^{-2x}$

22.13 $x \mapsto 20e^x - 12e^{-x}$

Corrigés

22.1 On a $f'(x) = 4e^{4x}$. Donc $\frac{1}{4}f'(x) = e^{4x} = f(x) + \frac{1}{4}$. Finalement, on a $f'(x) = 4f(x) + 1$.

22.3 a) On a une équation différentielle du type $y' = ay$, avec $a = -\frac{2}{3}$. D'après le cours, les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $\left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto Ce^{ax} \end{array} \right.$, où C est une constante réelle. Ici, on a $a = -\frac{2}{3}$; les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions $\left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto Ce^{-\frac{2}{3}x} \end{array} \right.$, quand C parcourt $\mathbb{R}$.

22.3 b) Soit $K \in \mathbb{R}$. Notons $\varphi : \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto K \end{array} \right.$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = 0$; donc, on a les équivalences suivantes :

$$\varphi \text{ solution de } (E) \iff 0 = -\frac{2}{3}K + 5 \iff K = -5 \times \frac{-3}{2} = \frac{15}{2}.$$

22.6 a) Pour commencer, remarquons qu'on a l'équivalence $3y' - 2y = 7 \iff y' = \frac{2}{3}y + \frac{7}{3}$.

D'après le cours, les solutions de $y' = \frac{2}{3}y$ sont les fonctions $\left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto Ce^{\frac{2}{3}x} \end{array} \right.$, où $C \in \mathbb{R}$. Une solution particulière constante de $y' = \frac{2}{3}y + \frac{7}{3}$ est $\left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto -\frac{7}{2} \end{array} \right.$. Donc, les solutions sont les $x \mapsto Ce^{\frac{2}{3}x} - \frac{7}{2}$, quand C parcourt $\mathbb{R}$.

22.7 a) Les solutions de l'équation différentielle $y' = 2y - 1$ sont les fonctions $\left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto Ce^{2x} + \frac{1}{2} \end{array} \right.$, où $C \in \mathbb{R}$. De plus, on a les équivalences suivantes :

$$y(0) = -4 \iff Ce^0 + \frac{1}{2} = -4 \iff C = -4 - \frac{1}{2} = -\frac{9}{2}.$$

22.7 b) Pour commencer, remarquons qu'on a l'équivalence $\frac{1}{2}y' - y = 7 \iff y' = 2y + 14$. Les solutions de l'équation différentielle $y' = 2y + 14$ sont donc les fonctions $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & Ce^{2x} - 7 \end{array} \right.$, où $C \in \mathbb{R}$. De plus, on a les équivalences suivantes :

$$y(1) = 0 \iff Ce^2 - 7 = 0 \iff C = 7e^{-2}.$$

22.8 a) Pour commencer, remarquons qu'on a l'équivalence $2y' + 3y = b \iff y' = -\frac{3}{2}y + \frac{b}{2}$.

Les solutions de $y' = -\frac{3}{2}y + \frac{b}{2}$ sont donc les fonctions $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{b}{3} + Ce^{-\frac{3}{2}x} \end{array} \right.$, quand C parcourt $\mathbb{R}$.

22.8 b) Grâce à question a), écrivons $y : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{b}{3} + Ce^{-\frac{3}{2}x} \end{array} \right.$, avec $C \in \mathbb{R}$. On a alors l'équivalence

$$\frac{b}{3} + Ce^0 = b \iff C = b - \frac{b}{3} = \frac{2b}{3}.$$

22.8 c) Grâce à question a), écrivons $y : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{b}{3} + Ce^{-\frac{3}{2}x} \end{array} \right.$, avec $C \in \mathbb{R}$. On a alors l'équivalence

$$\frac{b}{3} + Ce^0 = c \iff C = c - \frac{b}{3}.$$

22.8 d) Grâce à question a), écrivons $y : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{b}{3} + Ce^{-\frac{3}{2}x} \end{array} \right.$, avec $C \in \mathbb{R}$. On a alors l'équivalence

$$\frac{b}{3} + Ce^{-\frac{3}{2}c} = b \iff Ce^{-\frac{3}{2}c} = b - \frac{b}{3} = \frac{2b}{3} \iff C = \frac{2b}{3}e^{\frac{3}{2}c}.$$

22.10 b) On a $\varphi'(x) = a$, et φ est solution de (E) . Donc, on a les équivalences suivantes :

$$\varphi'(x) = 5\varphi(x) + 2x - 3 \iff a = 5(ax + b) + 2x - 3 \iff (5a + 2)x + 5b - a - 3 = 0.$$

Pour que l'équation soit vérifiée, il faut et il suffit que (a, b) soit solution du système $\begin{cases} 5a + 2 = 0 \\ -a + 5b - 3 = 0 \end{cases}$. Or, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{cases} 5a + 2 = 0 \\ -a + 5b - 3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -\frac{2}{5} \\ 5b = 3 + a = 3 - \frac{2}{5} = \frac{13}{5} \end{cases} \iff \begin{cases} a = -\frac{2}{5} \\ b = \frac{13}{25} \end{cases}.$$

22.11 b) Pour commencer, remarquons qu'on a l'équivalence $y' - 3y = 4\sin(x) \iff y' = 3y + 4\sin(x)$.

Les solutions de $y' = 3y$ sont donc les fonctions $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & Ce^{3x} \end{array} \right.$, quand C parcourt $\mathbb{R}$. De plus, une solution particulière de (E) est $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -\frac{2}{5}\cos(x) - \frac{6}{5}\sin(x) \end{array} \right.$.

Donc, les solutions de (E) sont les fonctions $x \mapsto -\frac{2}{5}\cos(x) - \frac{6}{5}\sin(x) + Ce^{3x}$, quand C parcourt $\mathbb{R}$.

22.11 c) Fixons C tel que la solution cherchée s'écrive $y(x) = -\frac{2}{5}\cos(x) - \frac{6}{5}\sin(x) + Ce^{3x}$. On a les équivalences suivantes :

$$y(0) = \sqrt{2} \iff -\frac{2}{5} \times 1 - \frac{6}{5} \times 0 + C \times 1 = \sqrt{2} \iff -\frac{2}{5} + C = \sqrt{2} \iff C = \sqrt{2} + \frac{2}{5}.$$

La solution cherchée est $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto -\frac{2}{5}\cos(x) - \frac{6}{5}\sin(x) + \left(\sqrt{2} + \frac{2}{5}\right)e^{3x}. \end{array} \right.$

22.12 b) Pour commencer, remarquons qu'on a l'équivalence $y' + 2y = e^{-2x}\cos(x) \iff y' = -2y + e^{-2x}\cos(x)$.

Les solutions de $y' = -2y$ sont donc les fonctions $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto Ce^{-2x} \end{array} \right.$, quand C parcourt $\mathbb{R}$. Comme une solution

particulière de (E) est $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto e^{-2x}\sin(x) \end{array} \right.$, les solutions de (E) sont donc les fonctions $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto (\sin(x) + C)e^{-2x} \end{array} \right.$, quand C parcourt $\mathbb{R}$.

22.12 c) Fixons $C \in \mathbb{R}$ tel que la solution cherchée s'écrive $y(x) = (\sin(x) + C)e^{-2x}$. On a alors les équivalences suivantes

$$y(0) = 1 \iff (0 + C) \times 1 = 1 \iff C = 1.$$

La solution cherchée est la fonction $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto (\sin(x) + 1)e^{-2x}. \end{array} \right.$

22.13 On a $\varphi'(x) = 2e^x - 3e^{-x}$. Ainsi, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \varphi \text{ solution de } (E) &\iff \text{pour tout } x \in \mathbb{R}, 7\varphi'(x) + 3\varphi(x) = f(x) \\ &\iff \text{pour tout } x \in \mathbb{R}, 7(2e^x - 3e^{-x}) + 3(2e^x + 3e^{-x}) = f(x) \\ &\iff \text{pour tout } x \in \mathbb{R}, f(x) = 20e^x - 12e^{-x}. \end{aligned}$$

Fiche n° 23. Primitives II

Réponses

23.1 a) $\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + C$

23.1 b) $\frac{2}{5}x^5 - 4e^x - \frac{1}{x} + C$

23.2 a) $-\frac{1}{x}$

23.2 b) $-x^3 + \ln(|x|) + 2\sqrt{x} + C$

23.2 c) $3\ln(|x|) - \frac{1}{2x^2} + 6\sqrt{x} + C$

23.2 d) $\frac{1}{x^2} - \frac{2}{3x^3} + \frac{1}{2x^4} + 2\ln(|x|) + C$

23.3 a) $x^2 + x - 2$

23.3 b) $2\ln(|x|) + 3$

23.3 c) $\frac{1}{3}x^3 - e^x + 3x + \frac{3}{2}$

23.4 a) $\exp(x) + C$

23.4 b) $\frac{1}{2}\exp(2x + 3) + C$

23.4 c) $-\frac{1}{5}\exp(-5x + 2) + C$

23.5 a) $\ln(|x|) + C$

23.5 b) $\ln(|x - 3|) + C$

23.5 c) $\frac{1}{2}\ln(|2x + 1|) + C$

23.6 a) $\exp(x^2) + C$

23.6 b) $\sqrt{x^2 + 3x + 1} + C$

23.7 a) $(4x^2 - 2x - 3)^6 + C$

23.7 b) $\ln(|3x^2 + 5x - 1|) + C$

Corrigés

23.1 a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, une primitive de $x \mapsto x^n$ est $x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}$. On utilise également le fait qu'une primitive d'une somme est la somme des primitives de chacun des termes de la somme.

23.1 b) Pour tout $n \geq 2$, une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ est $x \mapsto \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$.

23.2 a) La dérivée de $x \mapsto \frac{1}{x}$ est $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$.

23.2 b) Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est $x \mapsto 2\sqrt{x}$.

23.3 a) La fonction F est une primitive de f donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $F(x) = x^2 + x + C$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. De plus, on a les équivalences suivantes : $F(1) = 0 \iff 1^2 + 1 + C = 0 \iff C = -2$. Donc, on a $F(x) = x^2 + x - 2$.

Fiche n° 24. Primitives III

Réponses

24.1 a) $x \mapsto \frac{x^4}{4} + 2x$

24.1 b) $x \mapsto \frac{1}{3} \ln |x|$

24.1 c) $x \mapsto 2\sqrt{x}$

24.1 d) $x \mapsto -\frac{1}{4x^4}$

24.1 e) $x \mapsto \frac{3}{2}x^{2/3}$

24.1 f) $x \mapsto -\frac{e^{-12x}}{12}$

24.2 a) $x \mapsto e^3 x$

24.2 b) $x \mapsto \frac{3}{5}e^{5x} - \frac{x^3}{3}$

24.2 c) $x \mapsto \frac{x^2}{2} + 5x + \frac{4}{x}$

24.2 d) $x \mapsto -\cos(2x)$

24.3 a) $x \mapsto \frac{(x^2 + x)^6}{6}$

24.3 b) $x \mapsto \frac{(x^2 + 3x + 12)^{11}}{11}$

24.3 c) $x \mapsto \frac{(x^3 + 3x + 4)^2}{6}$

24.3 d) $x \mapsto \frac{-4/3}{(x^3 + 2)^2}$

24.4 a) $x \mapsto -\frac{1}{2(1 + e^x)^2}$

24.4 b) $x \mapsto \frac{(e^x + x)^{23}}{23}$

24.4 c) $x \mapsto -\frac{1}{6}(1 - 2x^2)^{3/2}$

24.4 d) $x \mapsto \frac{(\ln(x))^2}{2}$

24.5 a) $x \mapsto \ln \sqrt{|2x - 3|}$

24.5 b) $x \mapsto \ln|x^4 + x^3|$

24.5 c) $x \mapsto \ln|x^3 + 2x^2 + 1|$

24.5 d) $x \mapsto \ln|x^5 + x^3 + x + 2|$

24.5 e) $x \mapsto \ln|e^x + x|$

24.5 f) $x \mapsto \ln(e^x + e^{-x})$

24.6 a) $x \mapsto xe^{x^3}$

24.6 b) $x \mapsto \frac{1}{3}e^{x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 15x - 12}$

24.6 c) $x \mapsto e^{-\cos(x) + 3}$

24.6 d) $x \mapsto \exp(e^x)$

Corrigés

24.2 a) La fonction est constante!

24.3 a) On reconnaît une forme $x \mapsto u'(x)u(x)^5$, où $u : x \mapsto x^2 + x$.

24.3 b) On reconnaît une forme $x \mapsto u'(x)u(x)^{10}$, où $u : x \mapsto x^2 + 3x + 12$.

24.3 c) On reconnaît une forme $x \mapsto \frac{1}{3}u'(x)u(x)$, où $u : x \mapsto x^3 + 3x + 4$.

24.3 d) On reconnaît une forme $x \mapsto \frac{8}{3}u'(x)u(x)^{-3}$, où $u : x \mapsto x^3 + 2$.

24.4 a) On reconnaît une forme $x \mapsto u'(x)u(x)^{-3}$, où $u : x \mapsto e^x + 1$.

24.4 b) On reconnaît une forme $x \mapsto u'(x)u(x)^{22}$, où $u : x \mapsto e^x + x$.

24.4 c) On reconnaît une forme $x \mapsto \frac{-1}{4}u'(x)u(x)^{1/2}$, où $u : x \mapsto 1 - 2x^2$.

24.4 d) On reconnaît une forme $x \mapsto u'(x)u(x)$, où $u : x \mapsto \ln(x)$.

24.5 b) On reconnaît une forme $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$, où $u : x \mapsto x^4 + x^3$.

24.5 c) On reconnaît une forme $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$, où $u : x \mapsto x^3 + 2x^2 + 1$.

24.5 d) On reconnaît une forme $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$, où $u : x \mapsto x^5 + x^3 + x + 12$.

24.5 e) On reconnaît une forme $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$, où $u : x \mapsto e^x + x$.

24.5 f) On reconnaît une forme $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$, où $u : x \mapsto e^x + e^{-x}$. Les valeurs absolues n'ont pas été utilisées ici car la somme de deux exponentielles est une quantité toujours positive.

24.6 a) On reconnaît une forme $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$, où $u : x \mapsto x^3 + \ln(x)$. On remarque que $e^{x^3 + \ln(x)} = xe^{x^3}$.

24.6 b) On reconnaît une forme $x \mapsto \frac{1}{3}u'(x)e^{u(x)}$, où $u : x \mapsto x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 15x - 12$.

24.6 c) On reconnaît une forme $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$, où $u : x \mapsto -\cos(x) + 3$.

24.6 d) On reconnaît une forme $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$, où $u : x \mapsto e^x$.

Fiche n° 25. Intégration I

Réponses

25.1 a)	$\frac{5}{6}$	25.4	$\textcircled{d}$	25.7 b)	$\frac{(-1)^n}{n-1}(2^{n-1}-1)$
25.1 b)	$\frac{1}{6}$	25.5 a)	$\frac{1-(-1)^{n+1}}{n+1}$	25.7 c)	$\frac{1}{n-1} \frac{a^{2n-2}-1}{a^{n-1}}$
25.1 c)	$-\frac{5}{6}$	25.5 b)	$\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$	25.7 d)	$\frac{1}{2n-1} \frac{2^n-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$
25.2 a)	$2^2 5^{-2}$	25.5 c)	$\frac{1}{n+1}$	25.8 a)	$\frac{2^{2n+1}}{3n+1}$
25.2 b)	$2^{-2} 5^2$	25.5 d)	$\frac{2^{n+1}-1}{4^{n+1}(n+1)}$	25.8 b)	2^{2n^2-1}
25.2 c)	$2^{-1} 5^{-1}$	25.6	$\frac{\sqrt{2}}{2n+1}$	25.9	$4(2^n-1)$
25.3 a)	$\frac{1}{2}$	25.7 a)	$\frac{1}{n-1}(2^{n-1}-1)$	25.10	$\frac{(n-1)}{n^{n-2}(2^{n-1}-1)}$
25.3 b)	$\frac{2}{3}$				
25.3 c)	$\frac{1}{2}$				

Corrigés

25.2 c) On a $\frac{1}{5} - \frac{1}{10} = 2 \times \frac{1}{10} - \frac{1}{10} = \frac{1}{10} = \frac{1}{2 \times 5} = 2^{-1} 5^{-1}$.

25.3 c) On a $\int_0^1 (-t+1) dt = 1 - \int_0^1 t dt = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

25.4 On a $\int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1} - \frac{0}{n+1} = \frac{1}{n+1}$.

25.5 c) On a $1 - \int_0^1 nt^n dt = 1 - n \int_0^1 t^n dt = 1 - n \times \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$.

25.5 d) On a $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{4^{n+1}} \right) = \frac{2^{n+1}-1}{(n+1)4^{n+1}}$.

25.6 On a $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{t^{2n}}{2^n} dt = \frac{1}{2^n} \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2^n} \frac{\sqrt{2}^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2^n} \frac{\sqrt{2}^{2n} \sqrt{2}}{2n+1} = \frac{1}{2^n} \frac{2^n \sqrt{2}}{2n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2n+1}$.

