

Correction

Exercice 1

5 points

Tous les détails des calculs doivent être écrits sur la copie

1. Écrire sans racine carrée au dénominateur l'expression : $A = \frac{1 + \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}}$

$$A = \frac{1 + \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} = \frac{(1 + \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})}{(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})} = \frac{3 + \sqrt{5} + 3\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2}{3^2 - \sqrt{5}^2} = \frac{3 + 4\sqrt{5} + 5}{9 - 5} = \frac{8 + 4\sqrt{5}}{4}$$

$$A = \frac{4(2 + \sqrt{5})}{4} = 2 + \sqrt{5}$$

2. Pour a et b deux réels tels que $a \neq 0$ et $b \neq 0$, simplifier au maximum l'expression :

$$B = \frac{a^2(-a)^3(-b^2)b^5a}{(-b)^4a^5(ab)^2}$$

Pour a et b deux réels tels que $a \neq 0$ et $b \neq 0$,

$$B = \frac{a^2(-a)^3(-b^2)b^5a}{(-b)^4a^5(ab)^2} = \frac{a^2 \times (-a^3) \times (-b^2) \times b^5 \times a}{b^4 \times a^5 \times a^2 \times b^2} = \frac{a^{2+3+1} \times b^{2+5}}{b^{4+2} \times a^{5+2}} = \frac{a^6 \times b^7}{b^6 \times a^7} = \frac{b}{a}.$$

3. Résoudre dans $] -\infty; -1[\cup] -1; +\infty[$ l'équation suivante : $x + 1 = \frac{9}{x + 1}$
Soit $x \in \mathbb{R}$, $x \neq -1$,

$$x + 1 = \frac{9}{x + 1} \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow x + 1 = 3 \text{ ou } x + 1 = -3$$

$$\Leftrightarrow x = 3 - 1 = 2 \text{ ou } x = -3 - 1 = -4$$

Les solutions sont 2 et -4.

4. Pour $x \neq \frac{1}{3}$, écrire sous la forme d'une seule fraction l'expression : $C = \frac{2x}{3x - 1} - 5$

$$\text{Pour } x \neq \frac{1}{3}, C = \frac{2x}{3x - 1} - 5 = \frac{2x}{3x - 1} - \frac{5(3x - 1)}{3x - 1} = \frac{2x - 15x + 5}{3x - 1} = \frac{-13x + 5}{3x - 1}$$

5. Soit $x \in \mathbb{R}$, factoriser au maximum l'expression : $D = x^2 - 4 - (x + 2)^2$

$$D = x^2 - 4 - (x + 2)^2 = (x - 2)(x + 2) - (x + 2)^2 = (x + 2)(x - 2 - (x + 2))$$

$$D = (x + 2)(x - 2 - x - 2) = (x + 2) \times (-4) = -4(x + 2)$$

Exercice 2

12 points

On s'intéresse à la gestion des déchets ménagers au sein d'une grande agglomération. Grâce au développement du recyclage, les experts estiment que la quantité de déchets de l'agglomération à incinérer devrait diminuer de 5%, par an. Par ailleurs, suite à la signature d'un contrat, cette agglomération s'engage à partir du 1^{er} janvier 2020 à collecter et incinérer 12 000 tonnes de déchets supplémentaires par an provenant d'une commune voisine. Durant l'année 2019, l'agglomération a incinéré 300 000 tonnes de déchets.

On admet que la situation peut être modélisée par une suite (u_n) dont le terme général u_n donne, pour tout entier naturel n , une estimation de la quantité (exprimée en millier de tonnes) de déchets incinérés durant l'année 2019 + n . On a ainsi $u_0 = 300$.

Partie A

1. a. Déterminer u_1 .

On retire 5 % à 300 000, cela donne 285 000 ; puis on ajoute 12 000 tonnes, ce qui fait un total de 297 000 tonnes en 2020. Donc $u_1 = 297$.

- b. Justifier, pour tout entier naturel n , que $u_{n+1} = 0,95u_n + 12$.

Retirer 5 %, c'est multiplier par $1 - \frac{5}{100} = 0,95$, puis on ajoute 12 milliers, donc pour tout entier n , $u_{n+1} = 0,95u_n + 12$.

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 240$.

- a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95 dont on précisera le premier terme v_0 .

