

Corrigé DM n° 7 niv 2

EXERCICE 1

$$1. f_n = \frac{u}{v_n} \text{ avec } \begin{cases} u(x) = \ln x \\ v_n(x) = x^n \end{cases}.$$

$$f' = \left(\frac{u}{v_n} \right)' = \frac{u'v_n - uv'_n}{v_n^2} \text{ avec } \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'_n(x) = nx^{n-1} \end{cases}.$$

$$\text{Alors : } f'_n(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^n - nx^{n-1} \ln x}{x^{2n}} = \frac{x^{n-1}(1 - n \ln x)}{x^{2n}} = \frac{1 - n \ln x}{x^{2n-(n-1)}} = \boxed{\frac{1 - n \ln x}{x^{n+1}}}.$$

2. Pour tout entier $n > 0$, on admet que la fonction f_n admet un maximum sur l'intervalle $[1; 5]$.

On note A_n le point de la courbe $\mathcal{C}_n$ ayant pour ordonnée ce maximum.

L'abscisse x_n de A_n est la valeur pour laquelle $f'_n(x)$ s'annule, donc

$$1 - n \ln x_n = 0 \iff x_n = e^{\frac{1}{n}} \in [1; 5].$$

L'ordonnée de A_n est alors :

$$y_n = f_n(x_n) = \frac{\ln\left(e^{\frac{1}{n}}\right)}{\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n} = \frac{\frac{1}{n}}{e^1} = \frac{1}{e} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{e} \times \ln\left(e^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{e} \ln(x_n).$$

Les points A_n appartiennent donc à la courbe Γ d'équation $y = \frac{1}{e} \ln x$.

3. (a) Quel que soit x appartenant à l'intervalle $[1; 5]$, $0 \leq \ln x \leq \ln(5)$ car la fonction $\ln$ est croissante; en divisant par x^n positif, on trouve

$$0 \leq \frac{\ln x}{x^n} \leq \frac{\ln(5)}{x^n}.$$

$$(b) \int_1^5 \frac{1}{x^n} dx = \left[-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} \right]_1^5 = \frac{1}{n-1} \left[-\frac{1}{5^{n-1}} - (-1) \right] = \boxed{\frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{1}{5^{n-1}} \right)}.$$

- (c) f_n est continue et positive sur $[1; 5]$, donc l'aire cherchée est :

$$\mathcal{A}_n = \int_1^5 f_n(x) dx = \int_1^5 \frac{\ln x}{x^n} dx.$$

On sait que $0 \leq \frac{\ln x}{x^n} \leq \frac{\ln 5}{x^n}$ donc par conservation de l'ordre par intégration sur un intervalle,

$$\int_1^5 0 dx \leq \int_1^5 \frac{\ln x}{x^n} dx \leq \int_1^5 \frac{\ln 5}{x^n} dx = \ln 5 \int_1^5 \frac{1}{x^n} dx = \frac{\ln 5}{n-1} \left(1 - \frac{1}{5^{n-1}} \right).$$

$$5 > 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 5^{n-1} = +\infty \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5^{n-1}} \right) = 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln 5}{n-1} = 0.$$

Par produit : $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_n = 0}.$

EXERCICE 2 Partie A

1. • Si $x \in]0; 1[$ alors $-\ln x > 0$ • $\ln 1 = 0$ • Si $x \in]1; +\infty[$ alors $-\ln x < 0$

2. • Si $x > 1$ alors $1 - x < 0$ et $-\ln x < 0$ donc $1 - x - \ln x < 0$
• Si $x < 1$ alors $1 - x > 0$ et $-\ln x > 0$ donc $1 - x - \ln x > 0$

3. g est dérivable sur $I =]0; +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur I .

$$\forall x \in I, \quad g(x) = \left(-\frac{1}{x^2} \right) (\ln x) + \left(\frac{1}{x} - 1 \right) \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{1 - x - \ln x}{x^2}$$

Donc $g'(x)$ est du signe de $1 - x - \ln x$.

Ainsi : g est strict. croissante sur $]0; 1[$, stric. décroissante sur $]1; +\infty[$, et le maximum de g est $g(1) = 0$.

Partie B

1. g est **négative** et **continue** (car dérivable) sur I , donc sur tout intervalle de la forme $[n; n+1]$.

Donc U_n représente **l'opposé de l'aire, en unité d'aire du repère**, de la partie du plan située entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = n$, et $x = n+1$.

2. Soit un entier n non nul :

$$\text{Si } n \leq x \leq n+1$$

$$\text{alors } g(n+1) \leq g(x) \leq g(n) \quad \text{car } g \text{ est décroissante sur } [n; n+1]$$

3. D'où, par conservation de l'ordre par intégration sur un intervalle :

$$\int_n^{n+1} g(n+1) dx \leq \int_n^{n+1} g(x) dx \leq \int_n^{n+1} g(n) dx$$

$$g(n+1) \times [n+1 - n] \leq \int_n^{n+1} g(x) dx \leq g(n) \times [n+1 - n]$$

$$\text{Ainsi : } \boxed{g(n+1) \leq U_n \leq g(n)} \quad \text{pour tout entier } n \text{ non nul.}$$

4. On a donc pour tout entier n non nul :

$$g(n+1) \leq U_n \leq g(n)$$

$$\text{et } g(n+2) \leq U_{n+1} \leq g(n+1)$$

$$\text{d'où } U_{n+1} \leq g(n+1) \leq U_n \quad \text{ainsi } U \text{ est décroissante.}$$

5. Pour tout n non nul, on a : $U_n \leq g(n)$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} g(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \ln n = -\infty \quad \text{par produit}$$

$$\text{Donc par comparaison, on en déduit que : } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -\infty}$$