25.7 a) On a $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{t^n} dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 t^{-n} dt = \left[\frac{t^{-n+1}}{-n+1} \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{n-1} \left[\frac{1}{t^{n-1}} \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{n-1} (2^{n-1}-1)$.

25.7 b) On a

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{t^n} dt &= \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} t^{-n} dt = \left[\frac{t^{-n+1}}{-n+1} \right]_{-1}^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{n-1} \left[\frac{1}{t^{n-1}} \right]_{-1}^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{n-1} (1 - 2^{n-1}) = \frac{(-1)^n}{n-1} (2^{n-1} - 1).\end{aligned}$$

25.7 c) On a $\int_a^a \frac{1}{t^n} dt = \frac{1}{n-1} \left[\frac{1}{t^{n-1}} \right]_a^a = \frac{1}{n-1} \left(a^{n-1} - \frac{1}{a^{n-1}} \right) = \frac{1}{n-1} \frac{a^{2n-2} - 1}{a^{n-1}}.$

25.7 d) On a $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{1}{t^{2n}} dt = \frac{1}{2n-1} \left[\frac{1}{t^{2n-1}} \right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 = \frac{1}{2n-1} \left(\sqrt{2}^{2n-1} - 1 \right) = \frac{1}{2n-1} \left(\frac{2^n}{\sqrt{2}} - 1 \right) = \frac{1}{2n-1} \frac{2^n - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}.$

25.9 Pour commencer, on peut écrire

$$\begin{aligned}\int_0^2 2t dt + \int_0^2 3t^2 dt + \int_0^2 4t^3 dt + \cdots + \int_0^2 (n+1)t^n dt &= \sum_{k=1}^n \int_0^2 (k+1)t^k dt \\ &= \sum_{k=1}^n \left[t^{k+1} \right]_0^2 \\ &= \sum_{k=1}^n 2^{k+1} = 2 \sum_{k=1}^n 2^k.\end{aligned}$$

Or, on a $\sum_{k=1}^n 2^k = 2 \times \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 2$. Donc, la somme cherchée vaut $2(2^{n+1} - 2) = 4(2^n - 1)$.

25.10 Pour commencer, remarquons que

$$\int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} \frac{1}{t^n} dt = \left[\frac{t^{-n+1}}{-n+1} \right]_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n-1} \left[\frac{1}{t^{n-1}} \right]_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n-1} \left((2n)^{n-1} - n^{n-1} \right) = \frac{n^{n-1}}{n-1} (2^{n-1} - 1).$$

Ainsi, on trouve

$$\frac{n}{\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{1}{t^n} dt} = \frac{n(n-1)}{n^{n-1}(2^{n-1} - 1)} = \frac{(n-1)}{n^{n-2}(2^{n-1} - 1)}.$$

Fiche n° 26. Intégration II

Réponses

26.1 a)	$\frac{2}{3}$	26.4 c)	$-\frac{17}{5}$	26.7 b)	$\frac{17}{30}$
26.1 b)	$\frac{14}{9}$	26.5 a)	3π	26.8 a)	$\frac{1}{4}(e^4 - 1)$
26.1 c)	$\frac{50}{21}$	26.5 b)	4	26.8 b)	$\frac{1}{4}\left(e^3 - \frac{1}{e}\right)$
26.2 a)	28	26.5 c)	$\frac{1}{3}$	26.8 c)	$\frac{14}{3}$
26.2 b)	27	26.5 d)	$1 - \frac{1}{e}$	26.8 d)	$9 - 3\sqrt{3}$
26.3 a)	2^{-3}	26.6 a)	$\frac{45}{4}$	26.9 a)	$-\frac{1}{2}$
26.3 b)	3^{17}	26.6 b)	$\frac{31}{10}$	26.9 b)	$\frac{1}{2}(e - 1)$
26.3 c)	2^{-15}	26.6 c)	2	26.9 c)	$e - \sqrt{e}$
26.3 d)	5^{12}	26.6 d)	$-\frac{1}{2}$	26.9 d)	-3 570
26.4 a)	-1	26.7 a)	$\frac{39}{2}$		
26.4 b)	-3				

Corrigés

26.5 b) On a $\int_{-1}^3 u \, du = \left[\frac{u^2}{2} \right]_{-1}^3 = \frac{3^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2} = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$.

26.5 d) On a $\int_{-1}^0 e^x \, dx = \left[e^x \right]_{-1}^0 = e^0 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e}$.

26.6 a) On a $\int_{-1}^2 3t^3 \, dt = 3 \left[\frac{t^4}{4} \right]_{-1}^2 = 3 \times \left(\frac{2^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} \right) = \frac{45}{4}$.

26.6 b) On a $\int_1^2 \frac{x^4}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int_1^2 x^4 \, dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^5}{5} \right]_1^2 = \frac{31}{10}$.

26.6 c) On a $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = \left[2\sqrt{x} \right]_1^4 = 2\sqrt{4} - 2\sqrt{1} = 4 - 2 = 2$.

26.6 d) On a $\int_2^3 \frac{-3}{t^2} \, dt = 3 \int_2^3 \frac{-1}{t^2} \, dt = 3 \left[\frac{1}{t} \right]_2^3 = 3 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) = 3 \times \frac{-1}{6} = -\frac{1}{2}$.

26.7 a) On a

$$\int_{-2}^1 (3x^2 - 5x + 1) dx = \left[x^3 - \frac{5x^2}{2} + x \right]_{-2}^1 = \left(1^3 - \frac{5}{2} + 1 \right) - \left((-2)^3 - 5 \times \frac{(-2)^2}{2} + (-2) \right) = \frac{-1}{2} + 20 = \frac{39}{2}.$$

26.7 b) On a $\int_0^1 \left(\frac{x^4}{3} + \frac{1}{2} \right) dx = \left[\frac{x^5}{15} + \frac{x}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{15} + \frac{1}{2} = \frac{17}{30}.$

26.8 a) On a $\int_0^1 e^{4x} dx = \frac{1}{4} \int_0^1 4e^{4x} dx = \frac{1}{4} [e^{4x}]_0^1 = \frac{1}{4} (e^4 - 1).$

26.8 b) On a $\int_0^1 e^{4x-1} dx = \frac{1}{4} [e^{4x-1}]_0^1 = \frac{1}{4} \left(e^3 - \frac{1}{e} \right).$

26.8 c) On a $\int_{-1}^1 (2x+1)^2 dx = \frac{1}{6} [(2x+1)^3]_{-1}^1 = \frac{1}{6} (3^3 - (-1)^3) = \frac{14}{3}.$

26.8 d) On a $\int_1^4 \frac{3}{\sqrt{2x+1}} dx = 3 \int_1^4 \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} dx = 3 [\sqrt{2x+1}]_1^4 = 3(\sqrt{9} - \sqrt{3}) = 9 - 3\sqrt{3}.$

26.9 a) On a $\int_0^1 2x(x^2 - 1) dx = \frac{1}{2} [(x^2 - 1)^2]_0^1 = -\frac{1}{2}.$

26.9 b) On a $\int_0^1 xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 2xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} [e^{x^2}]_0^1 = \frac{1}{2} (e - 1).$

26.9 c) On a $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^2} dt = - \int_1^2 \left(-\frac{1}{t^2} \right) e^{\frac{1}{t}} dt = - [e^{\frac{1}{t}}]_1^2 = -(e^{\frac{1}{2}} - e^1) = e - \sqrt{e}.$

26.9 d) On a

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (4x-3)(4x^2-6x+3)^3 dx &= \frac{1}{8} \int_{-1}^1 4(8x-6)(4x^2-6x+3)^3 dx = \frac{1}{8} [(4x^2-6x+3)^4]_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{8} (1^4 - 13^4) = -3\,570. \end{aligned}$$

Fiche n° 27. Intégration III

Réponses

27.1 a)	$3 + e^2$	27.2 a)	$2(e^{10} - 1)$	27.2 d)	$-\frac{\ln(7)}{4}$
27.1 b)	$3 \ln(5)$	27.2 b)	$\frac{2}{5} \ln(6)$	27.3 a)	$\ln(7)$
27.1 c)	$\frac{3}{32} + 4 \ln(2)$	27.2 c)	$-\frac{3}{5}$	27.3 b)	$\frac{1}{6} \left(e^{\frac{13}{4}} - 1 \right)$

Corrigés

27.1 a) Une primitive de $t \mapsto t^3 + \exp(t)$ est $t \mapsto \frac{1}{4}t^4 + \exp(t)$ donc

$$\int_0^2 (t^3 + \exp(t)) dt = \left[\frac{1}{4}t^4 + \exp(t) \right]_0^2 = \left(\frac{1}{4}2^4 + \exp(2) \right) - \left(\frac{1}{4}0^4 + \exp(0) \right) = 3 + \exp(2).$$

27.1 b) On procède comme précédemment, sachant qu'une primitive de $t \mapsto \frac{3}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $t \mapsto 3 \ln(t)$.

27.1 c) Une primitive de $t \mapsto \frac{4}{t} + \frac{1}{t^3}$ est $t \mapsto 4 \ln(t) - \frac{1}{2t^2}$.

27.2 a) Une primitive de $t \mapsto \exp(2t + 2)$ est $t \mapsto \frac{1}{2} \exp(2t + 2)$. On trouve alors $2 \left[\exp(2t + 2) \right]_{-1}^4$.

27.2 b) On procède comme précédemment. On trouve $\frac{2}{5} \left[\ln(|5t + 3|) \right]_0^3$.

27.2 c) On trouve $\left[\frac{2}{t + 4} \right]_{-2}^1$.

27.2 d) On trouve $\frac{1}{4} \left[\ln(|2t - 3|) \right]_{-2}^1$.

27.3 a) L'intégrande est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(t) = t^2 + t + 1$. Une primitive est donc $\ln(|u|)$.

27.3 b) L'intégrande est de la forme $\frac{1}{6} u' \exp(u)$ avec $u(t) = 2t^3 + 6t$. Une primitive est donc $\frac{1}{6} \exp(u)$.

Fiche n° 28. Intégration par parties I

Réponses

28.1 a).....	$(x+1)e^x$	28.3 b).....	$\frac{e^2+1}{4}$	28.7 a).....	$\frac{1}{4}e^3 - \frac{1}{4}e$
28.1 b).....	$\ln(x)+1$	28.4 a).....	$\frac{e-2}{e}$	28.7 b).....	$\frac{1}{98} \left(-(\ln 7)^2 - \ln 7 + 24 \right)$
28.1 c).....	$\frac{e^x(x-1)}{x^2}$	28.4 b).....	$\frac{2e^3+1}{9}$	28.8 a).....	$\ln(2)$
28.1 d).....	$\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$	28.4 c).....	$3-23e^{-10}$	28.8 b).....	$a=1$ et $b=-1$
28.1 e).....	$\frac{4x}{\sqrt{4x^2+3}}$	28.4 d).....	$\frac{5e}{3}-2$	28.8 c).....	$1-\ln(2)$
28.1 f).....	$-\frac{6x^5}{(x^6+3)^2}$	28.5 a).....	$5\ln(5)-4$	28.8 d).....	$\frac{1}{n+1}$
28.2 a)...	$(3x+5)(13-10x)$	28.5 b).....	$x\ln(x)-x$	28.8 e).....	$\frac{5}{6}-\ln(2)$
28.2 b).....	$e^x(x-3)$	28.5 c)...	$5\ln(5)^2-10\ln(5)+8$	28.9.....	$2\pi^2$
28.2 c).....	$\ln(x)$	28.5 d)...	$5\ln(5)^3-15\ln(5)^2+30\ln(5)-24$	28.10 a).....	1
28.2 d).....	$(e^x+2)^2$	28.6 a).....	$e-2$	28.10 b)....	$J(n+1) = (n+1)J(n)$
28.3 a).....	1	28.6 b).....	$\frac{5}{27}e^3 - \frac{2}{27}$	28.10 c).....	$n!$

Corrigés

28.3 a) On choisit $u'(t) = e^t$ et $v(t) = t$. On a

$$\int_0^1 te^t dt = \left[te^t \right]_0^1 - \int_0^1 e^t dt = e - \left[e^t \right]_0^1 = e - (e - 1) = 1.$$

28.3 b) On a

$$\begin{aligned} \int_1^e t \ln(t) dt &= \left[\frac{t^2}{2} \ln(t) \right]_1^e - \int_1^e \frac{t^2}{2} \times \frac{1}{t} dt = \frac{e^2}{2} - \int_1^e \frac{t}{2} dt \\ &= \frac{e^2}{2} - \left[\frac{t^2}{4} \right]_1^e = \frac{2e^4}{4} - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{e^2+1}{4}. \end{aligned}$$

28.4 a) On a

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{\ln(t)}{t^2} dt &= \left[\ln(t) \times \frac{-1}{t} \right]_1^e - \int_1^e -\frac{1}{t^2} dt = \frac{-1}{e} - \left[\frac{1}{t} \right]_1^e \\ &= -\frac{2}{e} + 1 = \frac{e-2}{e}. \end{aligned}$$

28.4 b) On a

$$\begin{aligned}\int_1^e t^2 \ln(t) dt &= \left[\frac{t^3}{3} \ln(t) \right]_1^e - \int_1^e \frac{t^3}{3} \times \frac{1}{t} dt \\ &= \frac{e^3}{3} - \int_1^e \frac{t^2}{3} dt = \frac{e^3}{3} - \left[\frac{t^3}{9} \right]_1^e = \frac{e^3}{3} - \left(\frac{e^3}{9} - \frac{1}{9} \right) = \frac{2e^3 + 1}{9}.\end{aligned}$$

28.4 c) On a

$$\begin{aligned}\int_0^{10} (2t+1)e^{-t} dt &= \left[-(2t+1) \times e^{-t} \right]_0^{10} - \int_0^{10} -2e^{-t} dt = -21e^{-10} + 1 - \left[2e^{-t} \right]_0^{10} \\ &= -21e^{-10} + 1 - 2e^{-10} + 2 = 3 - 23e^{-10}.\end{aligned}$$

28.4 d) On a

$$\begin{aligned}\int_{\frac{-1}{3}}^0 (4-3t)e^{3t+1} dt &= \left[(4-3t) \times \frac{1}{3} e^{3t+1} \right]_{\frac{-1}{3}}^0 - \int_{\frac{-1}{3}}^0 -3 \times \frac{1}{3} e^{3t+1} dt = \left(\frac{4}{3}e - \frac{5}{3} \right) - \int_{\frac{-1}{3}}^0 -e^{3t+1} dt \\ &= \left(\frac{4}{3}e - \frac{5}{3} \right) + \left[\frac{1}{3} e^{3t+1} \right]_{\frac{-1}{3}}^0 = \left(\frac{4}{3}e - \frac{5}{3} \right) + \left(\frac{1}{3}e - \frac{1}{3} \right) = \frac{5}{3}e - 2.\end{aligned}$$

28.5 a) On a

$$\int_1^5 1 \times \ln(t) dt = \left[t \ln(t) \right]_1^5 - \int_1^5 t \times \frac{1}{t} dt = 5 \ln(5) - \int_1^5 1 dt = 5 \ln(5) - (5-1) = 5 \ln(5) - 4.$$

28.5 b) On a

$$\int_e^x 1 \times \ln(t) dt = \left[t \ln(t) \right]_e^x - \int_e^x t \times \frac{1}{t} dt = x \ln(x) - e - \int_e^x 1 dt = x \ln(x) - e - (x-e) = x \ln(x) - x.$$

28.5 c) On a

$$\begin{aligned}\int_1^5 \ln(t) \ln(t) dt &= \left[(t \ln(t) - t) \times \ln(t) \right]_1^5 - \int_1^5 (t \ln(t) - t) \times \frac{1}{t} dt = (5 \ln(5) - 5) \ln(5) - \int_1^5 \ln(t) - 1 dt \\ &= 5 \ln(5)^2 - 5 \ln(5) - \underbrace{\int_1^5 \ln(t) dt}_{\text{calculé précédemment}} + \int_1^5 1 dt \\ &= 5 \ln(5)^2 - 5 \ln(5) - (5 \ln(5) - 4) + 4 = 5 \ln(5)^2 - 10 \ln(5) + 8.\end{aligned}$$

28.5 d) On a

$$\begin{aligned}\int_1^5 \ln(t) \times \ln(t)^2 dt &= \left[(t \ln(t) - t) \times \ln(t)^2 \right]_1^5 - \int_1^5 (t \ln(t) - t) \times \frac{2}{t} \ln(t) dt \\ &= (5 \ln(5) - 5) \ln(5)^2 - \int_1^5 2 \ln(t)^2 - 2 \ln(t) dt \\ &= 5 \ln(5)^3 - 5 \ln(5)^2 - 2 \underbrace{\int_1^5 \ln(t)^2 dt}_{\text{calculé précédemment}} + 2 \underbrace{\int_1^5 \ln(t) dt}_{\text{calculé précédemment}} = 5 \ln(5)^3 - 15 \ln(5)^2 + 30 \ln(5) - 24.\end{aligned}$$