- $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= u_{n+1} - 240 \\&= 0,95u_n + 12 - 240 \\&= 0,95(v_n + 240) - 228 \\&= 0,95v_n + 228 - 228 \\&= 0,95v_n\end{aligned}$$

- $v_0 = u_0 - 240 = 300 - 240 = 60$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,95$ et de premier terme $v_0 = 60$.

- b. Exprimer v_n en fonction de n pour tout entier naturel n .

Pour tout entier n , $v_n = v_0 \times q^n = 60 \times 0,95^n$

- c. En déduire, pour tout entier naturel n , que $u_n = 60 \times 0,95^n + 240$.

Pour tout entier naturel n , comme $u_n = v_n + 240$, on déduit que $u_n = 60 \times 0,95^n + 240$.

3. Déterminer u_{20} , à 10^{-2} près, et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

$$u_{20} = 60 \times 0,95^{20} + 240 \approx 261,51$$

En 2039, la quantité de déchets de l'agglomération à incinérer sera d'environ 261 510 tonnes

Partie B

L'agglomération s'est fixé l'objectif d'une diminution de la quantité de déchets incinérés de 15% d'ici 2039 par rapport à 2019.

1. Justifier que cet objectif ne sera pas atteint si la diminution des déchets suit les prévisions des experts.

On veut une baisse de 15 % par rapport à 2019, soit un tonnage de $300\,000 \left(1 - \frac{15}{100}\right) = 255\,000$ tonnes. Or $u_{20} > 255\,000$. L'objectif ne sera donc pas atteint.

2. a. Écrire, en python, une fonction `seuil()` qui renvoie l'année à partir de laquelle la quantité de déchets aura diminué de 15% par rapport à 2019

```
def seuil():  
    N=2019  
    U=300  
    while U>255:  
        N=N+1  
        U=0.95*U+12  
    return N
```

- b. En quelle année l'objectif sera-t-il atteint ?

En utilisant la table de la calculatrice, on obtient :

$u_{27} \approx 255,02 > 255$ et $u_{28} \approx 254,27 \leq 255$ donc l'objectif sera atteint en $2019 + 28$ soit en 2047.

Exercice 3

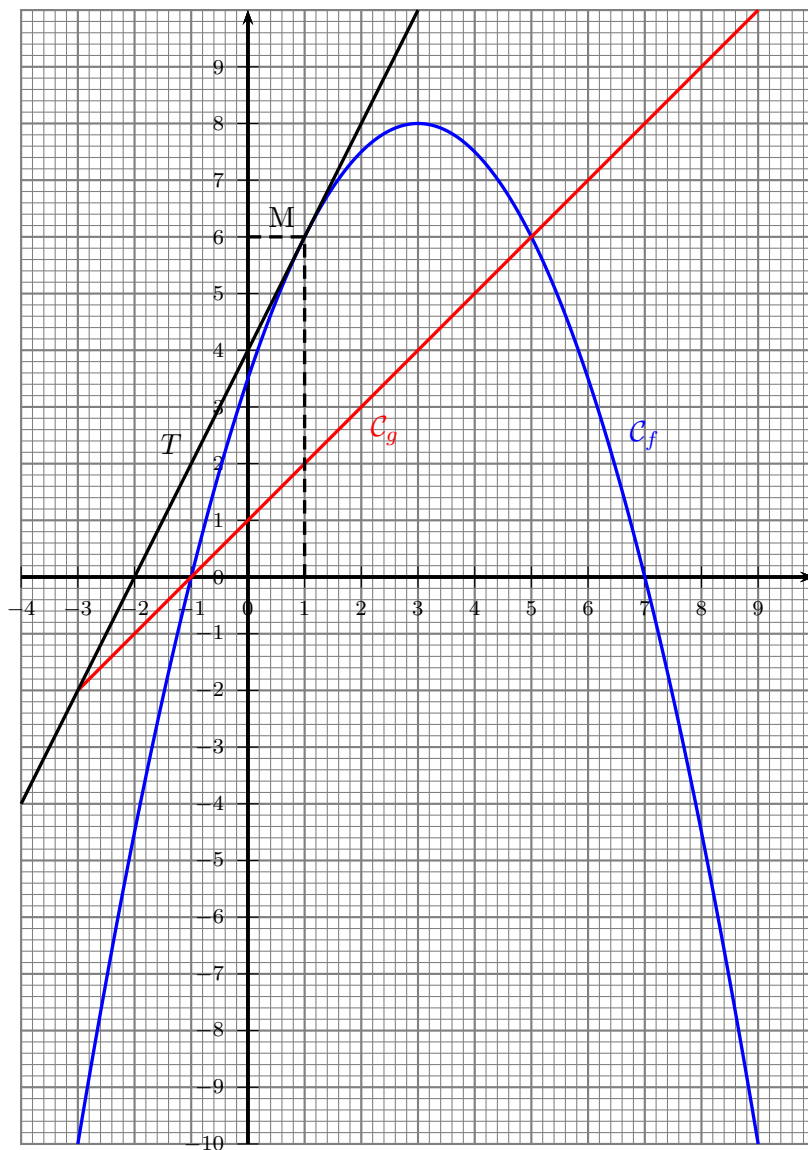
Les trois parties de l'exercice sont indépendantes

