

Le but de l'exercice est de démontrer que l'équation (E):  $e^x = \frac{1}{x}$  admet une unique solution réelle et de construire une suite qui converge vers cette solution.

### Partie A.

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x - e^x$ .

1. Démontrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation  $f(x) = 0$  pour  $x \neq 0$ .
2. Calculer la limite de  $f$  en  $+\infty$  puis en  $-\infty$ .
3. Etudier les variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
4. Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $\mathbb{R}$ .
5. Vérifier que  $\alpha \in [\frac{1}{2}; 1]$ .
6. Quel est le signe de  $f$  sur l'intervalle  $[0; \alpha]$  ?

### Partie B.

Soit la fonction  $g$  définie sur  $[0; 1]$  par :

$$g(x) = \frac{1+x}{1+e^x}$$

1. Calculer  $g'(x)$  et montrer que :

$$g'(x) = -\frac{e^x f(x)}{(1+e^x)^2}$$

2. En déduire les variations de  $g$  sur  $[0; \alpha]$ .
3. Montrer que l'équation (E) est équivalente à  $g(x) = x$  avec  $x \neq 0$ .
4. On considère la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_0 = 0$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = g(u_n)$ .  
Démontrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :
$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$$
5. En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente vers  $\alpha$ .
6. Ecrire une fonction Python   $U(n)$  qui renvoie la valeur de  $u_n$ .
7. Déterminer une valeur approchée de  $u_4$  arrondie à la sixième décimale.