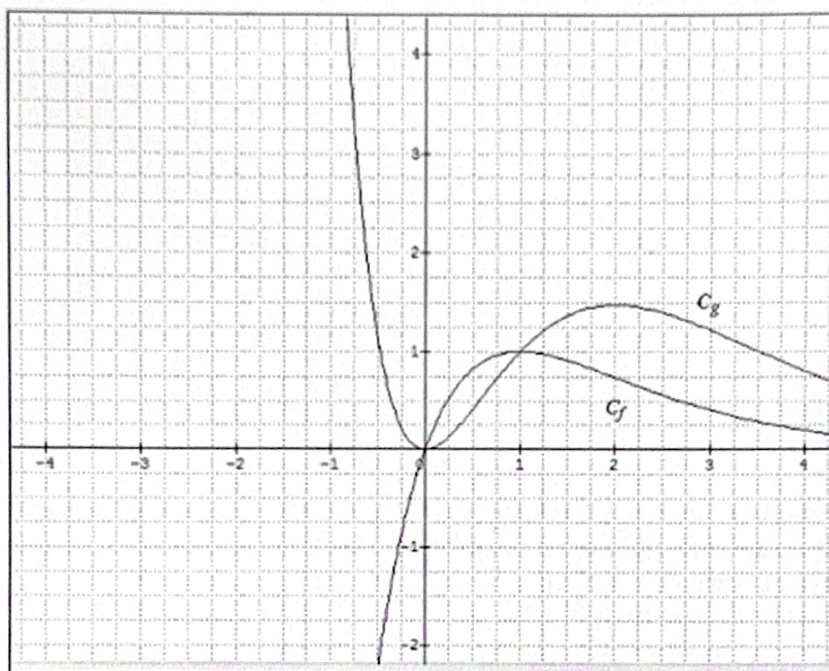


Exercice 1.

Les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ci-dessous représentent les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{1-x}$ et $g(x) = x^2e^{1-x}$.

On définit $I_0 = \int_0^1 e^{1-x} dx$ et pour tout entier n naturel non nul, on définit l'intégrale I_n par $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$.



1) Calcul d'intégrales et d'aire plane.

- Montrer que $I_0 = e - 1$.
- A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier naturel n , $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$.
- Compléter la fonction Python ci-dessous qui permet de déterminer le terme de rang n de la suite (I_n) où n est un entier naturel non nul choisi par l'utilisateur.

```
def I(n):
    I=.....
    for i in range(.....):
        I=.....
    return I
```

2) Calcul d'une aire plane.

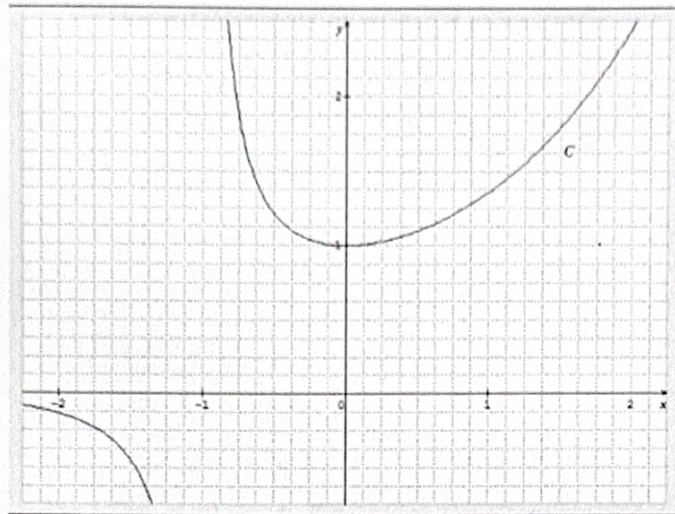
- Etudier la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sur $\mathbb{R}$.
- On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan délimitée par $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations respectives : $x = 0$ et $x = 1$. Démontrer que $\mathcal{A} = 3 - e$.

Exercice 2.

- Soit k un réel strictement négatif. Résoudre l'équation $2ke^{2x} + 1 = 0$ d'inconnue x .
Soit f une fonction dérivable solution de l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = y^2$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
- Justifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Montrer que g est une solution d'une équation différentielle de type $y' = ay + b$ où a et b deux réels à déterminer.
- En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).

Exercice 3.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$ et l'intégrale $I = \int_0^1 f(x) dx$.
On a représenté ci-dessous la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction f dans un repère orthonormé.



1)

- Donner une interprétation graphique du nombre I . On la fera apparaître sur le graphique.
- Déterminer graphiquement un encadrement de I d'amplitude 1.
- Etudier le sens de variation de f sur $[0; 1]$.
- Soit n un entier naturel non nul. On pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

- Justifier que pour tout entier naturel k compris entre 0 et $n-1$,

$$\frac{1}{n} \times f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} \times f\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

- En déduire $\frac{1}{n} S_n \leq I \leq \frac{1}{n} T_n$

- On considère les fonctions Python ci-contre qui permettent de déterminer les valeurs de $\frac{S_n}{n}$ et $\frac{T_n}{n}$ où n est un entier naturel non nul choisi par l'utilisateur.

```
from math import *
def f(x):
    return exp(x)/(x+1)

def bornes_inf_sup(n):
    T=0
    S=0
    for k in range(n):
        S=S+f(k/n)
        T=T+f((k+1)/n)
    return S/n, T/n
```

On choisit $n = 3$. Recopier et compléter le tableau d'étapes ci-dessous :

Etapes	S (Valeur exacte)	T (Valeur exacte)
Initialisation		
$k = 0$		
$k = 1$		
$k = 2$		

Quel est le résultat affiché ? (On arrondira les résultats à 0,01 près).