28.6 a) On a

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^2 e^t dt &= \left[t^2 e^t \right]_0^1 - \int_0^1 2te^t dt = e - \left(\left[2te^t \right]_0^1 - \int_0^1 2e^t dt \right) \\ &= e - \left[2te^t \right]_0^1 + \left[2e^t \right]_0^1 = e - 2e + 2e - 2 = e - 2.\end{aligned}$$

28.6 b) On a

$$\begin{aligned}\int_1^e t^2 (\ln(t))^2 dt &= \left[\frac{t^3}{3} \times (\ln t)^2 \right]_1^e - \int_1^e \frac{t^3}{3} \times 2 \frac{1}{t} \ln(t) dt = \frac{e^3}{3} - \int_1^e \frac{2t^2}{3} \ln(t) dt \\ &= \frac{e^3}{3} - \left(\left[\frac{2t^3}{9} \times \ln t \right]_1^e - \int_1^e \frac{2t^3}{9} \times \frac{1}{t} dt \right) = \frac{e^3}{3} - \left(\frac{2e^3}{9} - \frac{2}{9} \int_1^e t^2 dt \right) \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{2e^3}{9} + \frac{2}{9} \left[\frac{t^3}{3} \right]_1^e = \frac{e^3}{9} + \frac{2}{9} \left(\frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} \right) = \frac{3e^3}{27} + \frac{2e^3}{27} - \frac{2}{27} = \frac{5}{27}e^3 - \frac{2}{27}.\end{aligned}$$

28.7 a) On a

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^2 e^{2t+1} dt &= \left[t^2 \frac{1}{2} e^{2t+1} \right]_0^1 - \int_0^1 2t \times \frac{1}{2} e^{2t+1} dt = \frac{1}{2} e^3 - \int_0^1 t \times e^{2t+1} dt \\ &= \frac{1}{2} e^3 - \left(\left[\frac{1}{2} t e^{2t+1} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2} e^{2t+1} dt \right) = \frac{1}{2} e^3 - \left[\frac{1}{2} t e^{2t+1} \right]_0^1 + \left[\frac{1}{4} e^{2t+1} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} e^3 - \frac{1}{2} e^3 + \frac{1}{4} e^3 - \frac{1}{4} e = \frac{1}{4} e^3 - \frac{1}{4} e.\end{aligned}$$

28.7 b) On a

$$\begin{aligned}\int_1^7 \ln(t)^2 \times \frac{1}{t^3} dt &= \int_1^7 \ln(t)^2 \times t^{-3} dt = \left[(\ln t)^2 \times \frac{t^{-2}}{-2} \right]_1^7 - \int_1^7 \frac{2}{t} \ln(t) \times \frac{t^{-2}}{-2} dt \\ &= \left[(\ln t)^2 \times \frac{-1}{2t^2} \right]_1^7 + \int_1^7 \frac{1}{2} \frac{2}{t^3} \ln(t) dt = (\ln 7)^2 \times \frac{-1}{98} + \int_1^7 \frac{1}{t^3} \ln(t) dt \\ &= (\ln 7)^2 \times \frac{-1}{98} + \left[\frac{-1}{2t^2} \times \ln t \right]_1^7 - \int_1^7 \frac{-1}{2t^2} \times \frac{1}{t} dt = (\ln 7)^2 \times \frac{-1}{98} - \frac{1}{98} \times \ln 7 + \int_1^7 \frac{1}{2t^3} dt \\ &= \frac{-1}{98} (\ln 7)^2 - \frac{1}{98} \times \ln 7 + \left[-\frac{1}{4t^2} \right]_1^7 = \frac{-1}{98} (\ln 7)^2 - \frac{1}{98} \ln 7 + \left(-\frac{1}{196} + \frac{1}{4 \times 49} \right) \\ &= \frac{-1}{98} (\ln 7)^2 - \frac{1}{98} \ln 7 + \frac{24}{98} = \frac{1}{98} (-(\ln 7)^2 - \ln 7 + 24).\end{aligned}$$

28.8 a) On a $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = \left[\ln(1+t) \right]_0^1 = \ln(2).$

28.8 c) On a $I_1 = \int_0^1 \frac{t}{1+t} dt = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t} \right) dt = 1 - \left[\ln(1+t) \right]_0^1 = 1 - \ln(2).$

28.8 d) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}I_{n+1} + I_n &= \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} dt + \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{t^{n+1} + t^n}{1+t} dt \\ &= \int_0^1 \frac{t^n(1+t)}{1+t} dt = \int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

28.8 e) Comme $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}$, on a $I_{n+1} = \frac{1}{n+1} - I_n$. On en déduit

$$I_3 = \frac{1}{3} - I_2 = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2} - I_1\right) = -\frac{1}{6} + I_1 = -\frac{1}{6} + (1 - \ln(2)) = \frac{5}{6} - \ln(2).$$

28.9 Soit $x > 0$. Pour commencer, on calcule

$$\begin{aligned} \int_0^x t^3 e^{-\frac{t^2}{2\pi}} dt &= \int_0^x t^2 \times t e^{-\frac{t^2}{2\pi}} dt = \int_0^x t^2 \times \pi \frac{2t}{2\pi} e^{-\frac{t^2}{2\pi}} dt \\ &= \left[t^2 \times \left(-\pi e^{-\frac{t^2}{2\pi}} \right) \right]_0^x - \int_0^x 2t \times \left(-\pi e^{-\frac{t^2}{2\pi}} \right) dt = -\pi x^2 e^{-\frac{x^2}{2\pi}} + \int_0^x 2\pi t e^{-\frac{t^2}{2\pi}} dt \\ &= -\pi x^2 e^{-\frac{x^2}{2\pi}} + \left[-2\pi^2 e^{-\frac{t^2}{2\pi}} \right]_0^x = -\pi x^2 e^{-\frac{x^2}{2\pi}} - 2\pi^2 e^{-\frac{x^2}{2\pi}} + 2\pi^2 = -\pi e^{-\frac{x^2}{2\pi}} (x^2 + 2\pi) + 2\pi^2. \end{aligned}$$

Or, par croissance comparée, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\pi e^{-\frac{x^2}{2\pi}} (x^2 + 2\pi) = 0$. Ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x t^3 e^{-\frac{t^2}{2\pi}} dt = 2\pi^2$.

28.10 a) Soit $A \in \mathbb{R}$. On a $I(0, A) = \int_0^A e^{-t} dt = \left[-e^{-t} \right]_0^A = 1 - e^{-A}$. Or, on a $\lim_{A \rightarrow +\infty} 1 - e^{-A} = 1$.

Ainsi $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A t^0 e^{-t} dt = 1$. D'où $J(0) = 1$.

28.10 b) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} J(n+1) &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A t^{n+1} e^{-t} dt \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\left[t^{n+1} \times (-e^{-t}) \right]_0^A - \int_0^A (n+1)t^n \times (-e^{-t}) dt \right) \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\left[-A^{n+1} e^{-A} \right] + \int_0^A (n+1)t^n e^{-t} dt \right) \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-A^{n+1} e^{-A} \right] + (n+1) \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A t^n e^{-t} dt \\ &= (n+1)J(n) \end{aligned}$$

car $\lim_{A \rightarrow +\infty} A^{n+1} e^{-A} = 0$, par croissance comparée.

28.10 c) Comme $J(0) = 1$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J(n+1) = (n+1)J(n)$, on en déduit que $J(1) = 1$, puis $J(2) = 2$, $J(3) = 6$, puis $J(4) = 24$. On conjecture que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J(n) = n!$

Ceci se démontre par récurrence.

Fiche n° 29. Intégration par parties II

Réponses

29.1 a) $\boxed{0}$

29.1 b) $\boxed{0}$

29.1 c) $\boxed{e^{-5}}$

29.1 d) $\boxed{1}$

29.2 a) $\boxed{2x+1}$

29.2 b) $\boxed{\frac{-2x}{(1+x^2)^2}}$

29.2 c) $\boxed{\frac{1}{(1-x)^2}}$

29.2 d) $\boxed{\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}}$

29.3 a) $\boxed{2\ln(2)-1}$

29.3 b) $\boxed{2-\frac{3}{e}}$

29.4 $\boxed{\frac{1}{(a+1)^2} - \frac{4^{a+1}}{(a+1)^2} + \frac{4^{a+1}}{a+1} \ln(4)}$

29.5 a) $\boxed{3-3e^2}$

29.5 b) $\boxed{\frac{e^4 - e^2}{4}}$

29.6 a) $\boxed{J_{n+1} = I_n - I_{n+1}}$

29.6 b) $\boxed{I_n = \frac{1}{2^n} + 2nJ_{n+1}}$

29.6 c) $\boxed{I_{n+1} = \frac{1}{n2^{n+1}} + \frac{2n-1}{2n}I_n}$

29.6 d) $\boxed{\frac{3\pi+8}{32}}$

29.6 e) $\boxed{\frac{15\pi+44}{192}}$

Corrigés

29.3 a) On a, en posant $u(x) = x$ et $v(x) = \ln(x)$,

$$\int_1^2 \ln(x) \, dx = \int_1^2 u'(x)v(x) \, dx = u(2)v(2) - u(1)v(1) - \int_1^2 u(x)v'(x) \, dx = 2\ln(2) - \int_1^2 dx = 2\ln(2) - 1.$$

29.3 b) On a, en posant $u(x) = x+1$ et $v(x) = -e^{-x}$,

$$\int_0^1 (x+1)e^{-x} \, dx = \int_0^1 u(x)v'(x) \, dx = u(1)v(1) - u(0)v(0) - \int_0^1 u'(x)v(x) \, dx = -2e^{-1} + 1 + \int_0^1 e^{-x} \, dx = 2 - \frac{3}{e}.$$

29.4 On a, en posant $u(x) = \frac{x^{a+1}}{a+1}$ et $v(x) = \ln(x)$,

$$\begin{aligned} \int_1^4 x^a \ln(x) \, dx &= \int_1^4 u'(x)v(x) \, dx = u(4)v(4) - u(1)v(1) - \int_1^4 u(x)v'(x) \, dx = \frac{4^{a+1}}{a+1} \ln(4) - \int_1^4 \frac{x^a}{a+1} \, dx \\ &= \frac{1}{(a+1)^2} - \frac{4^{a+1}}{(a+1)^2} + \frac{4^{a+1}}{a+1} \ln(4). \end{aligned}$$

29.5 a) On a, en posant $u(x) = x^2 + 1$ et $v(x) = e^x$,

$$\begin{aligned} \int_2^0 (x^2 + 1)e^x dx &= \int_2^0 u(x)v''(x) dx = \left[u(x)v'(x) \right]_2^0 - \int_2^0 u'(x)v'(x) dx \\ &= \left[u(x)v'(x) \right]_2^0 - \left(\left[u'(x)v(x) \right]_2^0 - \int_2^0 u''(x)v(x) dx \right) \\ &= \left[u(x)v'(x) - u'(x)v(x) \right]_2^0 + \int_2^0 u''(x)v(x) dx \\ &= \left[(x^2 + 1)e^x - 2xe^x \right]_2^0 + \int_2^0 2e^x dx = 1 - e^2 + 2(1 - e^2) = 3 - 3e^2. \end{aligned}$$

29.5 b) On a, en posant $u(x) = (x - 1)^2$ et $v(x) = \frac{1}{4}e^{2x}$,

$$\begin{aligned} \int_1^2 (x^2 - 2x + 1)e^{2x} dx &= \int_1^2 u(x)v''(x) dx = \left[u(x)v'(x) - u'(x)v(x) \right]_1^2 + \int_1^2 u''(x)v(x) dx \\ &= \left[\frac{(x-1)^2 e^{2x}}{2} - \frac{(x-1)e^{2x}}{2} \right]_1^2 + \int_1^2 \frac{e^{2x}}{2} dx = \frac{e^4 - e^2}{4}. \end{aligned}$$

29.6 a) On a

$$J_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} dx = \int_0^1 \frac{x^2 + 1 - 1}{(1+x^2)^{n+1}} dx = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n} dx - \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} dx = I_n - I_{n+1}.$$

29.6 b) Les applications $x \mapsto x$ et $x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^n}$ sont dérivables et de dérivées continues respectivement égales à $x \mapsto 1$ et $x \mapsto -\frac{2nx}{(1+x^2)^{n+1}}$ sur $[0, 1]$. Ainsi, une intégration par parties donne

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n} dx = \left[\frac{x}{(1+x^2)^n} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{2nx^2}{(1+x^2)^{n+1}} dx = \frac{1}{2^n} + 2nJ_{n+1}.$$

29.6 c) Sachant que $J_{n+1} = I_n - I_{n+1}$, on obtient $I_n = \frac{1}{2^n} + 2nJ_{n+1} = \frac{1}{2^n} + 2n(I_n - I_{n+1})$. Ce qui donne $I_{n+1} = \frac{1}{n2^{n+1}} + \frac{2n-1}{2n}I_n$.

29.6 d) Comme $I_1 = \frac{\pi}{4}$, on trouve $I_2 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2}I_1 = \frac{\pi+2}{8}$. Puis $I_3 = \frac{1}{2 \times 2^3} + \frac{3}{4}I_2 = \frac{3\pi+8}{32}$.

29.6 e) Comme $I_3 = \frac{3\pi+8}{32}$, on trouve $I_4 = \frac{1}{3 \times 2^4} + \frac{5}{6}I_3 = \frac{15\pi+44}{192}$.

Fiche n° 30. Cardinaux et coefficients binomiaux

Réponses

30.1 a) $-\frac{15}{2}$

30.1 b) $\frac{15}{13}$

30.1 c) $\frac{5}{2}$

30.2 a) $4\sqrt{2}$

30.2 b) $3\sqrt{5}$

30.2 c) $20\sqrt{3}$

30.2 d) $12\sqrt{3}$

30.3 a) 13

30.3 b) 3

30.3 c) 7

30.4 a) 4

30.4 b) 11

30.4 c) 8

30.5 a) 1

30.5 b) 2

30.5 c) 6

30.5 d) 24

30.5 e) 120

30.5 f) 720

30.5 g) 5 040

30.5 h) 1

30.6 a) 20

30.6 b) 10 100

30.6 c) 140

30.6 d) $\frac{3}{2}$

30.6 e) 18

30.6 f) 4 320

30.7 a) $-\frac{1}{30}$

30.7 b) $\frac{11}{12}$

30.7 c) $\frac{17}{120}$

30.8 a) $n(n+1)(n+2)$

30.8 b) $2(n+1)(2n+1)$

30.8 c) $\frac{n-1}{n+2}$

30.9 a) $\frac{n}{(n+1)!}$

30.9 b) $\frac{(n-3)n!}{2^{2(n+1)}}$

30.9 c) $\frac{-1}{n(n+1)(n+1)!}$

30.9 d) $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

30.10 a) 6

30.10 b) 9

30.10 c) 35

30.10 d) 1

30.10 e) 45

30.10 f) 84

30.11 a) $\frac{n(n^2-3n+8)}{6}$

30.11 b) $\binom{n+1}{3}$

30.11 c) 1

30.11 d) $\frac{2(2n+1)}{n+1}$

30.12 $\binom{5}{3} = 10$

30.13 a) $\binom{52}{5}$

30.13 b) $4\binom{13}{5}$

30.13 c) $\binom{12}{5}$

30.13 d) ... $\binom{13}{2}\binom{13}{1}\binom{13}{2}$

30.13 e) $\binom{13}{1}\binom{39}{4}$

30.13 f) $\binom{52}{5} - \binom{48}{5}$

30.13 g) $\binom{52}{5} - 2\binom{48}{5} + \binom{44}{5}$

30.13 h) .. $1 \times 3 \times 12\binom{36}{2} + \binom{3}{2}\binom{12}{2}\binom{36}{1}$

30.14 a) $6! = 720$

30.14 b) $\binom{5}{2}\binom{3}{2} = 30$

30.15 a) $\binom{11}{4}\binom{7}{4}\binom{3}{2}$

30.15 b) . $\binom{11}{5}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{1}$

30.16 voir corrigé

30.17 a) $\frac{2n+1}{2(n+1)}$

30.17 b) $\textcircled{b}$

30.18 $2^n n!$

30.19 a) $\boxed{(2n+1)!}$

30.20 a) $\boxed{a_p - a_{n+1}}$

30.20 c) $\boxed{\binom{p+n+1}{p+1}}$

30.19 b) $\boxed{\frac{(2n+1)!}{2^n n!}}$

30.20 b) $\boxed{\binom{p+k}{p}}$

Corrigés

30.1 a) Puisque $\frac{1}{5} - \frac{7}{15} = \frac{3-7}{15} = -\frac{4}{15}$, on a $\frac{2}{\frac{1}{5} - \frac{7}{15}} = -2 \times \frac{15}{4} = -\frac{15}{2}$.