Partie 1

On a tracé dans le repère ci-dessous les représentations graphiques $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ de deux fonctions f et g

La droite T est la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point $M(1; 6)$.

La droite T passe par le point de coordonnées $(-2; 0)$.



Répondre ci-dessous aux questions suivantes par lecture graphique sans justification :

1. Résoudre l'inéquation $f(x) > 0$ sur l'intervalle $[-3; 9]$.
 $f(x) > 0$ quand la courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessus de l'axe des abscisses, donc $S =]-1; 7[$
2. Donner les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sur l'intervalle $[-3; 9]$.
Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sur l'intervalle $[-3; 9]$ sont les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de $\mathcal{C}_g$, soit $S = \{-1; 5\}$
3. Déterminer le coefficient directeur de la tangente T .
La tangente T passe par les points de coordonnées $(0; 4)$ et $(1; 6)$ donc le coefficient directeur de T est $a = \frac{6-4}{1-0} = 2$.

Partie 2

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer sur votre copie si l'affirmation est VRAIE ou FAUSSE en justifiant soigneusement votre réponse.

On étudie une fonction h définie sur l'intervalle $[-15 ; 20]$.

On donne ci-dessous le tableau de signe de sa fonction dérivée h' .

Valeur de x	-15	-5	4	20	
Signe de $h'(x)$	+	0	-	0	+

De plus, on sait que $h(-5) = 20$ et $h(4) = 2$.

Affirmation 1 : La fonction h est croissante sur l'intervalle $[4 ; 20]$. **VRAIE**

Sur l'intervalle $[4 ; 20]$, $h'(x) \geq 0$ donc la fonction h est croissante sur cet intervalle.

Affirmation 2 : L'équation réduite de la tangente à la représentation graphique de la fonction h au point d'abscisse $x = -7$ est $y = -3x + 5$. **FAUSSE**

Sur l'intervalle $[4 ; 20]$, $h'(x) \geq 0$ donc la fonction h est croissante sur cet intervalle.

Affirmation 3 : $h'(3)$ est négatif. **VRAIE**

Sur $[-5 ; 4]$ $h'(x) < 0$, et $3 \in [-5 ; 4]$ donc $h'(3) < 0$

Partie 3

On considère la fonction B définie sur l'intervalle $[-5 ; 5]$ par $B(x) = x^3 + 4x^2 - 3x$. On note B' la fonction dérivée de B .

- Pour x appartenant à l'intervalle $[-5 ; 5]$, déterminer $B'(x)$.

La fonction f est un polynôme de degré 3, donc dérivable sur $[-5 ; 5]$

$$\forall x \in [-5 ; 5], B'(x) = 3x^2 + 8x - 3$$

- Déterminer le tableau de variation de la fonction B sur l'intervalle $[-5 ; 5]$.

