

Ex 1 ① Dénombrement "sans ordre"

a) Timothée choisit 5 musées parmi 11

Nombre de combinaisons $\binom{11}{5} = \underline{462}$

b) Visite exactement 2 musées d'art

$\binom{7}{2} \times \binom{4}{3} = \underline{84}$

↑
choix de 2 musées d'art parmi 7

↑
choix de 3 musées de sciences parmi 4

c) Visite d'au moins un musée sciences

1^{ère} méthode de dénombrement

$$N = \underbrace{\binom{4}{1} \times \binom{7}{4}}_{\text{visites avec 1 musée scienc.}} + \underbrace{\binom{4}{2} \times \binom{7}{3}}_{\text{... avec 2 ...}} + \underbrace{\binom{4}{3} \times \binom{7}{2}}_{\text{... avec 3 ...}} + \underbrace{\binom{4}{4} \times \binom{7}{1}}_{\text{... avec 4 ...}}$$

$$N = 140 + 210 + 84 + 7 = \underline{441}$$

2^{ème} méthode plus efficace

au moins un musée science = contraire de "aucun"

donc $N = \underbrace{\binom{11}{5}}_{\text{toutes les visites possibles}} - \underbrace{\binom{7}{5}}_{\text{visites sans aucun musée science}} = 462 - 21 = 441$

② Dénombrement de visites ordonnées.

a) le choix des 5 musées est fait

Il y a donc 5! façons possibles de visiter les 5 musées soit 120

↳ nombre de permutations de 5 musées

(N.B. on peut aussi parler "maladroïtement" du nombre d'arrangements de 5 musées parmi 5 : $A_5^5 = 5 \times 4 \times 3 \times \dots \times 1$)

b) le choix des 5 musées n'est pas encore fait.

On cherche alors le nombre d'arrangements de 5 musées parmi 11

En effet définir une visite revient à remplir une grille à 5 cases c'est à dire créer une 5-liste ou un 5-uplet, sans répétition car on ne visite pas 2 fois le même musée.

Nombre de visites possibles : $A_{11}^5 = 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 = \frac{11!}{(11-5)!} = \underline{55\,440}$

variante classique :

Timothée choisit 5 musées parmi 11 → $\binom{11}{5}$ combinaisons

puis il décide de l'ordre des visites → 5! permutations

donc le nombre de visites possibles est $\binom{11}{5} \times 5! = \frac{11!}{5! \cdot 6!} \times 5!$

$$= \frac{11!}{6!} = A_{11}^5 = \underline{55\,440}$$

c) Timothée choisit 2 musées qu'il visitera le même jour, dans une liste choisie de 5 musées.

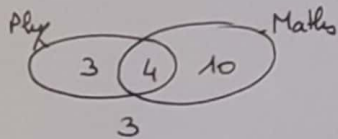
Nombre de visites possibles $\binom{5}{2} \times 4! = \underline{240}$

choix des 2 musées à visiter le même jour permutation des 4 visites journalières

↳ c'est comme si Timothée "agrafait" 2 tickets d'entrée pour se retrouver avec 4 tickets à permutation

Ex 2 Partie A

Diagramme de Venn



Nombre de groupes de 4 élèves comportant 2 élèves qui n'aiment que les Maths et 2 qui n'aiment que la Physique $\rightarrow \binom{10}{2} \times \binom{3}{2} = \frac{10 \times 9}{2} \times \frac{3 \times 2}{2} = \underline{135}$

Partie B

- ① ... est donné par $\binom{15}{6}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{tirage d'une "main" de 6 boules simultanément} \\ \rightarrow \text{pas d'ordre} \end{array} \right.$
- ② ... de s'installer sur ces chaises est donné par $P_{15}^6 = 15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 = \frac{15!}{(15-6+1)!}$

en effet cela revient à créer une 6-liste dans un ensemble à 15 éléments sans répétition.