30.1 b) On a $\frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{6}}{\frac{3}{5} - \frac{1}{6}} = \frac{\frac{4-1}{6}}{\frac{18-5}{30}} = \frac{1}{2} \times \frac{30}{13} = \frac{15}{13}$.

30.1 c) On a $\frac{2 - \frac{3}{7}}{\frac{1}{5} + \frac{3}{7}} = \frac{\frac{14-3}{7}}{\frac{7+15}{35}} = \frac{11}{7} \times \frac{35}{22} = \frac{5}{2}$.

30.2 a) On a $\sqrt{32} = \sqrt{2 \times 4^2} = 4\sqrt{2}$.

30.2 b) On a $\sqrt{45} = \sqrt{5 \times 3^2} = 3\sqrt{5}$.

30.2 c) On a $\sqrt{1200} = \sqrt{3 \times 20^2} = 20\sqrt{3}$.

30.2 d) On a $432 = 2^4 \times 3^3$, donc $\sqrt{432} = \sqrt{4^2 \times 3^2 \times 3} = 4 \times 3 \times \sqrt{3} = 12\sqrt{3}$.

30.3 b) On a $\text{Card}(A \cap B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cup B) = 7 + 8 - 12 = 3$.

30.3 c) On a $\text{Card}(B) = \text{Card}(A \cup B) + \text{Card}(A \cap B) - \text{Card}(A) = 8 + 2 - 3 = 7$.

30.4 a) D'après la formule d'inclusion-exclusion, on a

$$8 = \text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B) = 3 \text{Card}(A) - 4 \quad \text{donc} \quad \text{Card}(A) = \frac{8+4}{3} = 4.$$

30.4 b) D'après la formule d'inclusion-exclusion, on a

$$13 = \text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B) = 3 + \text{Card}(B) - 1 \quad \text{donc} \quad \text{Card}(B) = 11.$$

30.4 c) D'après la formule d'inclusion-exclusion, on a

$$9 = \text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B) = 2 \text{Card}(B) - 5 - 2$$

d'où $\text{Card}(B) = \frac{9+7}{2} = 8$ et par suite $\text{Card}(A) = \text{Card}(B) - 5 = 3$.

30.5 h) Attention ! Par convention, on a $0! = 1$. Grâce à cette convention, on a $1! = 1 \times 0!$

30.6 a) Par définition de la factorielle, on a $\frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!} = 5 \times 4 = 20$.

30.6 b) Par définition de la factorielle, on a $\frac{101!}{99!} = \frac{101 \times 100 \times 99!}{99!} = 101 \times 100 = 10\,100$.

30.6 c) Par définition de la factorielle et sachant que $3! = 6$, on a $\frac{7!}{3!^2} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!^2} = 7 \times 5 \times 4 = 140$.

30.6 d) Par définition de la factorielle, on a $\frac{3! \times 6!}{4! \times 5!} = \frac{3! \times 6 \times 5!}{4 \times 3! \times 5!} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.

30.6 e) Par définition de la factorielle, on a $4! - 3! = 4 \times 3! - 3! = (4 - 1)3! = 3 \times 6 = 18$.

30.6 f) Par définition de la factorielle, on a $7! - 6! = 7 \times 6! - 6! = (7 - 1)6! = 6 \times 720 = 4\,320$.

30.7 a) On commence ici par déterminer d'éventuels facteurs communs entre les dénominateurs afin de regrouper les fractions de façon optimale. En l'occurrence $5! = 5 \times 4!$, ainsi

$$\frac{1}{5!} - \frac{1}{4!} = \frac{1-5}{5!} = \frac{-4}{5 \times 4 \times 3!} = -\frac{1}{5 \times 6} = -\frac{1}{30}.$$

30.7 b) Selon le même principe, ayant $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 3 \times 2^3$, un dénominateur commun est 3×2^4 , d'où

$$\frac{3 \times 3!}{2^4} - \frac{5}{4!} = \frac{3^2 \times 6 - 2 \times 5}{3 \times 2^4} = \frac{2(27-5)}{3 \times 2^4} = \frac{22}{3 \times 2^3} = \frac{11}{12}.$$

30.7 c) De la même façon, puisque $6! = 6 \times 5 \times 4!$, on a

$$\frac{7}{4!} - \frac{3 \times 3!^2}{6!} = \frac{7 \times 6 \times 5 - 3 \times 6^2}{6!} = \frac{6(35-18)}{6!} = \frac{17}{5!} = \frac{17}{120}.$$

30.8 a) Par définition de la factorielle et sachant $n \geq 1$, on a

$$\frac{(n+2)!}{(n-1)!} = \frac{(n+2)(n+1)n \times (n-1)!}{(n-1)!} = n(n+1)(n+2).$$

30.8 b) Par définition de la factorielle, on a $\frac{(2n+2)!}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1) \times (2n)!}{(2n)!} = 2(n+1)(2n+1)$.

30.8 c) Par définition de la factorielle, on a $\frac{(n^2-1)n!}{(n+2)!} = \frac{(n-1)(n+1) \times n!}{(n+2)(n+1) \times n!} = \frac{n-1}{n+2}$.

30.9 a) Puisque $(n+1)! = (n+1) \times n!$, on $\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \frac{n}{(n+1)!}$.

30.9 b) Puisque $(n+1)! = (n+1) \times n!$ et $2^{2(n+1)} = 4 \times 2^{2n}$, on a

$$\frac{(n+1)!}{2^{2(n+1)}} - \frac{n!}{2^{2n}} = \frac{(n+1) \times n! - 4 \times n!}{2^{2(n+1)}} = \frac{(n-3)n!}{2^{2(n+1)}}.$$

30.9 c) Puisque $(n+1)! = (n+1) \times n!$, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n \times n!} &= \frac{1}{(n+1) \times n!} + \frac{1}{(n+1)^2 \times n!} - \frac{1}{n \times n!} \\ &= \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)^2 \times n!} \\ &= \frac{n^2 + n + n - (n^2 + 2n + 1)}{n(n+1) \times (n+1)!} = \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!}. \end{aligned}$$

30.9 d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)!}{n!} \times \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{(n+1) \times n!}{n!} \times \frac{n^n}{(n+1) \times (n+1)^n} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

30.10 a) Par définition, on a $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \times (4-2)!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!^2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$.

On peut aussi retenir que, pour tout $n \geq 2$, on a $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. Ainsi, on a $\binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$.

Plus généralement, pour tout entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}$.

30.10 b) Par définition, on a $\binom{9}{8} = \frac{9!}{8! \times (9-8)!} = \frac{9 \times 8!}{8! \times 1!} = 9$.

On peut aussi retenir que, pour tout $n \geq 1$, on a $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$. Ainsi, on a $\binom{9}{8} = 9$.

30.10 c) Par définition, on a $\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3! \times 4!} = 7 \times 5 = 35$.

30.10 d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

30.10 f) Par définition, on a $\binom{9}{3} = \frac{9!}{3!(9-3)!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{3! \times 6!} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3!} = 3 \times 4 \times 7 = 84$.

30.11 a) Par définition, sachant $n \geq 3$, on a

$$\begin{aligned} \binom{n}{1} + \binom{n}{3} &= n + \frac{n!}{3!(n-3)!} = n + \frac{n(n-1)(n-2) \times (n-3)!}{3!(n-3)!} = n + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \\ &= \frac{6n + n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{n(6 + (n-1)(n-2))}{6} = \frac{n(n^2 - 3n + 8)}{6}. \end{aligned}$$

30.11 b) On peut procéder comme à la question précédente. Toutefois ici il est plus intéressant de penser à la formule de Pascal, qui donne directement

$$\binom{n}{2} + \binom{n}{3} = \binom{n+1}{3} = \frac{n(n+1)(n-1)}{6}.$$

30.11 c) Comme on a $\binom{k}{1} = \binom{k}{k-1} = k$, pour tout $k \geq 1$, on a ici $\binom{n+1}{n} - \binom{n}{n-1} = (n+1) - n = 1$.

30.11 d) Par définition, on a

$$\begin{aligned} \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} &= \frac{\frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2}}{\frac{(2n)!}{n!^2}} \\ &= \frac{(2n+2)(2n+1) \times (2n)!}{((n+1) \times n!)^2} \times \frac{n!^2}{(2n)!} \\ &= \frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+1)^2} \\ &= \frac{2(2n+1)}{n+1}. \end{aligned}$$

30.12 On dispose de cinq fruits, et on doit en choisir trois pour former une corbeille. Il s'agit donc de choisir 3 éléments dans un ensemble de cardinal 5, soit $\binom{5}{3} = 10$ choix.

30.13 a) On choisit cinq cartes parmi un ensemble de 52 cartes : il y a $\binom{52}{5}$ choix possibles.

30.13 b) Cinq cartes d'une même couleur s'obtiennent en choisissant :

- une couleur, soit 4 choix possibles ;
- cinq cartes parmi les treize cartes d'une même couleur, soit $\binom{13}{5}$ choix possibles.

Ainsi, le nombre total de possibilités est égal à $4 \times \binom{13}{5}$.

30.13 c) Puisqu'il y a 12 figures dans le jeu, on obtient $\binom{12}{5}$ possibilités.

30.13 d) Pour obtenir une telle main, on choisit deux piques (on a $\binom{13}{2}$ choix), puis un cœur (on a $\binom{13}{1}$ choix) et enfin deux carreaux (on a $\binom{13}{2}$ choix). Ainsi, le nombre total de possibilités est égal à $\binom{13}{2} \binom{13}{1} \binom{13}{2}$.

30.13 e) Pour obtenir une telle main, on choisit

- une carte de trèfle : on a $\binom{13}{1}$ choix possibles ;
- puis quatre cartes parmi les $52 - 13 = 39$ cartes qui ne sont pas des trèfles : on a $\binom{39}{4}$ choix possibles ;

Ainsi, le nombre total de possibilités est égal à $\binom{13}{1} \binom{39}{4}$.

30.13 f) Notons A l'ensemble des mains avec au moins un valet et Ω l'ensemble de toutes les mains possibles.

Commençons par déterminer le nombre de mains ne contenant aucun valet (c'est-à-dire le cardinal du complémentaire de A dans Ω). Une telle main s'obtient en choisissant cinq cartes parmi les $52 - 4 = 48$ cartes qui ne sont pas des valets : on a $\binom{48}{5}$ possibilités. On a alors $\text{Card}(A) = \text{Card}(\Omega) - \text{Card}(\bar{A}) = \binom{52}{5} - \binom{48}{5}$.

30.13 g) Notons B l'ensemble des mains avec au moins une dame, notons C l'ensemble des mains avec au moins un neuf, et notons Ω l'ensemble de toutes les mains possibles. Le nombre de mains recherché correspond alors à $\text{Card}(B \cap C)$. Or, on a

$$\text{Card}(B \cap C) = \text{Card}(\Omega) - \text{Card}(\overline{B \cap C}) = \text{Card}(\Omega) - \text{Card}(\bar{B} \cup \bar{C}).$$

Or, la formule d'inclusion-exclusion donne

$$\text{Card}(\bar{B} \cup \bar{C}) = \text{Card}(\bar{B}) + \text{Card}(\bar{C}) - \text{Card}(\bar{B} \cap \bar{C}).$$

On en déduit en combinant ces deux formules :

$$\text{Card}(B \cap C) = \text{Card}(\Omega) - \text{Card}(\bar{B}) - \text{Card}(\bar{C}) + \text{Card}(\bar{B} \cap \bar{C}).$$

D'une part, comme à la question précédente, on obtient $\text{Card}(\bar{B}) = \text{Card}(\bar{C}) = \binom{48}{5}$.

D'autre part, un élément de $\bar{B} \cap \bar{C}$ est une main ne contenant ni dame ni neuf, ce qui revient à choisir cinq cartes parmi 44 ($= 52 - 2 \times 4$), et donc $\text{Card}(\bar{B} \cap \bar{C}) = \binom{44}{5}$.

Au total, le nombre de mains avec au moins une dame et un neuf vaut $\text{Card}(B \cap C) = \binom{52}{5} - 2\binom{48}{5} + \binom{44}{5}$.

30.13 h) Notons D (respectivement E) l'ensemble des mains avec exactement deux rois et deux cœurs dont le roi de cœur (respectivement sans le roi de cœur), et encore Ω l'ensemble de toutes les mains possibles. Le nombre de mains recherché correspond alors à $\text{Card}(D \cup E) = \text{Card}(D) + \text{Card}(E)$, car les ensembles D et E sont disjoints par construction. D'une part, pour obtenir une main avec exactement deux rois et deux cœurs dont le roi de cœur, on choisit :

- le roi de cœur, soit 1 choix possible ;
- un autre roi parmi les 3 rois restants, soit 3 choix possibles ;
- une autre carte de cœur parmi les 12 restantes, soit 12 choix possibles ;
- deux autres cartes parmi les 36, qui ne sont ni un roi ni un cœur, soit $\binom{36}{2}$ choix possibles.

Au total, le nombre de possibilités est égal à $\text{Card}(D) = 1 \times 3 \times 12 \binom{36}{2}$. D'autre part, de façon similaire, on a $\text{Card}(E) = \binom{3}{2} \binom{12}{2} \binom{36}{1}$. Donc, le nombre cherché vaut $1 \times 3 \times 12 \binom{36}{2} + \binom{3}{2} \binom{12}{2} \binom{36}{1}$.

30.14 a) Le mot « MAISON » est formé de 6 lettres distinctes. Ainsi, se donner une anagramme de ce mot équivaut à se donner une permutation de ces 6 lettres. Il y a donc 6! anagrammes.

30.14 b) Le mot « RADAR » est un mot de cinq lettres formé de deux R, deux A et un D. Ainsi, pour se donner une anagramme du mot « RADAR », on peut :

- choisir la position des deux lettres R, parmi les cinq positions possibles, soit $\binom{5}{2}$ choix ;
- choisir la position des deux lettres A, parmi les trois positions possibles restantes, soit $\binom{3}{2}$ choix ;
- il reste alors une seule position possible pour placer la lettre D.

Au total, le nombre de possibilités est égal à $\binom{5}{2} \times \binom{3}{2} \times 1 = \frac{5 \times 4}{2} \times 3 \times 1 = 30$.

30.15 a) On commence par remarquer que le mot « MISSISSIPPI » est formé de onze lettres, dont quatre I, quatre S, deux P et un M. Ainsi, pour se donner une anagramme du mot « MISSISSIPPI », on peut :

- choisir la position des quatre lettres I, parmi les onze positions possibles, soit $\binom{11}{4}$ choix ;
- choisir la position des quatre lettres S, parmi les sept positions possibles restantes, soit $\binom{7}{4}$ choix ;
- choisir la position des deux lettres P, parmi les trois positions possibles restantes, soit $\binom{3}{2}$ choix ;
- il reste alors une seule position possible pour placer la lettre M.

Au total, le nombre de possibilités est égal à $\binom{11}{4} \times \binom{7}{4} \times \binom{3}{2} \times 1 = 330 \times 35 \times 3 \times 1$.

30.15 b) On procède comme à la question précédente, en remarquant que le mot « ABRACADABRA » est formé de onze lettres, dont cinq A, deux B, deux R, un C et un D. Le nombre d'anagramme du mot « ABRACADABRA » vaut

$$\binom{11}{5} \binom{6}{2} \binom{4}{2} \binom{2}{1} \times 1 = 462 \times 15 \times 6 \times 2 \times 1.$$

30.16 D'après la formule d'inclusion-exclusion pour deux ensembles,

$$\text{Card}(A \cup B \cup C) = \text{Card}\left((A \cup B) \cup C\right) = \text{Card}(A \cup B) + \text{Card}(C) - \text{Card}\left((A \cup B) \cap C\right).$$

Or, on a aussi

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B) \quad \text{et} \quad \text{Card}\left((A \cup B) \cap C\right) = \text{Card}\left((A \cap C) \cup (B \cap C)\right).$$

À nouveau, d'après la formule d'inclusion-exclusion pour deux ensembles,

$$\begin{aligned} \text{Card}\left((A \cap C) \cup (B \cap C)\right) &= \text{Card}(A \cap C) + \text{Card}(B \cap C) - \text{Card}\left((A \cap C) \cap (B \cap C)\right) \\ &= \text{Card}(A \cap C) + \text{Card}(B \cap C) - \text{Card}(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

Au total, on a donc

$$\begin{aligned} \text{Card}(A \cup B \cup C) &= \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B) + \text{Card}(C) - \left(\text{Card}(A \cap C) + \text{Card}(B \cap C) - \text{Card}(A \cap B \cap C)\right) \\ &= \text{Card}(A) + \text{Card}(B) + \text{Card}(C) - \text{Card}(A \cap B) - \text{Card}(A \cap C) - \text{Card}(B \cap C) + \text{Card}(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

30.17 a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a déjà vu que $\frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{2(2n+1)}{n+1}$. Donc, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{-2n-2} \binom{2n+2}{n+1}}{2^{-2n} \binom{2n}{n}} = \frac{1}{2^2} \times \frac{2(2n+1)}{n+1} = \frac{2n+1}{2(n+1)}.$$

30.17 b) Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = (n+1)u_n^2$. Remarquons que la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ est à valeurs strictement positives et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après le calcul précédent,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(n+2)u_{n+1}^2}{(n+1)u_n^2} = \frac{n+2}{n+1} \times \left(\frac{2n+1}{2(n+1)}\right)^2 = \frac{(n+2)(2n+1)^2}{4(n+1)^3} = \frac{4n^3 + 12n^2 + 9n + 2}{4n^3 + 12n^2 + 12n + 4} < 1,$$

Ainsi, la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.

