

## Corrigé DM n° 7 niv 1

### EXERCICE 1

#### Partie A

$f$  est définie sur  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{a}{1+e^{-bx}}$ .

$$1. A(0; 0,5) \in \mathcal{C}_f \iff f(0) = 0,5 \iff \frac{a}{1+e^{-b \times 0}} = 0,5 \iff \frac{a}{2} = \frac{1}{2} \iff a = 1.$$

On obtient alors, pour tout réel  $x \geq 0$ ,  $f(x) = \frac{1}{1+e^{-bx}}$ .

2. On admet que la fonction  $f$  est dérivable sur  $[0; +\infty[$ .

$f$  est de la forme  $\frac{1}{v}$  donc a pour dérivée  $-\frac{v'}{v^2}$ ,  
avec  $v(x) = 1 + e^{-bx}$  et  $v'(x) = -be^{-bx}$ .

$$\text{D'où : } f'(x) = \frac{be^{-bx}}{(1+e^{-bx})^2}$$

3. Déterminons  $b$ .

La droite  $(AB)$  est la tangente en  $A(0; 0,5)$ . Elle a pour coefficient directeur  $m$  égal à la dérivée de  $f$  en 0, à savoir  $m = f'(0) = \frac{b}{4}$ .

Par ailleurs, le coefficient directeur de cette droite peut se calculer par la formule  
 $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1 - 0,5}{10 - 0} = 0,05$ .

$$\text{Ainsi, } \frac{b}{4} = 0,05 \iff b = 4 \times 0,05 = 0,2. \text{ Finalement } f(x) = \frac{1}{1+e^{-0,2x}}.$$

#### Partie B

1. Cette proportion est  $p(10) = \frac{1}{1+e^{-2}} \approx 0,88$ .

2. (a) D'après la partie A,  $p$  est dérivable et sa dérivée est, en prenant  $b = 0,2$ ,

$$p'(x) = \frac{0,2e^{-0,2x}}{(1+e^{-0,2x})^2}$$

Pour tout réel  $x$  positif, on a  $0,2e^{-0,2x} > 0$  donc  $p'(x) > 0$  sur  $[0; +\infty[$ . Ainsi,  $p$  est strictement croissante sur  $[0; +\infty[$ .

$$(b) \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} (-0,2x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{par composée } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-0,2x} = 0$$

$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + e^{-0,2x} = 1.$$

Ainsi, on a, par quotient de limites,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = 1$ .

(c) Dans le contexte de l'énoncé, plus les années  $x$  s'écoulent, plus la proportion  $p(x)$  de personnes équipées augmentera jusqu'à atteindre les 100%. Ceci se traduit par la limite de la question précédente.

3. On cherche en quelle année  $x$  la proportion  $p(x)$  dépassera les 95%. Il suffit de trouver le plus petit entier  $x$  satisfaisant  $p(x) > 0,95$ . Or, on a

$$p(x) > 0,95 \iff \frac{1}{1+e^{-0,2x}} > 0,95$$

$$\iff 0,95(1+e^{-0,2x}) < 1$$

$$\iff 0,95e^{-0,2x} < 0,05$$

$$\iff e^{-0,2x} < \frac{0,05}{0,95}$$

$$\iff e^{-0,2x} < \frac{5}{95}$$

$$\iff e^{-0,2x} < \frac{1}{19}$$

$$\iff -0,2x < \ln \frac{1}{19}$$

$$\iff -0,2x < -\ln(19)$$

$$\iff x > \frac{\ln(19)}{0,2} \approx 14,7$$

la fonction  $\ln$  est strictement croissante

on divise par  $-0,2 < 0$ .

