

Correction de la feuille de révisions des vacances d'avril

Pour réviser les suites et Python

Exercice 1

- a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = p_n + 11$ car à partir du 2^{ème} mètre, le creusement est facturé 11€ de plus que le mètre précédent donc (p_n) est une suite arithmétique de raison 11 et de 1^{er} terme $p_1 = 100$
b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = p_1 + (n - 1) \times r = 100 + (n - 1) \times 11 = 11n + 89$
c) $p_{15} = p_1 + 14 \times r = 100 + 14 \times 11 = 254$ Le prix facturé pour le creusement du 15^{ème} mètre est 254€.
- a) $S_{15} = p_1 + p_2 + \dots + p_{15} = 15 \times \frac{p_1 + p_{15}}{2} = 15 \times \frac{100 + 254}{2} = 2655$
b) S_{15} représente le prix facturé pour creuser les 15 premiers mètres c'est-à-dire 2655€.
- a) $n \times \frac{100 + p_n}{2} = 12\,051 \Leftrightarrow n \times \frac{100 + 11n + 89}{2} = 12\,051 \Leftrightarrow 11n^2 + 189n - 24102 = 0$
$$\Leftrightarrow n = \frac{-189 - \sqrt{1096209}}{22} = \frac{-618}{11} \notin \mathbb{N}^* \text{ ou } n = \frac{-189 + \sqrt{1096209}}{22} = 39 \in \mathbb{N}^*$$

(car $\Delta = 189^2 - 4 \times 11 \times (-24102) = 1096209 > 0$) donc la profondeur du forage est de 39m

b) programme Python :

```
n = 1
p = 100
S = p
while S != 12051 :
    n=n+1
    p=p+11
    S=S+p
print(n)
```

Exercice 2

- a) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \left(1 - \frac{20}{100}\right) \times u_n + 30 = 0,8u_n + 30$ car chaque année il y a 20% de vélos de l'année précédente qui sont inutilisables donc $\left(1 - \frac{20}{100}\right) \times u_n$ qui sont conservés et 30 sont rachetés donc se rajoutent à $\left(1 - \frac{20}{100}\right) \times u_n$
b) $u_1 = 0,8 \times u_0 + 30 = 0,8 \times 200 + 30 = 190$ donc il y aura 190 vélos dans ce parc au 1^{er} janvier 2024.
- a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 150 = 0,8u_n + 30 - 150 = 0,8u_n - 120 = 0,8(u_n - 150) = 0,8v_n$ et $v_0 = u_0 - 150 = 200 - 150 = 50$
donc (v_n) est une suite géométrique de raison 0,8 et de 1^{er} terme $v_0 = 50$
b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = 50 \times 0,8^n$
c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + 150 = 50 \times 0,8^n + 150$
d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} - u_n = 50 \times 0,8^{n+1} + 150 - 50 \times 0,8^n - 150 = 50 \times 0,8^n(0,8 - 1) = -0,2 \times 50 \times 0,8^n = -10 \times 0,8^n$$

Or, $-10 < 0$ et $0,8^n > 0$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n < 0$ donc (u_n) est strictement décroissante.
e) D'après la calculatrice, la suite (u_n) semble convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 150$
- a) Comme (u_n) est décroissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 150$ à partir d'un certain rang $u_n < 160$ donc le programme va s'arrêter
b) D'après le programme le service de location s'arrêtera lorsque $u_n < 160$ donc le nombre minimal de vélos qu'elle veut avoir pour continuer est donc 160.

c)

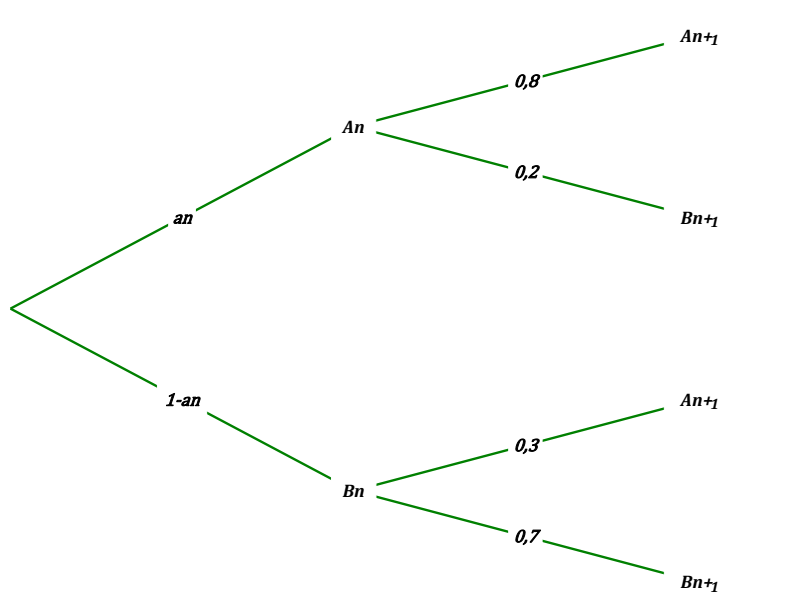
U	200	190	182	176	170	166	163	160	158
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8

d) Le service de location s'arrêtera le 1^{er} janvier 2023 + 8 = 2031

Pour réviser les probabilités conditionnelles et les suites

Exercice 3

1.