On résout, sur l'intervalle $[-5 ; 5]$, l'équation $3x^2 + 8x - 3 = 0$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \times 3 \times (-3) = 100 = 10^2$$

L'équation admet deux solutions : $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 + 10}{6} = \frac{1}{3}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 - 10}{6} = -3$

La dérivée $B'(x)$ est du signe de a , donc positive, à l'extérieur des racines.

$$f(-5) = -10, f(-3) = 10, f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{14}{27} \text{ et } f(5) = 210.$$

x	-5	-3	$\frac{1}{3}$	5	
signe de $B'(x)$	+	0	-	0	+
Variations de B	-10	18	$-\frac{14}{27}$	210	

Exercice 4

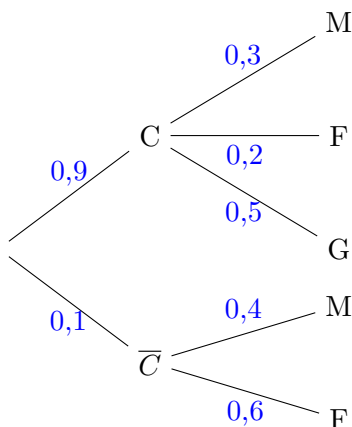
Un producteur de fruits rouges propose en vente directe des framboises, des groseilles et des myrtilles. Un client peut acheter, soit des barquettes de fruits à déguster, soit des barquettes de fruits à confiture. Le producteur a remarqué que, parmi ses clients, 9 sur 10 achètent une barquette de fruits à confiture.

Lorsqu'un client achète une barquette de fruits à confiture, la probabilité qu'il demande une barquette de myrtilles est de 0,3 et la probabilité qu'il demande une barquette de groseilles est de 0,5. Lorsqu'un client achète une barquette de fruits à déguster, il ne demande jamais des groseilles et demande des framboises dans 60 % des cas.

Un client achète une barquette. On note :

- C l'évènement " le client achète une barquette de fruits à confiture "
- F l'évènement " le client demande des framboises "
- G l'évènement " le client demande des groseilles "
- M l'évènement " le client demande des myrtilles "

1. Reporter les données de l'énoncé dans l'arbre de probabilité ci-dessous. On complètera l'arbre avec les réponses obtenues dans les questions suivantes :



2. a. Calculer la probabilité que le client demande des framboises sachant qu'il achète une barquette de fruit à confiture.
 $P_C(F) = 1 - (0,3 + 0,5) = 0,2$
b. Le client achète une barquette de fruits à déguster ; qu'elle est la probabilité qu'il demande des myrtilles ?
 $P_{\overline{C}}(M) = 1 - P_{\overline{C}}(F) = 1 - 0,6 = 0,4$
3. Montrer que la probabilité que le client achète une barquette de framboises est égale à 0,24.
 C et $\overline{C}$ forment une partition de l'univers, alors d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(F) &= P(C \cap F) + P(\overline{C} \cap F) \\ &= P(C) \times P_C(F) + P(\overline{C}) \times P_{\overline{C}}(F) \\ &= 0,9 \times 0,2 + 0,1 \times 0,6 \\ &= 0,18 + 0,06 \\ &= 0,24 \end{aligned}$$

4. Le client achète une barquette de framboises. Quelle est la probabilité que ce soit une barquette de fruits à confiture ?

$$P_F(C) = \frac{P(F \cap C)}{P(F)} = \frac{0,9 \times 0,2}{0,24} = \frac{0,18}{0,24} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4} = 0,75.$$

Sachant que le client achète une barquette de framboises, la probabilité que ce soit une barquette de fruits à confiture est 0,75

5. Le producteur vend 5 euros la barquette de fruits à confiture, quel que soit le fruit, 2 euros la barquette de framboises à déguster et 3 euros la barquette de myrtilles à déguster.
- a. On note x_i les valeurs possibles, en euros, du gain du producteur par barquette vendue et p_i leur probabilité. Compléter, sans justifier, le tableau suivant donnant la loi du gain du producteur par barquette vendue.

Valeur : x_i	5	2	3
Probabilité associée : p_i	0,9	0,06	0,04

- b. Calculer l'espérance de cette loi de probabilité

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \sum_{i=1}^3 x_i \times p_i \\
 &= 5 \times 0,9 + 2 \times 0,06 + 3 \times 0,04 \\
 &= 4,5 + 0,12 + 0,12 \\
 &= 4,74
 \end{aligned}$$

- c. Déterminer le gain en euros que le producteur peut espérer pour 150 barquettes vendues ?

Le résultat précédent montre que pour 150 barquettes vendues avec un gain moyen de 4,74 €, le gain sera de :

$$150 \times 4,74 = 711 \text{ (€)}.$$