On attribue un numéro de chaise à chaque élève

- ③ nombre de "rajets" différents est 3^7 .
c'est le nombre de 7-listes ou 7-uplets de l'ensemble A^7 avec $A = \{V, O, R\}$
 $\swarrow \quad \quad \quad \nwarrow$
 vert orange rouge
 produit cartésien $A \times A \times \dots \times A$
 $\text{Card}(A^7) = (\text{Card } A)^7$

Partie C

$$1. \frac{(n+2)!}{(n+1)!} - \frac{(n+1)!}{n!} = (n+2) - (n+1) = 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

2. relation de Pascal.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tq $n \geq 2$ et $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{(n-1)! \times k}{k(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)! \times (n-k)}{k!(n-k-1)!(n-k)!} \\ &= \frac{(n-1)! \cdot k + (n-1)! \cdot (n-k)}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{(n-1)! \cdot [k + (n-k)]}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)! \cdot n}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} \end{aligned}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$.

$$\binom{n}{3} = \binom{n}{n-1} \Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1} = n \quad \text{NB } \binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n-1)(n-2)}{6} = 1 \quad \text{car } n \neq 0$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 3n + 2 = 6$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 3n - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = 4 \text{ ou } n = -1$$

ou $n \in \mathbb{N}$ d'où $n = 4$

EXERCICE 3

- $Li'(t) + Ri(t) = U \iff 0,2i'(t) + 100i(t) = 10$
 $\iff i'(t) + 500i(t) = 50$
 $\iff i'(t) = -500i(t) + 50$
 $\iff i$ est solution de (E) : $y' = -500y + 50$
- Les solutions de (E) sont toutes les fonctions de la forme :

$$t \mapsto Ce^{-500t} - \frac{50}{-500} = Ce^{-500t} + \frac{1}{10} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$
- $i(t) = Ce^{-500t} + \frac{1}{10}$
 $i(0) = 0 \iff Ce^0 + \frac{1}{10} = 0 \iff C = -\frac{1}{10}.$

Ainsi on a : $i(t) = -\frac{1}{10}e^{-500t} + \frac{1}{10} = \frac{1}{10}(1 - e^{-500t})$
 - $$\left. \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow +\infty} -500t = -\infty \\ \lim_{T \rightarrow -\infty} (e^T) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-500t} = 0 \quad \text{par composée.}$$

D'où par somme et produit $\lim_{t \rightarrow +\infty} i(t) = \frac{1}{10}$
 - $\forall t \in [0; +\infty[, i'(t) = \frac{1}{10}(-(-500)e^{-500t}) = 50e^{-500t}$

Donc $i'(t) > 0$ sur $[0; +\infty[$. Ainsi i est strict. croissante sur $[0; +\infty[$.
 - $i(t) \geq 0,095 \iff \frac{1}{10}(1 - e^{-500t}) \geq 0,095$
 $\iff 1 - e^{-500t} \geq 0,95$
 $\iff e^{-500t} \leq 0,05$
 $\iff -500t \leq \ln 0,05 \quad \text{car } \ln \text{ est croissante}$
 $\iff t \geq -\frac{\ln 0,05}{500}$

$$t_1 = -\frac{\ln 0,05}{500} \approx 0,006 \text{ s}$$
- Equation de T : $y = i'(0)(t - 0) + i(0)$ donc $y = 50t$

L'asymptote à $\mathcal{C}$ est la droite d'équation $y = \frac{1}{10}$ car $\lim_{t \rightarrow +\infty} i(t) = \frac{1}{10}$

$$50t = \frac{1}{10} \iff t = \frac{1}{500} = 0,002 \quad \text{donc } I(0,002; 0,1)$$

EXERCICE 4

- Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes sur l'ensemble I donné :

 - $f(x) = (4x + 3)e^{4x^2 + 6x}$

On sait que $u'e^u$ a pour primitive e^u

$$f(x) = (4x + 3)e^{4x^2 + 6x} = \frac{1}{2}(8x + 6)e^{4x^2 + 6x} = \frac{1}{2}u'(x)e^{u(x)}$$

donc $F(x) = \frac{1}{2}e^{4x^2 + 6x}$
 - $g(x) = \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{x} \times \ln x = u'(x)u(x) \quad \text{avec } u(x) = \ln x$