2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A_n et B_n forment une partition de l'univers, d'après la loi des probabilités totales

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= P(A_{n+1}) = P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) \\ &= a_n \times 0,8 + (1 - a_n) \times 0,3 = 0,8a_n - 0,3a_n + 0,3 = 0,5a_n + 0,3 \end{aligned}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} - a_n = 0,5a_n + 0,3 - a_n = -0,5a_n + 0,3$

$$0 \leq a_n \leq 0,6 \text{ donc } -0,5 \times 0,6 \leq -0,5 \times a_n \leq -0,5 \times 0$$

$$\text{donc } -0,5 \times 0,6 + 0,3 \leq -0,5 \times a_n + 0,3 \leq -0,5 \times 0 + 0,3 \text{ donc } 0 \leq a_{n+1} - a_n \leq 0,3$$

$$\text{donc pour tout } n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} - a_n \geq 0$$

Donc (a_n) est croissante.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = a_{n+1} - 0,6 = 0,5 \times a_n + 0,3 - 0,6 = 0,5a_n - 0,3 = 0,5(a_n - 0,6) = 0,5u_n$

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison 0,5 et de 1^{er} terme $u_1 = a_1 - 0,6 = 0,5 - 0,6 = -0,1$

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = u_1 \times q^{n-1} = -0,1 \times 0,5^{n-1}$

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = u_n + 0,6 = 0,6 - 0,1 \times 0,5^{n-1}$

7. D'après la calculatrice, on peut conjecturer que la limite de la suite a_n vaut 0,6. Au bout d'un nombre infini de parties, la probabilité que la nouvelle partie jouée soit de type A est de 0,6.

Pour réviser la dérivation et la fonction exponentielle

Exercice 4

1. a) g est dérivable sur $[0,5 ; 3]$ comme somme, produit et composée de fonctions dérivables sur $[0,5 ; 3]$. Pour tout $x \in [0,5 ; 3]$,

$$g'(x) = -6 \times e^{-x+2} + (10 - 6x) \times (-1) \times e^{-x+2} = -16e^{-x+2} + 6xe^{-x+2} = 2(3x - 8)e^{-x+2}$$

Or, $2 > 0$ et $e^{-x+2} > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $3x - 8$

b)

x	0,5	$\frac{8}{3}$	3
Signe de $g'(x)$	-	0	+
Variations de g	$7e^{1,5} + 2$	$-6e^{\frac{-2}{3}} + 2$	$-8e^{-1} + 2$
	$\searrow$		$\nearrow$

$$g(0,5) = (10 - 6 \times 0,5)e^{-0,5+2} + 2 = 7e^{1,5} + 2$$

$$g\left(\frac{8}{3}\right) = \left(10 - 6 \times \frac{8}{3}\right)e^{-\frac{8}{3}+2} + 2 = -6e^{\frac{-2}{3}} + 2$$

$$g(3) = (10 - 6 \times 3)e^{-3+2} + 2 = -8e^{-1} + 2$$

$$c) g(2) = (10 - 6 \times 2)e^{-2+2} + 2 = -2 + 2 = 0$$

d) g est décroissante sur $[0,5 ; 2]$ et $g(2) = 0$ donc sur $[0,5 ; 2]$, $g(x) \geq 0$

sur $\left[2 ; \frac{8}{3}\right]$ g est décroissante et $g(2) = 0$ donc sur $\left[2 ; \frac{8}{3}\right]$ $g(x) \leq 0$

sur $\left[\frac{8}{3} ; 3\right]$ g est croissante donc sur $\left[\frac{8}{3} ; 3\right]$, $g(x) \leq g(3) = -8e^{-1} + 2 < 0$
donc $g(x)$ positif sur $[0,5 ; 2]$ et $g(x)$ négatif sur $[2 ; 3]$

x	0,5	2	3
Signe de $g(x)$	+	0	-

2. a) f est dérivable sur $[0,5 ; 3]$ comme somme, produit et composée de fonctions dérivables sur $[0,5 ; 3]$. Pour tout $x \in [0,5 ; 3]$,

$$f'(x) = 6e^{-x+2} + (6x - 4) \times (-1)e^{-x+2} + 2 = (10 - 6x)e^{-x+2} + 2 = g(x)$$

b)

x	0,5	2	3
Signe de $f'(x) = g(x)$	+	0	-
Variations de f	$-e^{-1,5} + 1$	12	$14e^{-1} + 6$
	$\nearrow$		$\searrow$

$$f(0,5) = (6 \times 0,5 - 4)e^{-0,5+2} + 2 \times 0,5 = -e^{1,5} + 1 ; f(2) = (6 \times 2 - 4)e^{-2+2} + 2 \times 2 = 12$$

$$f(3) = (6 \times 3 - 4)e^{-3+2} + 2 \times 3 = 14e^{-1} + 6$$

c) f est croissante sur $[0,5 ; 2]$ puis décroissante sur $[2 ; 3]$

donc f admet un maximum en $x = 2$ qui vaut 12. Il faut donc extraire 2000 tonnes de minerai pour obtenir un bénéfice maximal de 1 200 000€.