30.18 Pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} 2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n-2) \times 2n &= (2 \times 1) \times (2 \times 2) \times (2 \times 3) \times \cdots \times (2(n-1)) \times 2n \\ &= \underbrace{(2 \times 2 \times 2 \times \cdots \times 2 \times 2)}_{n \text{ facteurs}} \times (1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n) \\ &= 2^n n!. \end{aligned}$$

30.19 a) Par définition de I et P , le produit $I \times P$ est le produit des entiers consécutifs de 1 à $2n+1$. Donc,

$$I \times P = (2n+1)!.$$

30.19 b) Pour tout entier $n \geq 1$, on sait que $P = 2^n n!$ (calcul précédent). Ainsi, P est non nul et

$$I = \frac{I \times P}{P} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}.$$

30.20 a) Pour tous entiers naturels n et p avec $p \leq n$, on a

$$\sum_{k=p}^n (a_k - a_{k+1}) = (a_p - \underbrace{a_{p+1}}_{\text{simplification}}) + (\underbrace{a_{p+1} - a_{p+2}}_{\text{simplification}}) + (a_{p+2} - a_{p+3}) + \cdots + (a_{n-1} - \underbrace{a_n}_{\text{simplification}}) + (a_n - a_{n+1}).$$

On observe alors une simplification des termes de proche en proche. On a donc $\sum_{k=p}^n (a_k - a_{k+1}) = a_p - a_{n+1}$.

30.20 b) Rappelons la formule de Pascal : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a

$$\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} = \binom{n+1}{j}.$$

En appliquant cette formule pour $n = p+k$ et $k = p+1$, avec $p \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$ non nul, il vient

$$\binom{p+k}{p} + \binom{p+k}{p+1} = \binom{p+k+1}{p+1} \text{ et donc } \binom{p+k+1}{p+1} - \binom{p+k}{p+1} = \binom{p+k}{p}.$$

30.20 c) Pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{p+k}{p} &= \binom{p}{p} + \sum_{k=1}^n \binom{p+k}{p} \\ &= \binom{p}{p} + \sum_{k=1}^n \left(\binom{p+k+1}{p+1} - \binom{p+k}{p+1} \right) \\ &= \binom{p}{p} + \binom{p+n+1}{p+1} - \binom{p+1}{p+1} \\ &= \binom{p+n+1}{p+1}, \end{aligned}$$

d'après les deux calculs précédents, et sachant que $\binom{p}{p} = \binom{p+1}{p+1} = 1$.

Fiche n° 31. Dénombrement I

Réponses

31.1 a).....	$\frac{11}{30}$	31.9 a).....	$\binom{10}{6}$	31.14 c).....	$3 \times (2^5 - 2)$
31.1 b).....	$\frac{11}{42}$	31.9 b).....	7	31.14 d).....	$3^5 - 3 \times 2^5 + 3$
31.2 a).....	90	31.9 c).....	$\binom{10}{6} - 7$	31.15 a).....	$12 \times 11 \times 10$
31.2 b).....	16	31.9 d).....	$\binom{3}{3} \times \binom{7}{3}$	31.15 b).....	$12 \times 11 \times 10 - 3 \times 2 \times 10$
31.3 a).....	$n(n-1)$	31.10.....	$7 \times 6 \times 5 \times 4$	31.15 c).....	$10 \times 9 \times 8$
31.3 b).....	$\frac{1}{(n+3)(n+2)(n+1)n}$	31.11 a).....	$7 \times 6 \times 5$	31.15 d).....	$3 \times 2 \times 10$
31.3 c).....	$n-1$	31.11 b).....	7^3	31.16 a).....	$\binom{52}{5}$
31.3 d).....	243	31.11 c).....	$7^3 - 7$	31.16 b).....	13×48
31.4 a).....	6	31.12 a).....	10^4	31.16 c).....	$4 \times \binom{13}{5}$
31.4 b).....	5	31.12 b).....	$10 \times 9 \times 8 \times 7$	31.16 d).....	$\binom{52}{5} - \binom{48}{5}$
31.4 c).....	3	31.12 c).....	5^4	31.16 e)...	$\binom{48}{5} + 4 \times \binom{48}{4}$
31.5.....	$15 \times 14 \times 13$	31.12 d).....	10^3	31.16 f).....	$\binom{4}{3} \times \binom{4}{2}$
31.6 a).....	26^4	31.12 e).....	$\binom{10}{4}$	31.16 g)...	$13 \times 12 \times \binom{4}{3} \times \binom{4}{2}$
31.6 b).....	26^3	31.13 a).....	$5!$	31.17.....	$\binom{n+p}{n}$
31.6 c).....	26^2	31.13 b).....	$2! \times 3!$	31.18 a).....	0
31.7 a).....	$15 \times 14 \times 13$	31.13 c).....	$4!$	31.18 b).....	0
31.7 b)...	$15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11$	31.13 d).....	$3 \times 2 \times 2$		
31.7 c).....	$3 \times 14 \times 13$				
31.7 d)...	$14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10$				
31.8 a).....	$n+1$				
31.8 b).....	$n-1$				

Corrigés

31.1 a) On a $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{3} = \frac{15}{30} + \frac{6}{30} - \frac{10}{30} = \frac{11}{30}$.

31.1 b) On a $\frac{5}{7} - \left(\frac{2}{21} + \frac{5}{14}\right) = \frac{30}{42} - \frac{4}{42} - \frac{15}{42} = \frac{11}{42}$.

31.2 a) On a $\frac{10!}{8!} = \frac{10 \times 9 \times 8!}{8!} = 90$.

31.2 b) On a $\frac{10 \times 8 \times 6 \times 4}{5!} = \frac{2 \times 5 \times 2 \times 4 \times 2 \times 3 \times 2 \times 2}{5!} = 2^4 = 16$.

31.3 a) On a $\frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = n(n-1)$.

31.3 c) On a $\frac{(n^2-1)n!}{(n+1)!} = \frac{(n-1)(n+1)n!}{(n+1)!} = \frac{(n-1)(n+1)!}{(n+1)!} = n-1$.

31.3 d) On a $\frac{(3!)^4 \times 4!}{2^7} = \frac{(3 \times 2)^4 \times 4 \times 3 \times 2}{2^7} = \frac{3^5 \times 2^7}{2^7} = 3^5 = 243$.

31.4 a) Une corbeille est entièrement déterminée par son nombre de pommes. Comme celui-ci peut valoir 0, 1, 2, 3, 4 ou 5, on en déduit qu'il y a 6 corbeilles possibles.

31.4 b) On retire au nombre total la corbeille qui ne contient pas d'orange. Il y a donc 5 possibilités.

31.4 c) Pour contenir plus d'oranges que de pommes, la corbeille doit contenir au moins trois oranges. Elle en contiendra alors trois, quatre ou cinq. Il y a donc 3 possibilités.

31.5 Pour la première chambre, il y a quinze couleurs possibles, pour la deuxième quatorze et pour la troisième treize. On en déduit qu'il y a $15 \times 14 \times 13 = 2\,730$ possibilités.

31.6 a) Un tel code est un quadruplet des 26 lettres de l'alphabet. Il y en a 26^4 .

31.6 b) La première lettre doit être un « E », il reste donc trois lettres à choisir en tenant compte de l'ordre et en autorisant les répétitions. Un tel code est un triplet des 26 lettres de l'alphabet. Il y en a 26^3 .

31.6 c) Comme le pays est fixé, la région du monde l'est aussi. Donc, la première lettre est fixée. Ainsi, il reste deux lettres à choisir en tenant compte de l'ordre et en autorisant les répétitions ; il s'agit d'un couple des 26 lettres de l'alphabet. Il y en a 26^2 .

31.7 a) Un tiercé est une liste d'éléments distincts de trois chevaux parmi les quinze. Il y en a $15 \times 14 \times 13 = 2\,940$.

31.7 b) De même que précédemment, il y a $15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 = 360\,360$ quintés possibles.

31.7 c) Il y a 3 places possibles pour « Étalon Noir ». Ensuite, il reste 14×13 façons de placer les deux autres chevaux. En tout, il y a $3 \times 14 \times 13 = 546$ tiercés possibles dans lesquels le cheval « Étalon Noir » apparaît.

31.7 d) Il reste 14 chevaux, on a donc $14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 = 240\,240$ quintés possibles.

31.8 a) Le nombre de boules rouges, qui détermine entièrement l'urne, peut varier entre 0 et n . On en déduit qu'il y a $n+1$ urnes possibles.

31.8 b) On retire du résultat précédent les urnes qui ne conviennent pas : celle contenant une seule boule rouge et celle qui n'en contient aucune. On obtient $n - 1$ urnes possibles.

31.9 a) Un tel groupe d'amis correspond à une partie de six personnes parmi les dix. Il y en a $\binom{10}{6} = 210$.

31.9 b) Un groupe d'amis ne comportant pas de garçon est une combinaison de six personnes parmi les sept filles. Il y en a $\binom{7}{6} = 7$.

31.9 c) On retire au nombre total de groupes le nombre de groupes ne comportant pas de garçon.

On obtient $\binom{10}{6} - 7 = 203$ groupes.

31.9 d) Un tel groupe est constitué de trois filles et de trois garçons, il y en a $\binom{3}{3} \times \binom{7}{3} = 35$.

31.10 Un mot de quatre lettres est une liste ordonnée d'éléments distincts des sept lettres tirées. Il y en a $7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$.

31.11 a) Si aucun membre ne peut cumuler plusieurs fonctions, il y a 7 choix pour le responsable de la vaisselle et 6 pour le rangement puis 5 pour le ménage. En tout, $7 \times 6 \times 5 = 210$.

31.11 b) Si un membre peut cumuler plusieurs fonctions, le choix des responsables est un triplet des sept membres du groupe. Il y en a $7^3 = 343$.

31.11 c) Pour déterminer le nombre de groupes de responsables où un même membre peut cumuler au plus deux fonctions, il faut retirer du total les groupes où un même membre peut cumuler les trois fonctions. Il y a 7 tels groupes de responsables, ce qui donne $7^3 - 7 = 336$ groupes de responsables possibles.

31.12 a) Un code est un quadruplet des dix chiffres de 0 à 9. Il y en a $10^4 = 10\,000$.

31.12 b) Un tel code est une liste d'éléments distincts de quatre chiffres parmi les dix chiffres. Il y en a $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5\,040$.

31.12 c) Un code avec des chiffres pairs est un quadruplet des cinq éléments de $\{2, 4, 6, 8, 0\}$. Il y en a $5^4 = 625$.

31.12 d) Si un code se termine par 9, il reste à choisir un triplet de trois chiffres. Il y a donc $10^3 = 1\,000$ codes se terminant par le chiffre 9.

31.12 e) Étant donnés 4 entiers différents, il n'y a qu'une seule façon de les ranger dans l'ordre croissant. Il y a donc autant de codes avec des chiffres tous différents rangés dans l'ordre croissant que de combinaisons de 4 éléments parmi 10. Il y a donc $\binom{10}{4} = 210$.

31.13 a) Une anagramme du mot « FICHE » est une permutation des cinq lettres, toutes différentes, de ce mot. Il y en a $5! = 120$.

31.13 b) L'anagramme commence par les voyelles, il y a $2! = 2$ façons de les placer en première et deuxième positions. De même, il y a $3!$ façons de placer les consonnes ensuite. On obtient $2! \times 3! = 12$ possibilités.

31.13 c) Si le mot se termine par un « E », il faut permuter les quatre autres lettres pour former les quatre premières lettres de l'anagramme. Il y a donc $4! = 24$ possibilités.

31.13 d) Si l'on souhaite qu'il y ait alternance entre les voyelles et les consonnes, l'anagramme ne peut que commencer par une consonne.

Pour la première lettre, il y a donc 3 possibilités, 2 pour la deuxième, il reste deux consonnes pour la troisième lettre, ensuite la quatrième lettre est automatiquement la voyelle restante et la dernière lettre est la consonne restante.

En tout, on obtient $3 \times 2 \times 2 = 12$ possibilités.

31.14 a) À chaque jean, on associe un tiroir, le nombre de rangements est donc un 5-uplet des 3 tiroirs. Il y en a $3^5 = 243$.

31.14 b) Il s'agit là de choisir le tiroir où l'on mettra tous les jeans : on a 3 possibilités.

31.14 c) On a 3 façons de choisir le tiroir qui restera vide. Sachant cela, on a $2^5 = 32$ possibilités de mettre les jeans dans les deux tiroirs restants. À ces 2^5 possibilités, il faut retirer les deux possibilités où l'un des deux tiroirs sera vide. En tout, il y a $2^5 - 2$ possibilités de ranger les pantalons sachant que le tiroir choisi est le seul vide.

Au total, il y a donc $3 \times (2^5 - 2) = 90$ possibilités.

31.14 d) Il suffit de retirer aux 3^5 possibilités les possibilités où exactement un tiroir est vide et où deux tiroirs sont vides. On a vu qu'il y a $3 \times (2^5 - 2)$ cas où il y a exactement un tiroir vide et il y a 3 cas où il y a deux tiroirs vides. On obtient $3^5 - 3 \times (2^5 - 2) - 3 = 3^5 - 3 \times 2^5 + 3 = 150$ possibilités.

31.15 a) Un bureau est une liste d'éléments distincts de trois personnes parmi les douze membres de l'association, il y en a $12 \times 11 \times 10 = 1\,320$.

31.15 b) On retire du nombre total de bureaux possibles le nombre de bureaux où Pierre et Jean siègent ensemble.

Pour constituer un bureau où Pierre et Jean siègent ensemble, il faut déterminer le rôle de Pierre : 3 possibilités, déterminer le rôle de Jean : 2 possibilités restantes et choisir le dernier membre : 10 choix.

En tout, on obtient $3 \times 2 \times 10$ bureaux où Pierre et Jean siègent ensemble, ce qui donne $12 \times 11 \times 10 - 3 \times 2 \times 10 = 1\,260$ bureaux où Pierre et Jean ne siègeront pas ensemble.

31.15 c) Le bureau sera dans ce cas une liste d'éléments distincts de trois membres parmi les dix restants. Il y en a $10 \times 9 \times 8 = 720$.

31.15 d) Pour constituer un bureau où le doyen et le plus jeune du groupe (le « benjamin ») siègent ensemble, il faut déterminer le rôle du doyen (on a 3 possibilités), déterminer le rôle du benjamin (on a 2 possibilités restantes) et choisir le dernier membre (il y a 10 choix).

En tout, on obtient $3 \times 2 \times 10 = 60$ bureaux où le doyen et le plus jeune du groupe siègent ensemble.

31.16 a) Choisir une main revient à choisir une partie à cinq éléments de l'ensemble des 52 cartes. Il y en a $\binom{52}{5} = \frac{52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48}{5!} = 2\,598\,960$ choix possibles.

31.16 b) Il y a 13 carrés possibles (un par type de carte). Pour chacun de ces carrés possibles, il reste une carte à choisir parmi les 48 cartes qu'il reste. En tout, il y a donc $13 \times 48 = 624$ carrés possibles.

31.16 c) Il y a quatre couleurs. Comme il y a 13 cartes de chaque couleur, pour chacune de ces couleurs, il y a $\binom{13}{5}$ mains de cette couleur. En tout, il y a $4 \times \binom{13}{5} = 4 \times \frac{13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9}{5!} = 5\,148$ mains unicolores.

31.16 d) Calculons d'abord le nombre de mains ne contenant pas de roi. Il y en a $\binom{48}{5} = 1\,712\,304$.

Le nombre de mains contenant au moins un roi est donc $\binom{52}{5} - \binom{48}{5} = 2\,598\,960 - 1\,712\,304 = 886\,656$.

31.16 e) On ajoute le nombre de mains ne contenant aucun roi et le nombre de mains qui en contiennent exactement un.

- Pour les mains ne contenant qu'un roi : on a 4 choix pour le roi, il reste à choisir 4 cartes parmi les 48 cartes qui ne sont pas des rois, ce qui donne $4 \times \binom{48}{4} = 778\,320$.
- Pour les mains ne contenant aucun roi, il y en a $\binom{48}{5}$.

En tout, il y a $\binom{48}{5} + 4 \times \binom{48}{4} = 1\,712\,304 + 778\,320 = 2\,490\,624$ telles mains.