D'où $G(x) = \frac{1}{2}u^2(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2$
 - $h(x) = \frac{2x}{7 - 3x^2}$

On sait que $\frac{u'}{u}$ a pour primitive $\ln|u|$

$$h(x) = \frac{1}{-3} \times \frac{-6x}{7 - 3x^2} = \frac{-1}{3} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Donc $H(x) = \frac{-1}{3} \ln|7 - 3x^2| = \frac{-1}{3} \ln(7 - 3x^2) \quad \text{car } 7 - 3x^2 > 0 \text{ sur } [0; 1].$
- Résoudre une équation différentielle de la forme $y' = f$ revient à déterminer toutes les primitives de la fonction f .

 - Soit $f(x) = \frac{6x}{\sqrt{x^2 + 3}}$

On sait que $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ a pour primitive $2\sqrt{u}$

$$f(x) = \frac{6x}{\sqrt{x^2 + 3}} = 3 \times \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 3}}$$

Donc les solutions sur I de l'équation différentielles sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto 6\sqrt{x^2 + 3} + C \quad (C \in \mathbb{R})$$
 - Soit $g(x) = x(-4x^2 + 5)^4$

On sait que $u' u^4$ a pour primitive $\frac{1}{5}u^5$

$$g(x) = x(-4x^2 + 5)^4 = -\frac{1}{8} \times (-8x)(-4x^2 + 5)^4$$

Donc les solutions sur I de l'équation différentielles sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto -\frac{1}{8} \times \frac{1}{5}(-4x^2 + 5)^5 + C = -\frac{1}{40}(-4x^2 + 5)^5 + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

(c) Soit $j(x) = \frac{x^3}{(x^4+1)^3} = x^3(x^4+1)^{-3}$

On sait que $u' u^n$ a pour primitive $\frac{1}{n+1} u^{n+1}$ (pour $n \neq -1$)

donc $u' u^{-3}$ a pour primitive $\frac{1}{-3+1} u^{-3+1} = \frac{-1}{2} u^{-2}$

Or $j(x) = x^3(x^4+1)^{-3} = \frac{1}{4} \times (4x^3)(x^4+1)^{-3}$

Donc les solutions sur I de l'équation différentielles sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \frac{1}{4} \times \frac{-1}{2} (x^4+1)^{-2} + C = \frac{-1}{8(x^4+1)^2} + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

(d) Soit $h(x) = \frac{1}{x \ln x} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$

On sait que $\frac{u'}{u}$ a pour primitive $\ln|u|$

Donc les solutions sur I de l'équation différentielles sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \ln|\ln x| + C = \ln(\ln x) + C \quad (C \in \mathbb{R}) \quad (\text{car } \ln x \geq 0 \text{ sur } [1; +\infty[)$$

3. Soit Φ définie sur $I =]2; +\infty[$ par $\Phi(x) = \frac{x+13}{(x+3)(2-x)}$.

(a) $\forall x \in I, \frac{a}{x+3} + \frac{b}{2-x} = \frac{a(2-x)}{(x+3)(2-x)} + \frac{b(x+3)}{(2-x)(x+3)} = \frac{(b-a)x+2a+3b}{(2-x)(x+3)}$.

D'où par identification avec $\Phi(x) = \frac{x+13}{(x+3)(2-x)}$:

$$\begin{cases} b-a &= 1 \\ 2a+3b &= 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b &= 1+a \\ 2a+3(1+a) &= 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b &= 1+a \\ 5a &= 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= 2 \\ b &= 3 \end{cases}$$

Donc, pour tout x de I : $\Phi(x) = \frac{2}{x+3} + \frac{3}{2-x} = 2 \times \frac{1}{x+3} - 3 \times \frac{-1}{2-x}$

(b) Les primitives de la fonction Φ sur $I =]2; +\infty[$ sont donc les fonctions de la forme :

$$x \mapsto 2\ln|x+3| - 3\ln|2-x| + C = 2\ln(x+3) - 3\ln(x-2) + C \quad (C \in \mathbb{R})$$