Exercice 5

1. d est dérivable sur $[-5 ; 5]$ comme somme d'une fonction constante avec une fonction rationnelle dont le dénominateur $1 + t^2$ ne s'annule jamais.

$$\text{Pour tout } t \in [-5 ; 5], d'(t) = 0 + \frac{3(1+t^2) - (3t+4) \times 2t}{(1+t^2)^2} = \frac{3+3t^2-6t^2-8t}{(1+t^2)^2} = \frac{-3t^2-8t+3}{(1+t^2)^2}$$

2. Comme $(1 + t^2)^2 > 0$, $d'(t)$ est du signe de $-3t^2 - 8t + 3$

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \times (-3) \times 3 = 64 + 36 = 100 > 0$$

$$t_1 = \frac{8 - \sqrt{100}}{2 \times (-3)} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3} \text{ et } t_2 = \frac{8 + \sqrt{100}}{2 \times (-3)} = \frac{18}{-6} = -3$$

t	-5	-3	$\frac{1}{3}$	5
Signe de $d'(x)$	-	0	+	-
Variations de d	$\frac{15}{26}$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
		$\frac{1}{2}$	$\frac{11}{2}$	$\frac{45}{26}$

$$d(-5) = 1 + \frac{3 \times (-5) + 4}{1 + (-5)^2} = \frac{15}{26}; d(-3) = 1 + \frac{3 \times (-3) + 4}{1 + (-3)^2} = \frac{1}{2}; d\left(\frac{1}{3}\right) = 1 + \frac{3 \times \frac{1}{3} + 4}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{11}{2}; d(5) = 1 + \frac{3 \times 5 + 4}{1 + 5^2} = \frac{45}{26}$$

3. d est décroissante sur $[-5 ; -3]$ et sur $\left[\frac{1}{3} ; 5\right]$ et est croissante sur $\left[-3 ; \frac{1}{3}\right]$

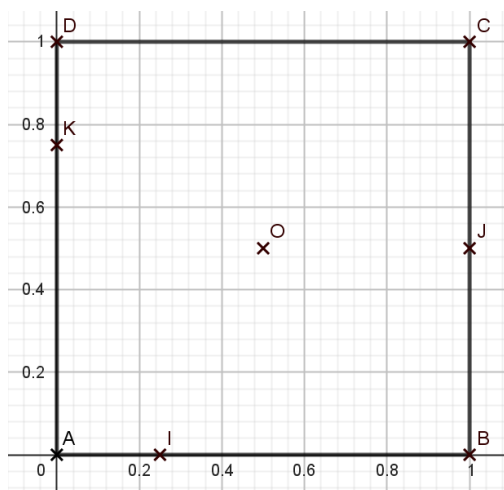
De plus $d(-5) < d\left(\frac{1}{3}\right)$ donc d admet un maximum qui vaut $\frac{11}{2}$ atteint en $t = \frac{1}{3}$ donc pour une température de $\frac{1}{3} \approx 1,3^\circ$ le débit de la pompe sera de 5,5 litres par seconde.

Pour réviser les produits scalaires

Exercice 6

Partie A

1.



2. $\overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{BJ} = DK \times BJ \times \cos(\pi) = -DK \times BJ = \frac{-1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{-1}{8}$
 car $\overrightarrow{DK}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont colinéaires de sens contraire
 $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ car $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont orthogonaux car les diagonales d'un carré sont perpendiculaires
 $\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ}) \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{AD}$
 $= 0 + BJ \times AD \times \cos(0) = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$ car $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux et $\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires de même sens
 3. $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{IC} = (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DK}) \cdot (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{IB} + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{BC} + 0 + 2\overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} + 2 \times \left(\frac{-1}{8}\right)$
 $= -1 \times \frac{3}{4} + 0 + 0 + 1 \times 1 - \frac{1}{4} = 0$

car $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{IB}$ sont colinéaires de sens contraire, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{IB}$ sont orthogonaux, $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux et $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires de même sens

Comme $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{IC} = 0$, $\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{IC}$ sont orthogonaux donc (BK) et (IC) sont perpendiculaires.

Partie B

1. Dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, $A(0 ; 0)$, $B(1 ; 0)$, $C(1 ; 1)$, $D(0 ; 1)$, $O\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$, $I\left(\frac{1}{4} ; 0\right)$, $J\left(1 ; \frac{1}{2}\right)$, $K\left(0 ; \frac{3}{4}\right)$
 2. $\overrightarrow{BK}(x_K - x_B ; y_K - y_B) = \left(-1 ; \frac{3}{4}\right)$ et $\overrightarrow{IC}(x_C - x_I ; y_C - y_I) = \left(\frac{3}{4} ; 1\right)$
 3. $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{IC} = -1 \times \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \times 1 = 0$