31.16 f) On a $\binom{4}{3} = 4$ façons de choisir les rois. À chacune de ces façons, il y a $\binom{4}{2} = 6$ façons de choisir les deux as. Au total, il y a $\binom{4}{3} \times \binom{4}{2} = 24$ façons de choisir trois rois et deux as.

31.16 g) On a 13 façons de choisir la figure qui sera répétée 3 fois et 12 façons de choisir la figure qui sera répétée 2 fois. Ensuite, comme pour la question précédente, il y a 24 façons d'obtenir un full avec ces deux figures choisies. En tout $13 \times 12 \times \binom{4}{3} \times \binom{4}{2} = 3\,744$ fulls possibles.

31.17 Il y a $\binom{n+p}{n}$ façons de choisir les n éléments pour constituer un groupe de n éléments. À partir de là, les p éléments restant constituent le groupe à p éléments.

On a donc $\binom{n+p}{n} = \binom{n+p}{p}$ façons de constituer ces deux groupes.

31.18 a) On a $\frac{\binom{n}{p}}{\binom{n}{p+1}} = \frac{\frac{n!}{p!(n-p)!}}{\frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!}} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \times \frac{(p+1)! \times (n-p-1)!}{n!} = \frac{p+1}{(n-p)}$. Donc, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{n}{p}}{\binom{n}{p+1}} = 0$.

31.18 b) On a $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{1}{p!} n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)$. Ce produit est une expression polynomiale de degré p en n . Or, pour tout entier k , on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{2^n} = 0$ par croissance comparée. Par somme, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{n}{p}}{2^n} = 0$.

Fiche n° 32. Dénombrement II

Réponses

32.1 a)	$\boxed{120}$	32.4 b)	$\boxed{\textcircled{d}}$	32.10 a)	$\boxed{5!}$
32.1 b)	$\boxed{\frac{n(n-1)}{2}}$	32.4 c)	$\boxed{\textcircled{c}}$	32.10 b)	$\boxed{7!}$
32.1 c)	$\boxed{n+2}$	32.5 a)	$\boxed{24}$	32.10 c)	$\boxed{\frac{7!}{2}}$
32.1 d) ..	$\boxed{\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6}}$	32.5 b)	$\boxed{720}$	32.11	$\boxed{\frac{n(n-1)}{2}}$
32.2 a)	$\boxed{\frac{1}{10}}$	32.5 c)	$\boxed{10}$	32.12	$\boxed{\frac{n(n-3)}{2}}$
32.2 b)	$\boxed{10 \times 9 = 90}$	32.5 d)	$\boxed{64}$	32.13 a)	$\boxed{26^2}$
32.2 c)	$\boxed{\frac{1}{42}}$	32.6 a)	$\boxed{10^5}$	32.13 b)	$\boxed{26^3}$
32.2 d)	$\boxed{\frac{11}{5}}$	32.6 b)	$\boxed{60}$	32.14 a) ..	$\boxed{\binom{13}{1} \times \binom{4}{3} \times \binom{12}{2} \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{1}}$
32.3 a)	$\boxed{\frac{1}{(n+2)}}$	32.6 c)	$\boxed{10^8}$	32.14 b) ..	$\boxed{\binom{13}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{11}{1} \times \binom{4}{1}}$
32.3 b)	$\boxed{n+1}$	32.7 a)	$\boxed{20 \times 19 \times 18}$	32.15	$\boxed{\binom{n}{p}}$
32.3 c)	$\boxed{(n+1)^2}$	32.7 b)	$\boxed{\binom{20}{3}}$		
32.3 d)	$\boxed{\frac{n+1}{n+3}}$	32.8 a)	$\boxed{5}$		
32.4 a)	$\boxed{\textcircled{a}}$	32.8 b)	$\boxed{10}$		
		32.8 c)	$\boxed{32}$		
		32.9 a)	$\boxed{15}$		
		32.9 b)	$\boxed{30}$		
		32.9 c)	$\boxed{256}$		

Corrigés

32.1 b) On a $\binom{n}{2} = \frac{n!}{2! \times (n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$.

32.1 c) On a $\binom{n+2}{n+1} = \frac{(n+2)!}{(n+1)! \times 1!} = n+2$. On pouvait aussi utiliser la formule de symétrie des coefficients binomiaux : pour tout $0 \leq k \leq n$, on a $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Ainsi, on a $\binom{n+2}{n+1} = \binom{n+2}{1} = n+2$.

32.1 d) On a $\binom{n+3}{n} = \frac{(n+3)!}{n! \times 3!} = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3!} = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6}$.

32.2 c) On a $\frac{5!}{7!} = \frac{1}{6 \times 7} = \frac{1}{42}$.

32.2 d) On a $\frac{\binom{11}{5}}{\binom{10}{4}} = \frac{11!}{5! \times 6!} \times \frac{4! \times 6!}{10!} = \frac{11}{5}$.

Cette propriété est vraie de façon générale : pour tous $k, n \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq k \leq n$, on a

$$\frac{n+1}{k+1} \times \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

32.5 a) On peut faire un arbre où chaque embranchement correspond à un choix. J'ai 2 choix de pantalons, 3 choix de chemises et 4 choix de chapeaux. Au total, j'ai $2 \times 3 \times 4 = 24$ choix.

32.5 b) C'est une permutation de 6 éléments : il y a $6! = 720$ façons différentes d'écouter les six chansons.

32.5 c) Il y a $\binom{5}{2} = 10$ façons de choisir deux pantalons parmi cinq.

32.5 d) Chaque fléchette a 4 possibilités pour sa zone d'arrivée. Les 3 fléchettes sont différentes. On a donc $4^3 = 64$ tirages possibles différents.

32.6 a) Pour chaque roue, on a 10 possibilités. L'ordre compte et il peut y avoir des répétitions. Ainsi, au total, il y a 10^5 possibilités.

32.6 b) L'ordre compte et il n'y a pas de répétition possible. On a donc $5 \times 4 \times 3 = 60$ possibilités.

32.6 c) Pour chacun des huit chiffres qui manquent, on a 10 possibilités. L'ordre compte et il peut y avoir des répétitions. On a donc 10^8 possibilités.

32.7 a) On peut réfléchir en pensant à un arbre : il y a 20 possibilités de choix pour l'arrivée du premier cheval ; puis (donc multiplication) 19 possibilités de choix pour l'arrivée du deuxième cheval ; puis (donc multiplication) 18 possibilités de choix pour l'arrivée du troisième cheval.

32.7 b) Il s'agit de prendre un groupe de trois chevaux parmi les vingt ; il y a donc $\binom{20}{3}$ tiercés dans le désordre.

32.8 b) Il y a $\binom{5}{3} = 10$ façons possibles de choisir trois fromages parmi cinq.

32.8 c) Je dois choisir une partie de cet ensemble de cinq fromages. Comme le nombre de parties d'un ensemble à n éléments est 2^n , j'ai $2^5 = 32$ choix possibles.

32.9 a) J'ai 5 choix pour le fromage et 3 choix pour le dessert. Au total, j'ai $3 \times 5 = 15$ choix.

32.9 b) J'ai $\binom{5}{3}$ choix pour les fromages et 3 choix pour le dessert. Au total, j'ai $\binom{5}{3} \times 3 = 10 \times 3 = 30$ choix.

32.9 c) Je dois choisir une partie de cet ensemble de huit « choses à manger ». Comme le nombre de parties d'un ensemble à n éléments est 2^n , j'ai $2^8 = 256$ choix possibles.

32.10 a) Une anagramme du mot « LAPIN », c'est une permutation des cinq lettres de ce mot. Donc il y en a $5!$

.....
32.10 b) Une anagramme de ce mot est une permutation de ses sept lettres (toutes différentes). Il y en a donc 7!
.....

32.10 c) Par rapport à la question précédente, il y a deux fois plus d'anagrammes du mot « CAROT₁T₂E » que d'anagrammes du mot « CAROTTE ».

En effet, à chaque anagramme de cette question, par exemple « TARCOTE », correspondent deux anagrammes de la question précédente, par exemple « T₁ARCOT₂E » et « T₂ARCOT₁E ».

.....
32.11 Tracer un segment est équivalent à choisir les deux points qui en seront les extrémités. Cela revient à choisir deux éléments parmi n car l'ordre du choix des points n'a pas d'importance.

Il y a donc $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ façons de choisir deux points parmi les n , et autant de segments possibles.

.....
32.12 Chaque sommet est relié à « presque » tous les autres par des diagonales : c'est le cas pour tous les points sauf pour lui-même et ses deux voisins. Chaque sommet a donc exactement $n - 3$ diagonales qui partent de lui. Il y a donc en tout $n(n - 3)$ diagonales.

Mais chaque diagonale a été comptée deux fois. Le nombre de diagonales est donc exactement $\frac{n(n-3)}{2}$.

.....
32.13 a) On n'a le choix que des deux premières lettres, les autres sont imposées « en miroir ».

Par exemple « AB · · » donne le seul et unique mot « ABBA » qui soit un palindrome.

Ainsi, il y a 26×26 palindromes possibles.

.....
32.13 b) On n'a le choix que des trois premières lettres, les deux dernières sont imposées « en miroir ».

Par exemple « ABC · · » donne le seul et unique mot « ABCBA » qui soit un palindrome.

Ainsi, il y a $26 \times 26 \times 26$ palindromes possibles.

.....
32.14 a) On choisit une hauteur parmi les 13 possibles (par exemple les rois), puis on choisit trois des quatre cartes de cette hauteur (trois des quatre rois), puis on choisit deux autres hauteurs, différentes entre elles et de celle déjà choisie, parmi les 12 restantes (tout sauf les rois) et dans chaque hauteur (par exemple les sept et les deux), on choisit une carte parmi les quatre.

.....
32.14 b) On choisit deux hauteurs parmi les 13 possibles (par exemple les rois et les dix) puis on choisit deux des quatre cartes de chaque hauteur (deux des quatre rois et deux des quatre dix) puis on choisit une autre hauteur différente parmi les 11 restantes (tout sauf les rois et les dix) et on choisit une carte parmi les quatre.

.....
32.15 Créer une telle suite strictement croissante $u_1 < u_2 < \dots < u_p$, c'est choisir p éléments distincts parmi n et les ordonner par ordre strictement croissant. Comme il n'y a qu'une seule façon de le faire, il y a $\binom{n}{p}$ telles suites strictement croissantes.

Fiche n° 33. Somme de v.a. - Concentration

Réponses

33.1 a).....	$2^2 \times 3^7$	33.7 b).....	$\frac{1}{5}$	33.13 d).....	$25np(1-p)$
33.1 b).....	$2^5 \times 7$	33.8 a).....	5	33.14 a).....	$\frac{50}{3}$
33.1 c).....	3^5	33.8 b).....	16	33.14 b).....	$\frac{1}{6}$
33.2 a).....	$(x-3)^2$	33.8 c).....	-3 et 7	33.14 c).....	$\frac{125}{9}$
33.2 b) .	$(x-1)(x+1)(x^2+1)$	33.8 d).....	$\frac{4}{5}$	33.14 d).....	$\frac{1}{720}$
33.3 a).....	$\frac{4}{5}$	33.9 a).....	0 et 1	33.15 a).....	0
33.3 b).....	$\frac{9}{10}$	33.9 b).....	$\frac{2}{3}$	33.15 b).....	1
33.3 c).....	$-\frac{1}{10}$	33.10 a).....	$\frac{7}{2}$	33.16.....	0
33.3 d).....	$\frac{109}{100}$	33.10 b).....	$\frac{35}{12}$	33.17 a) .	$x^2 - 2E(X)x + E(X^2)$
33.4 a).....	$\frac{1}{4}$	33.10 c).....	$\frac{7n}{2}$	33.17 b).....	$E(X)$
33.4 b).....	$\frac{1}{4}$	33.10 d).....	$\frac{35n}{12}$	33.17 c).....	$V(X)$
33.4 c).....	$\frac{33}{16}$	33.11 a).....	$E(X^2) - E(X)^2$	33.18 a).....	0
33.5 a).....	$\frac{1}{10}$	33.11 b).....	14	33.18 b).....	1
33.5 b).....	3	33.12 a).....	np	33.19 a).....	$\frac{p(1-p)}{n\delta^2}$
33.5 c).....	1	33.12 b).....	$3np$	33.19 b).....	oui
33.6 a).....	40	33.12 c).....	$3np+1$	33.19 c).....	$\frac{1}{2\sqrt{n\alpha}}$
33.6 b).....	36	33.12 d).....	$5np-2$	33.19 d) ..	$\left[\frac{X}{n} - \frac{1}{2\sqrt{n\alpha}}, \frac{X}{n} + \frac{1}{2\sqrt{n\alpha}} \right]$
33.7 a).....	$-\frac{1}{5}$	33.13 a).....	$np(1-p)$	33.19 e).....	$]0,34, 0,54[$
		33.13 b).....	$9np(1-p)$		
		33.13 c).....	$9np(1-p)$		

Corrigés

33.3 a) On a $P(X \leq 0) = P(X = -2) + P(X = -1) + P(X = 0) = \frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} = \frac{4}{5}$.

33.3 b) On a $P(X < 2) = P(X = -2) + P(X = -1) + P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$.

33.3 c) D'après la définition de l'espérance, on a

$$E(X) = -2 \times \frac{1}{10} - 1 \times \frac{1}{5} + 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{10} + 2 \times \frac{1}{10} = \frac{-2 - 2 + 1 + 2}{10} = -\frac{1}{10}.$$

33.3 d) D'après la définition de la variance, on a

$$\begin{aligned} V(X) &= \left(-2 + \frac{1}{10}\right)^2 \times \frac{1}{10} + \left(-1 + \frac{1}{10}\right)^2 \times \frac{1}{5} + \left(0 + \frac{1}{10}\right)^2 \times \frac{1}{2} + \left(1 + \frac{1}{10}\right)^2 \times \frac{1}{10} + \left(2 + \frac{1}{10}\right)^2 \times \frac{1}{10} \\ &= \frac{19^2 + 2 \times 9^2 + 5 + 11^2 + 21^2}{10^2 \times 10} = \frac{361 + 162 + 5 + 121 + 441}{10^2 \times 10} = \frac{1\,090}{10^2 \times 10} = \frac{109}{10^2}. \end{aligned}$$

À noter que les carrés se calculent relativement vite. Par exemple, on a

$$19^2 = (10 + 9)^2 = 10^2 + 2 \times 10 \times 9 + 9^2 = 100 + 180 + 81 = 361.$$

33.4 a) Comme $([X = -3/2], [X = 0], [X = 1/3])$ forme un système complet d'événements, on a

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + p = 1 \quad \text{donc} \quad p = \frac{1}{4}.$$

33.4 b) D'après la définition de l'espérance, on a $E(X) = -\frac{3}{2} \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{1}{2} + \frac{5}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

33.4 c) D'après la définition de la variance, on a $V(X) = \left(-\frac{3}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 \frac{1}{4} + \left(0 - \frac{1}{4}\right)^2 \frac{1}{2} + \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 \frac{1}{4} = \frac{33}{16}$.

33.5 a) Comme $([X = 1], [X = 2], [X = 3], [X = 4])$ forme un système complet d'événements, on a

$$\alpha + 2\alpha + 3\alpha + 4\alpha = 1 \quad \text{donc} \quad \alpha(1 + 2 + 3 + 4) = 1 \quad \text{donc} \quad \alpha \frac{4 \times 5}{2} = 1 \quad \text{donc} \quad \alpha = \frac{1}{10}.$$

33.5 b) D'après la définition de l'espérance, on a

$$E(X) = \sum_{i=1}^4 i P(X = i) = \sum_{i=1}^4 i \times \frac{i}{10} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^4 i^2 = \frac{1}{10} \times \frac{4(4+1)(2 \times 4 + 1)}{6} = \frac{4 \times 5 \times 9}{10 \times 6} = 3.$$

33.5 c) D'après la définition de la variance, on a

$$V(X) = (1-3)^2 \frac{1}{10} + (2-3)^2 \frac{2}{10} + (3-3)^2 \frac{3}{10} + (4-3)^2 \frac{4}{10} = \frac{4}{10} + \frac{2}{10} + \frac{4}{10} = 1.$$

33.6 a) D'après la linéarité de l'espérance, on a $E(Y) = 3E(X) + 4$.

33.6 b) D'après les propriétés de la variance, on a $V(Y) = 3^2 V(X)$.

33.7 a) D'après la linéarité de l'espérance, on a $E(Y) = \frac{-E(X) + 2}{5}$.

33.7 b) D'après les propriétés de la variance, on a $V(Y) = \left(-\frac{1}{5}\right)^2 V(X)$.

33.8 a) D'après la linéarité de l'espérance, on a $E(Y) = 10 E(X) - 3 = 10 \times \frac{4}{5} - 3$.

33.8 b) D'après les propriétés de la variance, on a $V(Y) = 10^2 V(X) = 10^2 \times \frac{4}{5} \left(1 - \frac{4}{5}\right)$.

