

Limites

Exercice 1

Limites et interprétation graphique

Étudier les limites des fonctions suivantes. Interpréter graphiquement le résultat lorsque c'est possible.

1. $f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x}$ en $+\infty$

2. $f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x}$ en 0

3. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}$ en $+\infty$

4. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}$ en 0

5. $f(x) = -x^2 + 5x - 4$ en $+\infty$

6. $f(x) = \frac{2x - 5}{x^2 - 3x + 4}$ en $+\infty$

7. $f(x) = \frac{x^2 + x - 3}{(x - 1)^2}$ en 1

8. $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$ en 1

Correction exercice 1

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 1) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Donc, par limite de somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x + 1 + \frac{1}{x}\right) = +\infty$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} (2x + 1) = 1$

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$, donc, par limite de somme, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(2x + 1 + \frac{1}{x}\right) = +\infty$

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$, donc, par limite de somme, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(2x + 1 + \frac{1}{x}\right) = -\infty$

La droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe représentative de f .

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2}{x}\right) = 0$.

Donc, par limite de somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}\right) = 0$

La droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$.

4. On a une **F.I.** du type « $\infty - \infty$ ».

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x} = \frac{\sqrt{x} - 2}{x}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x} - 2) = -2$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x = 0^+$.

Donc, par limite de quotient, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{\sqrt{x} - 2}{x}\right) = -\infty$.

La droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe représentative de f .

5. On a une **F.I.** du type « $\infty - \infty$ ».

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, -x^2 + 5x - 4 = x^2 \left(-1 + \frac{5}{x} - \frac{4}{x^2} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{4}{x^2} = 0, \text{ donc, par limite de somme, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-1 + \frac{5}{x} - \frac{4}{x^2} \right) = -1$$

$$\text{De plus, } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty, \text{ donc, par limite de produit, } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(-1 + \frac{5}{x} - \frac{4}{x^2} \right) = -\infty$$

6. On a une **F.I.** du type « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \frac{2x - 5}{x^2 - 3x + 4} = \frac{x \left(2 - \frac{5}{x} \right)}{x^2 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2} \right)} = \frac{2 - \frac{5}{x}}{x \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2} \right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{5}{x} = 0, \text{ donc, par limite de somme, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{5}{x} \right) = 2.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x^2} = 0, \text{ donc, par limite de somme, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2} \right) = 1.$$

$$\text{Donc, par limite de produit et quotient, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 5}{x^2 - 3x + 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{5}{x}}{x \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2} \right)} = 0$$

La droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$.

7. $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x - 3) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)^2 = 0^+$

$$\text{Donc, par limite de quotient, } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 + x - 3}{(x - 1)^2} \right) = -\infty.$$

La droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à la courbe représentative de f .

8. On a une **F.I.** du type « $\frac{0}{0}$ ».

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \frac{(x + 2)(x - 1)}{x - 1} = x + 2$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 + x - 2}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 2) = 3$$

Exercice 2

Interprétation graphique

Donner l'interprétation graphique de chacune des proposition ci-dessous :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 4$

3. $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = +\infty$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$

4. $\lim_{\substack{x \rightarrow 6 \\ x > 6}} f(x) = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 6 \\ x < 6}} f(x) = +\infty$

Correction exercice 2

1. La courbe représentative de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 4$ au voisinage de $+\infty$.
ou
La droite d'équation $y = 4$ est asymptote à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$.
2. La courbe représentative de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = -3$ au voisinage de $-\infty$.
3. La courbe représentative de f admet une asymptote verticale d'équation $x = 5$.
4. La droite d'équation $x = 6$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de f .

Exercice 3

Composition des limites

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} e^{x^2+1}$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 3 + \frac{2}{x}}$

Correction exercice 3

1. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + 1 = 1$.
 $\lim_{X \rightarrow 1} e^X = e^1 = e$.
Donc par limite de composée, $\lim_{x \rightarrow 0} e^{x^2+1} = e$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 3 + \frac{2}{x} = +\infty$ par limite de somme.
 $\lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty$
Donc par limite de composée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 3 + \frac{2}{x}} = +\infty$

Exercice 4

Limites et théorèmes

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \cos(x)}{2x^3}$
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + 3 \sin(x)$

Correction exercice 4

1. $\forall x \in]0 ; +\infty[, -1 \leq \cos(x) \leq 1$, d'où $0 \leq 1 + \cos(x) \leq 2$.
En divisant par $2x^3 > 0$ sur $]0 ; +\infty[$, on obtient : $0 \leq \frac{1 + \cos(x)}{2x^3} \leq \frac{1}{x^3}$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$. Donc d'après le théorème des gendarmes, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \cos(x)}{2x^3} = 0$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin(x) \leq 1$.
En multipliant par $3 > 0$, on obtient $-3 \leq 3 \sin(x) \leq 3$, d'où $x^2 - 3 \leq x^2 + 3 \sin(x) \leq x^2 + 3$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - 3 = +\infty$ par limite de somme.
Puisque, $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 3 \leq x^2 + 3 \sin(x)$, on a, d'après le théorème de minoration, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + 3 \sin(x) = +\infty$

Exercice 5

Limites et croissances comparées

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - x^2 + 1$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 + 3}$

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 3x) e^x$

Correction exercice 5

1. On a une forme indéterminée du type « $\infty - \infty$ ».

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, e^x - x^2 + 1 = x^2 \left(\frac{e^x}{x^2} - 1 + \frac{1}{x^2} \right)$$

Par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$, donc, par limite de somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x^2} - 1 + \frac{1}{x^2} \right) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$, donc, par limite de produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{e^x}{x^2} - 1 + \frac{1}{x^2} \right) = +\infty$

2. On a une forme indéterminée du type « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{e^x}{x^2 + 3} = \frac{e^x}{x^2 \left(1 + \frac{3}{x^2} \right)} = \frac{e^x}{x^2} \times \frac{1}{1 + \frac{3}{x^2}}$$

D'une part, par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$

D'autre part, par limite de quotient et somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{3}{x^2}} = 1$

Donc, par limite de produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} \times \frac{1}{1 + \frac{3}{x^2}} = +\infty$

3. On a une forme indéterminée du type « $\infty \times 0$ ».

$$\forall x \in \mathbb{R}, (x^2 - 3x) e^x = x^2 e^x - 3x e^x$$

Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$

Donc, par limite de somme, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 3x) e^x = 0$.