Ainsi, la saturation se produira au cours de l'année  $x = 15$ , donc en 2015.

$$4. (a) p(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{e^{0,2x}}} = \frac{1}{\frac{e^{0,2x} + 1}{e^{0,2x}}} = \frac{e^{0,2x}}{1 + e^{0,2x}}$$

$$(b) p(x) = \frac{e^{0,2x}}{1 + e^{0,2x}} = \frac{1}{0,2} \times \frac{0,2e^{0,2x}}{1 + e^{0,2x}} = 5 \times \frac{0,2e^{0,2x}}{1 + e^{0,2x}}.$$

Or une primitive de  $\frac{u'}{u}$  est  $\ln|u|$ , donc une primitive de  $p$  est donnée par la fonction  $P(x) = 5 \times \ln(1 + e^{0,2x})$  (car  $1 + e^{0,2x} > 0$ )

(c)

$$m = \frac{1}{2} \int_8^{10} p(x) dx = \frac{1}{2} [P(x)]_8^{10} = \frac{1}{2} \times 5 \times (\ln(1+e^2) - \ln(1+e^{1,6})) = \frac{5}{2} \ln\left(\frac{1+e^2}{1+e^{1,6}}\right) \approx 0,86.$$

## EXERCICE 2

1. — Comme  $x > 1$ , on a :  $x < x^2$   
 d'où :  $x + x^2 < 2x^2$   
 d'où :  $\frac{1}{2x^2} < \frac{1}{x + x^2}$   
 d'où :  $\frac{2\ln x}{2x^2} < \frac{2\ln x}{x + x^2}$  car  $\ln x > 0$  si  $x > 1$   
 d'où :  $\frac{\ln x}{x^2} < f(x)$   
 — Comme  $x > 1$ , on a :  $x < x^2$   
 d'où :  $2x < x + x^2$   
 d'où :  $\frac{1}{x + x^2} < \frac{1}{2x}$   
 d'où :  $\frac{2\ln x}{x + x^2} < \frac{2\ln x}{2x}$   
 d'où :  $f(x) < \frac{\ln x}{x}$  **d'où l'encadrement demandé.**

2. (a) Comme  $\frac{\ln x}{x} = \ln x \times \frac{1}{x} = u'(x)u(x)$ , avec  $u(x) = \ln x$

Or  $u'u$  a pour primitive  $\frac{1}{2}u^2$

$$\text{On a donc } I = \int_2^4 \frac{\ln x}{x} dx = \left[ \frac{1}{2} (\ln x)^2 \right]_2^4 = \frac{1}{2} [(\ln 4)^2 - (\ln 2)^2]$$

$$\text{D'où : } I = \frac{1}{2} [(2\ln 2)^2 - (\ln 2)^2] = \frac{3(\ln 2)^2}{2}.$$

- (b) Pour J, on intègre par parties en posant :

$$\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x^2} \\ v(x) = \ln x \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} u(x) = -\frac{1}{x} \\ v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$$

$u$  et  $v$  sont dérivables sur  $[2;4]$  et de dérivées continues, d'où :

$$J = \left[ -\frac{1}{x} \ln x \right]_2^4 - \int_2^4 \frac{-1}{x^2} dx = \left[ -\frac{1}{x} \ln x \right]_2^4 - \left[ \frac{1}{x} \right]_2^4$$

$$J = \left[ -\frac{1}{x} (\ln x + 1) \right]_2^4 = -\frac{1}{4} (\ln 4 + 1) + \frac{1}{2} (\ln 2 + 1) = -\frac{1}{4} (2\ln 2 + 1) + \frac{1}{2} (\ln 2 + 1) = \frac{1}{4}.$$

- (c) pour tout  $x > 1$ , on a :  $\frac{\ln x}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{\ln x}{x}$

D'où, par conservation de l'ordre par intégration sur l'intervalle  $[2;4]$  :

$$\int_2^4 \frac{\ln x}{x^2} dx \leq \int_2^4 f(x) dx \leq \int_2^4 \frac{\ln x}{x} dx$$

$$\text{Donc : } J \leq K \leq I \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{1}{4} \leq K \leq \frac{3(\ln 2)^2}{2}}.$$

3.  $f$  est positive sur  $[2;4]$ , donc  $\mathcal{A} = \int_2^4 f(x) dx = K$  en unité d'aire du repère.

Or l'unité d'aire vaut  $1 \times 4 = 4 \text{ cm}^2$ .  $\mathcal{A}$  est donc le quadruple de l'intégrale K.

Donc  $\boxed{1 \leq \mathcal{A} \leq 6(\ln 2)^2}$  en  $\text{cm}^2$  soit approximativement  $1 \leq \mathcal{A} \leq 2,883$