33.8 c) Si X prend la valeur 0, alors Y prend la valeur -3 . Si X prend la valeur 1, alors Y prend la valeur 7.

33.8 d) On a $P(Y = 7) = P(X = 1) = \frac{4}{5}$.

33.9 a) Si X prend la valeur -5 , alors Y prend la valeur 0. Si X prend la valeur 10, alors Y prend la valeur 1.

33.9 b) On a $P(Y = 1) = P(X = 10) = \frac{1}{3}$. Ainsi, $P(Y = 0) = 1 - P(Y = 1) = \frac{2}{3}$.

33.10 a) On a $E(X_1) = \sum_{k=1}^6 k \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \times \frac{6(6+1)}{2}$.

33.10 b) On a

$$\begin{aligned} V(X_1) &= \sum_{k=1}^6 \left(k - \frac{7}{2}\right)^2 \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \left[\sum_{k=1}^6 \left(k^2 - 7k + \frac{49}{4}\right) \right] \\ &= \frac{1}{6} \left(\sum_{k=1}^6 k^2 - 7 \sum_{k=1}^6 k + 6 \times \frac{49}{4} \right) = \frac{1}{6} \left(\frac{6 \times 7 \times 13}{6} - 7 \times \frac{6 \times 7}{2} + 6 \times \frac{49}{4} \right) \\ &= \frac{7 \times 13}{6} - \frac{3 \times 7^2}{6} + \frac{49}{4} = -\frac{56}{6} + \frac{49}{4} = \frac{-112 + 147}{12} = \frac{35}{12}. \end{aligned}$$

33.10 c) En utilisant la linéarité de l'espérance, on a $E(S_n) = \sum_{k=1}^n E(X_k) = \sum_{k=1}^n \frac{7}{2}$.

33.10 d) Comme les variables aléatoires sont indépendantes, on a $V(S_n) = \sum_{k=1}^n V(X_k) = \sum_{k=1}^n \frac{35}{12}$.

33.11 a) D'après la linéarité de l'espérance, on a

$$V(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2 - 2X E(X) + E(X)^2) = E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2.$$

33.11 b) On a $E(Y) = E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = 5 + 3^2 = 14$.

33.12 a) D'après le cours, on a $E(X) = np$.

33.12 b) D'après le cours, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $E(aX) = aE(X)$. On a donc $E(3X) = 3E(X) = 3np$.

33.12 c) On sait que, pour $a, b \in \mathbb{R}$, on a $E(aX + b) = aE(X) + b$. Ici, on a donc $E(3X + 1) = 3E(X) + 1 = 3np + 1$.

33.12 d) De même, on a $E(5X - 2) = 5E(X) - 2 = 5np - 2$.

33.13 a) D'après le cours, on a $V(X) = np(1 - p)$.

33.13 b) D'après le cours, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $V(aX) = a^2 V(X)$. On a donc $V(3X) = 9V(X) = 9np(1 - p)$.

33.13 c) On sait que, pour $a, b \in \mathbb{R}$, on a $V(aX + b) = a^2 V(X)$. Donc, $V(3X + 1) = 9V(X) = 9np(1 - p)$.

33.13 d) De même, on a $V(5X - 2) = 25V(X) = 25np(1 - p)$.

33.14 a) On peut considérer le lancer d'un dé à six faces comme une épreuve de Bernoulli, pour laquelle l'événement « obtenir 1 » représente le succès. Puisque la variable aléatoire X compte le nombre de succès lorsqu'on répète indépendamment cette épreuve, elle suit une loi binomiale. L'épreuve étant répétée 100 fois et la probabilité d'un succès étant $\frac{1}{6}$, X suit la loi binomiale de paramètre $\left(100, \frac{1}{6}\right)$. On a donc $E(X) = \frac{100}{6} = \frac{50}{3}$.

33.14 b) D'après les propriétés de l'espérance, on a $E(Y) = \frac{1}{100} E(X) = \frac{1}{100} \times \frac{100}{6} = \frac{1}{6}$.

33.14 c) Puisque X suit la loi binomiale de paramètre $\left(100, \frac{1}{6}\right)$, on a $V(X) = 100 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{500}{36} = \frac{125}{9}$.

33.14 d) D'après les propriétés de la variance, on a $V(Y) = \frac{1}{100^2} V(X) = \frac{1}{100^2} \frac{500}{36} = \frac{5}{3 \cdot 600} = \frac{1}{720}$.

33.15 a) D'après les propriétés de l'espérance, on a $E(Y) = \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}(E(X) - np) = 0$ car $E(X) = np$.

33.15 b) On a $V(Y) = \left(\frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}\right)^2 V(X) = \frac{1}{np(1-p)} V(X) = 1$ car $V(X) = np(1-p)$.

33.16 Comme X est à valeurs dans $\{0, 1\}$, on a $X^2 = X$. Ainsi, $E(X) - E(X^2) = E(X) - E(X) = 0$.

33.17 a) En utilisant la linéarité de l'espérance, on trouve $f(x) = E(X^2 - 2xX + x^2) = E(X^2) - 2xE(X) + x^2$.

33.17 b) La fonction f est une fonction trinôme dont le coefficient dominant vaut 1. La fonction f atteint donc son minimum en $x_0 = -\frac{2E(X)}{2}$.

33.17 c) Le minimum de f vaut alors $f(x_0) = E((X - E(X))^2) = V(X)$.

33.18 a) On utilise la linéarité de l'espérance. On trouve

$$E(S_n) = E\left(\frac{1}{\sqrt{n}\sigma} \left(\sum_{k=1}^n X_k - nm\right)\right) = \frac{\sum_{k=1}^n E(X_k) - nm}{\sqrt{n}\sigma} = \frac{nm - nm}{\sqrt{n}\sigma}.$$

33.18 b) Comme $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, d'après les propriétés de la variance, on a

$$V(S_n) = \frac{1}{(\sqrt{n}\sigma)^2} \sum_{k=1}^n V(X_k) = \frac{n\sigma^2}{n\sigma^2}.$$

33.19 a) On a $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \delta\right) = P(|X - np| \geq n\delta) \leq \frac{np(1-p)}{(n\delta)^2} = \frac{p(1-p)}{n\delta^2}.$$

33.19 b) La fonction polynôme du second degré $t \mapsto t(1-t)$ atteint son maximum en « $\frac{-b}{2a}$ », qui ici vaut $\frac{1}{2}$, et pour lequel elle vaut $\frac{1}{4}$.

33.19 c) D'après ce qui précède, pour que l'inégalité $P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \delta\right) \leq \alpha$ soit vraie, il suffit d'avoir $\frac{p(1-p)}{n\delta^2} \leq \alpha$. Or, d'après le résultat admis, cela est réalisé si on a $\frac{1}{4n\delta^2} \leq \alpha$, c'est-à-dire si $\delta^2 \geq \frac{1}{4n\alpha}$.

On peut donc choisir $\delta = \frac{1}{2\sqrt{n\alpha}}$.

33.19 d) D'après ce qui précède, on a $P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \frac{1}{2\sqrt{n\alpha}}\right) \leq \alpha$, donc on a $P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| < \frac{1}{2\sqrt{n\alpha}}\right) \geq 1 - \alpha$.

Or, on a

$$\left|\frac{X}{n} - p\right| < \frac{1}{2\sqrt{n\alpha}} \iff -\frac{1}{2\sqrt{n\alpha}} < p - \frac{X}{n} < \frac{1}{2\sqrt{n\alpha}} \iff \frac{X}{n} - \frac{1}{2\sqrt{n\alpha}} < p < \frac{X}{n} + \frac{1}{2\sqrt{n\alpha}}.$$

Finalement, on a $P\left(p \in \left[\frac{X}{n} - \frac{1}{2\sqrt{n\alpha}}, \frac{X}{n} + \frac{1}{2\sqrt{n\alpha}}\right]\right) \geq 1 - \alpha$.

33.19 e) Avec les données numériques, on a ici $\frac{X}{n} = \frac{220}{500} = 0,44$, $\alpha = 0,05$ et $\frac{1}{2\sqrt{n\alpha}} = \frac{1}{2\sqrt{25}} = 0,1$. L'intervalle I obtenu à la question précédente est donc l'intervalle $]0,34, 0,54[$.

Fiche n° 34. Fonctions trigonométriques

Réponses

34.1	☐ a	34.9 a).....	$\frac{2\pi}{5}$	34.15 b)	☐ b
34.2 a).....	☐ c	34.9 b).....	$-\frac{3\pi}{4}$	34.16 a).....	☐ a
34.2 b).....	☐ a	34.9 c).....	$-\frac{\pi}{2}$	34.16 b)	☐ a
34.3 a)	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	34.10 a).....	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	34.17 a).....	$\left\{-\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{5}\right\}$
34.3 b).....	$\frac{1}{2}$	34.10 b).....	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	34.17 b).....	$\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$
34.3 c)	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	34.10 c)	$-\frac{1}{2}$	34.17 c).....	$\left\{-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right\}$
34.3 d)	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	34.10 d).....	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	34.18 a).....	$\left\{\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$
34.4 a).....	$\cos(x)$	34.10 e)	0	34.18 b).....	$\left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$
34.4 b).....	$-\sin(x)$	34.10 f).....	-1	34.18 c) .	$\left\{\frac{\pi}{18}, \frac{11\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}, \frac{23\pi}{18}, \frac{25\pi}{18}, \frac{35\pi}{18}\right\}$
34.4 c).....	$-\cos(x)$	34.11	☐ a	34.19 a).....	$\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$
34.4 d).....	$\sin(x)$	34.12 a).....	☐ a	34.19 b)...	$\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$
34.4 e).....	$-\cos(x)$	34.12 b)	☐ a	34.19 c).....	$\left\{\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}\right\}$
34.4 f).....	$-\sin(x)$	34.12 c).....	☐ b	34.20 a).....	$\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$
34.4 g).....	$\sin(x)$	34.13 a).....	☐ b	34.20 b)	$\left[-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right]$
34.4 h).....	$\cos(x)$	34.13 b)	☐ a	34.20 c)	$\left[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$
34.5 a)	☐ a et ☐ b	34.13 c).....	☐ b		
34.5 b)	☐ c et ☐ d	34.13 d)	☐ a		
34.6	☐ d	34.14 a).....	vrai		
34.7 a).....	☐ a	34.14 b).....	faux		
34.7 b).....	$\sqrt{\frac{6+\sqrt{3}}{8}}$	34.14 c).....	vrai		
34.8 a).....	-5	34.14 d)	vrai		
34.8 b).....	-6	34.15 a).....	☐ b		

34.20 d).....	$\left] -\pi, -\frac{3\pi}{4} \right] \cup \left[\frac{\pi}{4}, \pi \right]$	34.21 a).....	$\boxed{0}$	34.21 d).....	$\boxed{\sqrt{3}}$
		34.21 b).....	$\boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}$	34.21 e).....	$\boxed{\frac{1}{\cos^2(x)}}$
		34.21 c).....	$\boxed{1}$		

Corrigés

34.2 a) Un angle de π radians fait 180° .

34.2 b) Un angle de 1° fait $\frac{\pi}{180}$ rad.

34.7 b) On sait que $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ donc on a $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x) = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)^2 = \frac{6+\sqrt{3}}{8}$.

Or, on a $\sin(x) \geq 0$ et donc $\sin(x) = \sqrt{\frac{6+\sqrt{3}}{8}}$.

34.8 a) On a les équivalences suivantes :

$$0 < \frac{45\pi}{4} + 2k\pi < 2\pi \iff -\frac{45\pi}{4} < 2k\pi < -\frac{37\pi}{4} \iff -\frac{45}{8} < k < -\frac{37}{8} \iff -5 - \frac{5}{8} < k < -5 + \frac{3}{8} \iff k = -5.$$

34.8 b) Soit $k \in \mathbb{Z}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} -\pi < \frac{71\pi}{6} + 2k\pi \leq \pi &\iff -\frac{77\pi}{6} < 2k\pi \leq -\frac{65\pi}{6} \iff -\frac{77}{12} < k \leq -\frac{65}{12} \iff -6 - \frac{5}{12} < k \leq -6 + \frac{7}{12} \\ &\iff k = -6. \end{aligned}$$

34.9 a) On cherche l'entier relatif k tel que $-\pi < \frac{152\pi}{5} + 2k\pi \leq \pi$. Soit $k \in \mathbb{Z}$. On a les équivalences suivantes :

$$-\frac{157\pi}{5} < 2k\pi \leq -\frac{147\pi}{5} \iff -\frac{157}{10} < k \leq -\frac{147}{10} \iff k = -15.$$

La mesure principale de $\frac{152\pi}{5}$ est donc $\frac{152\pi}{5} - 15 \times 2\pi = \frac{152\pi}{5} - \frac{150\pi}{5} = \frac{2\pi}{5}$.

34.9 b) De même, soit $k \in \mathbb{Z}$. On a les équivalences suivantes :

$$-\pi < 2k\pi - \frac{75\pi}{4} \leq \pi \iff \frac{71\pi}{4} < 2k\pi \leq \frac{79\pi}{4} \iff \frac{71}{8} < k \leq \frac{79}{8} \iff k = 9.$$

La mesure principale de $-\frac{75\pi}{4}$ est donc $-\frac{75\pi}{4} + 9 \times 2\pi = -\frac{75\pi}{4} + \frac{72\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$.

34.9 c) De même, on a l'équivalence : $-\pi < \frac{153\pi}{6} + 2k\pi \leq \pi \iff k = -13$.

La mesure principale de $\frac{153\pi}{6}$ est donc $\frac{153\pi}{6} - 13 \times 2\pi = \frac{153\pi - 156\pi}{6} = -\frac{\pi}{2}$.

34.10 a) On reconnaît que $\frac{11\pi}{4} = \frac{8\pi + 3\pi}{4} = 2\pi + \frac{3\pi}{4}$. On a donc $\cos\left(\frac{11\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

34.10 b) De même, on a $\sin\left(\frac{11\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

34.10 c) On reconnaît que $\frac{10\pi}{3} = \frac{12\pi - 2\pi}{3} = 4\pi - \frac{2\pi}{3}$. On a donc $\cos\left(\frac{10\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$.

34.10 e) On reconnaît que $\frac{19\pi}{2} = \frac{20\pi - \pi}{2} = 10\pi - \frac{\pi}{2}$. On a donc $\cos\left(\frac{19\pi}{2}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

34.11 La fonction cosinus est paire, donc sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

34.12 c) La fonction $\cos$ est croissante sur $[\pi, 2\pi]$, donc croissante sur $\left[\pi, \frac{5\pi}{4}\right]$. La fonction $x \mapsto \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ est donc croissante sur $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$.

34.13 b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(-x) = 5 - 2\cos(-x) = 5 - 2\cos(x) = f(x)$.

34.13 c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(-x) = 4\cos(-x)\sin(-x) = 4\cos(x)(-\sin(x)) = -4\cos(x)\sin(x) = -f(x)$.

34.13 d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(-x) = (-x)^2\cos(-x) = x^2\cos(x) = f(x)$.

34.14 a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos(x + 4\pi) = \cos(x + 2\pi + 2\pi) = \cos(x + 2\pi) = \cos(x)$.

34.14 b) On note $f : x \mapsto \sin\left(\frac{x}{2}\right)$. On a

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad f\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

La fonction f n'est donc pas 2π -périodique.

34.14 c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x+1) = 3 \sin(2\pi(x+1)) = 3 \sin(2\pi x + 2\pi) = 3 \sin(2\pi x) = f(x)$.

34.14 d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 4 \cos\left(4\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) - 1 = 4 \cos(4x + 2\pi) - 1 = 4 \cos(4x) - 1 = f(x)$.

34.15 a) La fonction recherchée atteint la valeur 2 et s'annule en 0, il s'agit donc de $x \mapsto -2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)$.

34.15 b) La fonction recherchée s'annule en $\frac{\pi}{4}$, il s'agit donc de $x \mapsto \cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$.

34.16 a) La fonction recherchée s'annule en $\frac{\pi}{4}$, il s'agit donc de $x \mapsto -\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

34.16 b) La fonction recherchée atteint les valeurs 0 et 2, il s'agit donc de $x \mapsto 1 + \cos(x)$.

34.17 a) Dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$, les seuls nombres ayant le même cosinus que $\frac{\pi}{5}$ sont $-\frac{\pi}{5}$ et $\frac{\pi}{5}$. L'équation $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ admet donc deux solutions dans cet intervalle : $\left\{-\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{5}\right\}$.

34.17 b) On a $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Or, dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$, les seuls nombres ayant le même sinus que $\frac{\pi}{4}$ sont $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$. Les solutions de l'équation dans $]-\pi, \pi]$ sont donc : $\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$.

34.18 a) On procède comme précédemment en constatant que $\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

34.18 b) On procède comme précédemment en constatant que $-\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \iff \cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)$.

34.18 c) De même, dans l'intervalle $]0, 6\pi]$, les solutions de l'équation $\cos(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ sont $\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \frac{23\pi}{6}, \frac{25\pi}{6}$ et $\frac{35\pi}{6}$. L'ensemble des solutions de l'équation $\cos(3x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ dans l'intervalle $]0, 2\pi]$ est donc

$$\left\{\frac{\pi}{18}, \frac{11\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}, \frac{23\pi}{18}, \frac{25\pi}{18}, \frac{35\pi}{18}\right\}.$$

34.19 a) De même, on a $\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$. Les solutions dans $[0, 2\pi[$ sont donc $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$.

34.19 b) Soit $x \in [0, 2\pi[$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \sin^2(x) = \frac{1}{2} &\iff \sin(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } \sin(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \iff \sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } \sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\iff x \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}. \end{aligned}$$

34.19 c) Soit $x \in [0, 2\pi[$. On note $t = \cos(x)$. L'équation $2t^2 + t - 1 = 0$ est une équation du second degré, dont le discriminant vaut 9 et les solutions sont -1 et $\frac{1}{2}$. On a donc les équivalences suivantes :

$$2\cos^2(x) + \cos(x) - 1 = 0 \iff \cos(x) = -1 \text{ ou } \cos(x) = \frac{1}{2} \iff x \in \left\{ \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3} \right\}.$$

34.20 a) On a $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$. Par lecture sur le cercle trigonométrique, les réels de l'intervalle $]-\pi, \pi]$ dont le cosinus est supérieur à $\frac{1}{2}$ sont ceux compris entre $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$.

34.20 b) De même, on a $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc, par lecture sur le cercle trigonométrique, les réels de l'intervalle $]-\pi, \pi]$ dont le sinus est inférieur à $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ sont ceux compris entre $-\frac{2\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$.

34.20 c) Soit $x \in]-\pi, \pi]$. On a l'équivalence

$$|\cos(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \iff -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Or, on a $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Un raisonnement similaire au précédent permet alors de conclure.

34.20 d) On utilise le fait que, dans l'intervalle $\left]-\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$, l'ensemble des solutions de l'inéquation $\sin(t) \geq 0$ est $\left]-\frac{5\pi}{4}, -\pi\right] \cup \left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$.

34.21 a) On a $\tan(0) = \frac{\sin(0)}{\cos(0)} = \frac{0}{1} = 0$. On procède de même dans les questions suivantes.

34.21 e) Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $1 + \tan^2(x) = 1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$.

Fiche n° 35. Dérivation des fonctions trigonométriques

Réponses

35.1 a) $x^3 + y^3$

35.1 b) $x - 1$

35.1 c) $x^6 - x^5 - x^4 + x^2 + x - 1$

35.2 a) $ab(7a - 4b)$

35.2 b) $(1 + a)(1 + b)$

35.3 a) $\{-9, 5\}$

35.3 b) $\left\{\frac{5}{2}\right\}$

35.4 a) $\textcircled{d}$

35.4 b) $\textcircled{c}$

35.5 a) $\textcircled{a}$

35.5 b) $\textcircled{b}$

35.6 a) $e^x(\cos(x) - \sin(x))$

35.6 b) $5 \sin(-5x + 3)$

35.6 c) $-2x \sin(x^2)$

35.7 a) $\cos(x)e^{\sin(x)} - \sin(x)$

35.7 b) $\frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}} + \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}}$

35.7 c) $24 \cos(2x)(1 + 3 \sin(2x))^3$

35.8 a) $\frac{x \cos(\sqrt{x^2 + 5})}{\sqrt{x^2 + 5}}$

35.8 b) $\frac{\cos(x) \cos(3x) + 6 \sin(x) \sin(3x)}{\cos^3(3x)}$

35.8 c) $3x^2 \sqrt{\sin(x)} + \frac{x^3 \cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}}$

35.9 0

35.10 $-2 \sin(x)$

35.11 a) $\cos(a)$

35.11 b) 1

35.11 c) 2

35.12 a) 1

35.12 b) 0

35.12 c) $x + \frac{\pi}{2}$

35.13 $\frac{1}{\cos^2(x)}$

35.14 a) $\frac{3}{\cos^2(3x)} + \frac{2}{\cos^2(x)}$

35.14 b) $\frac{4 \tan(x)}{\cos^2(x)}$

35.14 c) $\frac{12}{\cos^2(3x)\sqrt{\tan(3x)}} - \frac{4 \cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x} \sin^3(\sqrt{x})}$

Corrigés

35.1 a) On a $(x + y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 - x^2y + xy^2 + x^2y - xy^2 + y^3 = x^3 + y^3$.

35.1 b) On a $\left(x - \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{x^2 - 1}{x} \frac{x+1-1}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x} \frac{x}{x+1} = x - 1$.

35.1 c) On a $(x - 1)(x^2 - 1)(x^3 - 1) = (x^3 - x^2 - x + 1)(x^3 - 1) = x^6 - x^5 - x^4 + x^2 + x - 1$.

35.2 a) On a $7a^2b - 4ab^2 = ab \times 7a - ab \times 4b = ab(7a - 4b)$.

35.2 b) On a $a + 1 + b + ab = a + 1 + b(1 + a) = (a + 1)(1 + b)$.

35.3 a) On a les équivalences suivantes : $|x + 2| = 7 \iff x + 2 = 7$ ou $x + 2 = -7 \iff x = 5$ ou $x = -9$.

35.3 b) On a les équivalences suivantes :

$$|x + 2| = |x - 7| \iff x + 2 = x - 7 \text{ ou } x + 2 = -(x - 7) \iff 2 = -7 \text{ ou } 2x = 7 - 2 \iff x = \frac{5}{2}.$$

35.4 b) En notant $u(x) = x$ et $v(x) = \sin(x)$, on a $f(x) = u(x) \times v(x)$, $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \cos(x)$. Donc, on a $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = \sin(x) + x \cos(x)$.

35.5 a) En notant $u(x) = x^2$ et $v(x) = \cos(x)$, on a $f(x) = u(x) \times v(x)$, $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = -\sin(x)$. Donc, on a $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 2x \cos(x) - x^2 \sin(x)$.

35.5 b) En notant $u(x) = \sin(x)$ et $v(x) = x$, on a $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, $u'(x) = \cos(x)$ et $v'(x) = 1$. Donc, on a

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^2}.$$

35.6 b) En notant $u(x) = \cos(x)$ et $v(x) = -5x + 3$, on a $f(x) = u \circ v(x)$, $u'(x) = -\sin(x)$ et $v'(x) = -5$. Donc, on a $f'(x) = v'(x) \times u'(v(x)) = -5 \times (-\sin(-5x + 3)) = 5 \sin(-5x + 3)$.

35.6 c) En notant $u(x) = \cos(x)$ et $v(x) = x^2$, on a $f(x) = u \circ v(x)$, $u'(x) = -\sin(x)$ et $v'(x) = 2x$. Donc, on a $f'(x) = v'(x) \times u'(v(x)) = 2x \times (-\sin(x^2)) = -2x \sin(x^2)$.

35.7 a) Il faut utiliser la dérivée de la fonction composée $x \mapsto e^{u(x)}$, qui est $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$.

35.7 b) Il faut utiliser la dérivée de la fonction composée $x \mapsto \sqrt{u(x)}$, qui est $x \mapsto \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.

35.7 c) Il faut utiliser la dérivée de la fonction puissance $x \mapsto (u(x))^n$, qui est $x \mapsto nu'(x)(u(x))^{n-1}$.

35.8 a) En notant $u(x) = \sin(x)$ et $v(x) = \sqrt{x^2 + 5}$, on a $f(x) = u \circ v(x)$, $u'(x) = \cos(x)$ et $v'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}}$. On a donc $f'(x) = v'(x) \times u'(v(x)) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}} \cos(\sqrt{x^2 + 5})$.

35.8 b) En notant $u(x) = \sin(x)$ et $v(x) = \cos^2(3x)$, on a $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, $u'(x) = \cos(x)$ et

$$v'(x) = 2 \times (-3 \sin(3x)) \times \cos(3x) = -6 \sin(3x) \cos(3x),$$

en utilisant des dérivées de composées.

35.9 On a $f'(x) = -e^{-x} \sin(x) + e^{-x} \cos(x)$ et $f''(x) = -2e^{-x} \cos(x)$. Donc,

$$f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = -2e^{-x} \cos(x) - 2e^{-x} \sin(x) + 2e^{-x} \cos(x) + 2e^{-x} \sin(x) = 0.$$

35.10 On a $f'(x) = \sin(x) + x \cos(x)$ et $f''(x) = 2 \cos(x) - x \sin(x)$. Donc,

$$xf(x) - 2f'(x) + xf''(x) = x^2 \sin(x) - 2(\sin(x) + x \cos(x)) + x(2 \cos(x) - x \sin(x)) = -2 \sin(x).$$

35.11 a) La fonction $\sin$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\sin'(x) = \cos(x)$. Par définition du nombre dérivé, on a donc $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x) - \sin(a)}{x - a} = \sin'(a) = \cos(a)$.

35.11 b) On applique le résultat précédent avec $a = 0$.

35.11 c) Quand x tend vers $\frac{\pi}{3}$, $t = 2x - \frac{2\pi}{3}$ tend vers 0. Donc, d'après la question précédente, $\frac{\sin(t)}{t}$ tend vers 1. Ainsi, $\frac{\sin(2x - \frac{2\pi}{3})}{x - \frac{\pi}{3}} = \frac{2 \sin(t)}{t}$ admet une limite égale à 2.

35.12 a) Pour tout $x \in]-\pi, 0[$, on a

$$h'(x) = f'(x) \times g'(f(x)) = -\sin(x) \times \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(x)}} = \frac{-\sin(x)}{\sqrt{\sin^2(x)}} = \frac{-\sin(x)}{|\sin(x)|}.$$

Or, sur $]-\pi, 0[$, on a $-\sin(x) = |\sin(x)|$, donc $h'(x) = 1$.

35.12 b) On a $h\left(-\frac{\pi}{2}\right) = g(0) = 0$.

35.12 c) Puisque $h'(x) = 1$, on en déduit qu'il existe un réel b tel que, pour tout $x \in]-\pi, 0[$, $h(x) = x + b$.

Or, $h\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$, donc $-\frac{\pi}{2} + b = 0$ et $b = \frac{\pi}{2}$. Par conséquent, on a $h(x) = x + \frac{\pi}{2}$.

35.13 En notant $u(x) = \sin(x)$ et $v(x) = \cos(x)$, on a $u'(x) = \cos(x)$ et $v'(x) = -\sin(x)$ donc

$$\tan'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{\cos(x)\cos(x) + \sin(x)\sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

On remarque qu'on a aussi $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$.

35.14 a) On a $f'(x) = 3 \tan'(3x) + 2 \tan'(x)$. On utilise alors le calcul précédent.

35.14 b) On a $f'(x) = 2 \times 2 \tan'(x) \tan(x)$.

35.14 c) La dérivée de $x \mapsto \sqrt{\tan(3x)}$ est $x \mapsto \frac{3 \tan'(3x)}{2\sqrt{\tan(3x)}}$. La dérivée de $x \mapsto \frac{1}{\sin^2(\sqrt{x})} = \sin(\sqrt{x})^{-2}$ est

$$x \mapsto -2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos(\sqrt{x}) \times \sin^{-3}(\sqrt{x}).$$

Fiche n° 36. Intégration des fonctions trigonométriques

Réponses

36.1 a).....	$\boxed{2}$	36.3 b).....	$\boxed{-\frac{1}{3\pi}}$	36.6 c).....	$\boxed{\frac{\pi^2}{4} - 2}$
36.1 b).....	$\boxed{\sqrt{2}}$				
36.1 c).....	$\boxed{-2}$	36.4 a).....	$\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$	36.6 d).....	$\boxed{\pi}$
36.1 d).....	$\boxed{8}$				
36.2 a).....	$\boxed{0}$	36.4 b).....	$\boxed{\frac{1}{4}}$	36.7 a).....	$\boxed{\frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{2}}$
36.2 b).....	$\boxed{0}$				
36.2 c).....	$\boxed{\sqrt{2}}$	36.5.....	$\boxed{e}$	36.7 b).....	$\boxed{\frac{e^{\frac{\pi}{2}} + 1}{2}}$
36.2 d).....	$\boxed{\frac{\sqrt{3} - 1}{2}}$	36.6 a).....	$\boxed{\frac{\pi - 2}{2}}$	36.7 c).....	$\boxed{\frac{1 + 2e^{\pi}}{5}}$
36.3 a).....	$\boxed{-\frac{2}{3}}$	36.6 b).....	$\boxed{1}$	36.7 d).....	$\boxed{\frac{3 - 2e^{-\frac{\pi}{3}}}{13}}$

Corrigés

36.1 c) On a $\int_0^{\pi} (\cos(t) - \sin(t)) dt = [\sin(t) + \cos(t)]_0^{\pi} = 0 - 1 - (0 + 1) = -2$.

36.2 d) On a

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{2\pi + \frac{\pi}{3}} \sin(t) dt = [-\cos(t)]_{\frac{\pi}{6}}^{2\pi + \frac{\pi}{3}} = -\cos\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) - \left(-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}.$$

36.3 b) On a

$$\int_{-\frac{1}{6}}^1 \cos\left(3\pi t + \frac{\pi}{2}\right) dt = \left[\frac{\sin\left(3\pi t + \frac{\pi}{2}\right)}{3\pi}\right]_{-\frac{1}{6}}^1 = \frac{1}{3\pi} \left(\sin\left(3\pi + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{3\pi}(-1 - 0) = -\frac{1}{3\pi}.$$

36.4 a) On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u(t) = t^2$, alors $u'(t) = 2t$. On a donc

$$\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} 2t \cos(t^2) dt = \int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} u'(t) \cos(u(t)) dt = [\sin(u(t))]_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} = \sin\left(\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2\right) - \sin(0^2) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

36.5 On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u(t) = \sin(t)$, alors $u'(t) = \cos(t)$. On a donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin^n(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (u(t))^n u'(t) dt = \left[\frac{(u(t))^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin^{n+1}(\frac{\pi}{2}) - \sin^{n+1}(0)}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

36.6 b) On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u(t) = t$ et $v'(t) = \sin(t)$, alors $u'(t) = 1$ et $v(t) = -\cos(t)$. En intégrant par parties, on obtient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin(t) dt = \left[t(-\cos(t)) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \times (-\cos(t)) dt = 0 - 0 + \left[\sin(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) = 1.$$

36.6 c) On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u(t) = t^2$ et $v'(t) = \cos(t)$, alors $u'(t) = 2t$ et $v(t) = \sin(t)$. En intégrant par parties, on obtient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos(t) dt = \left[t^2 \sin(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2t \sin(t) dt = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 0 - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin(t) dt.$$

D'après la question précédente, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin(t) dt = 1$, donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos(t) dt = \frac{\pi^2}{4} - 2$.

Si la question précédente n'avait pas été là, nous aurions enchaîné deux intégrations par parties.

36.7 d) Notons l'intégrale à calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{-2t} \sin(3t) dt$.

On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u(t) = e^{-2t}$ et $v'(t) = \sin(3t)$, alors $u'(t) = -2e^{-2t}$ et $v(t) = -\frac{\cos(3t)}{3}$.

En intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned} I &= \left[e^{-2t} \left(-\frac{\cos(3t)}{3} \right) \right]_0^{\frac{\pi}{6}} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} -2e^{-2t} \left(-\frac{\cos(3t)}{3} \right) dt = -\frac{1}{3}(0 - 1) - \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{-2t} \cos(3t) dt \\ &= \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{-2t} \cos(3t) dt. \end{aligned}$$

Une autre intégration par parties avec $a(t) = e^{-2t}$, $b'(t) = \cos(3t)$, $a'(t) = -2e^{-2t}$, $b(t) = \frac{\sin(3t)}{3}$ donne

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{-2t} \cos(3t) dt &= \left[e^{-2t} \frac{\sin(3t)}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{6}} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} -2e^{-2t} \frac{\sin(3t)}{3} dt \\ &= \frac{1}{3}(e^{-\frac{\pi}{3}} - 0) + \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{-2t} \sin(3t) dt = \frac{e^{-\frac{\pi}{3}}}{3} + \frac{2}{3}I. \end{aligned}$$

En regroupant les deux calculs, on obtient $I = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \left(\frac{e^{-\frac{\pi}{3}}}{3} + \frac{2}{3}I \right) = \frac{1}{3} - \frac{2e^{-\frac{\pi}{3}}}{9} - \frac{4}{9}I$, donc $I + \frac{4}{9}I = \frac{1}{3} - \frac{2e^{-\frac{\pi}{3}}}{9}$, donc $\frac{13}{9}I = \frac{1}{3} - \frac{2e^{-\frac{\pi}{3}}}{9}$, d'où $I = \frac{9}{13} \left(\frac{1}{3} - \frac{2e^{-\frac{\pi}{3}}}{9} \right) = \frac{1}{13} (3 - 2e^{-\frac{\pi}{3}}) = \frac{3 - 2e^{-\frac{\pi}{3}}}{13}$.