

- 21** (w_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$w_n = \frac{2^n}{n}.$$

a) Expliquer pourquoi pour tout entier naturel $n \geq 1$, $w_n > 0$.

b) Vérifier que pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{2n}{n+1}.$$

c) Comparer $2n$ et $n+1$. En déduire le sens de variation de la suite (w_n) .

- 22**  (t_n) est la suite définie par $t_0 = -2$ et pour tout entier naturel n , $t_{n+1} = \frac{1}{2}t_n + \frac{5}{2}$.

a) Tabuler la suite (t_n) à l'aide de la calculatrice. Conjecturer son sens de variation.

b) Utiliser un raisonnement par récurrence pour démontrer cette conjecture.

Pour les exercices 23 à 28, utiliser la méthode de son choix pour étudier le sens de variation de la suite (u_n) .

- 23** (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{e^{2n}}{5^{n+2}}$.

- 24** (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = 1 - \frac{2}{n+3}.$$

- 25** (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = e^n - n.$$

- 26** (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{n!}{n^n}$.

- 27** (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :
- $$u_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2.$$

- 28** (u_n) est la suite géométrique de raison $\frac{3}{2}$ telle que $u_0 = -1$.

- 32** (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{4n-2}{3n+1}.$$

a) Déterminer une fonction f définie sur $[0; +\infty[$ telle que pour tout entier naturel n , $u_n = f(n)$.

b) Étudier les variations de la fonction f sur $[0; +\infty[$. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

c) Donner un majorant et un minorant de la suite (u_n) .

- 33** (u_n) est la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 3$.

Utiliser un raisonnement par récurrence pour démontrer que la suite (u_n) est minorée par $\frac{1}{2}$ et majorée par 5.

- 53** (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{30n}{25+n}$.

a) Montrer que la suite (u_n) est majorée par 30.

b) Quel est le sens de variation de (u_n) ?

c) La suite (u_n) est-elle convergente ?

- 54** (u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n \times e^{-u_n}$.

a) Démontrer par récurrence que tous les termes de la suite sont strictement positifs.

b) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

- 59**  (w_n) est la suite définie par $w_0 = 0$ et pour tout entier naturel n , $w_{n+1} = \sqrt{2w_n + 3}$.

1. a) Afficher à l'écran de la calculatrice la représentation graphique de la suite (w_n) (fenêtre : $0 \leq X \leq 4$, pas 1 et $0 \leq Y \leq 4$, pas 1).

b) Conjecturer :

- la monotonie de la suite (w_n) ;
- un majorant ou un minorant de la suite (w_n) ;
- la limite de la suite (w_n) .

2. a) Déterminer une fonction f telle que pour tout entier naturel n , $w_{n+1} = f(w_n)$.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 3]$.

c) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $0 \leq w_{n+1} \leq w_n \leq 3$.

d) En déduire la convergence de la suite (w_n) .

e) À l'aide de la calculatrice, déterminer la plus petite valeur de n telle que $w_n > 2,999$.

- 60** (t_n) est la suite définie par $t_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , $t_{n+1} = 5 - \frac{6}{t_n + 3}$.

a) Démontrer que pour tout entier naturel n ,

$$1 \leq t_n \leq 2.$$

b) Justifier que pour tout entier naturel n ,

$$t_{n+1} - t_n = -\frac{(t_n - 1)^2}{t_n + 3}.$$

En déduire le sens de variation de la suite (t_n) .

c) Expliquer pourquoi la suite (t_n) converge.

80 Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse en justifiant. Si elle est fausse, proposer un contre-exemple.

- a) Si une suite tend vers $+\infty$, alors elle est croissante.
- b) Une suite non minorée a pour limite $-\infty$.
- c) Toute suite strictement croissante a pour limite $+\infty$.
- d) Toute suite décroissante a pour limite $-\infty$.

84 (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

- a) Prouver que pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-3n-2}{n(2n+2)(2n+1)}.$$

- b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .
- c) Démontrer que la suite (u_n) converge.

85 (v_n) est la suite définie par $v_0 = 0,5$ et pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = \frac{2v_n}{\sqrt{v_n^2 + 1}}$.

- a) Préciser une fonction f telle que pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = f(v_n)$.

Étudier les variations de f sur $[0; +\infty[$.

- b) Démontrer que pour tout entier naturel n ,

$$0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq 2.$$

- c) En déduire que (v_n) converge et donner un encadrement de sa limite.

- d) La suite (v_n) converge-t-elle vers 2 ? Justifier.

41 Déterminer, en justifiant, la limite de chacune des suites définies sur $\mathbb{N}$ par :

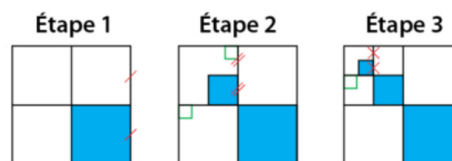
a) $u_n = 4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$ b) $v_n = 10^{-3} \times \left(\frac{5}{3}\right)^n$ c) $t_n = -\left(\frac{9}{4}\right)^n$

43 (v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{3^{n+1}}{2^n}$. Étudier la limite de la suite (v_n) .

44 On lance n fois de suite un dé bien équilibré et on note p_n la probabilité d'obtenir au moins une fois la face 6.

- a) Exprimer p_n en fonction de n .
- b) Étudier la limite de la suite (p_n) .

47 À l'intérieur d'un carré de côté 8, on construit une suite de carrés et on les colorie comme indiqué sur la figure ci-dessous.



On poursuit ainsi la construction et pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note S_n l'aire, en unité d'aire, de la partie colorée en bleu à l'étape n .

- a) On note c_n l'aire du nouveau carré construit à l'étape n . Exprimer c_n en fonction de n .

b) Montrer que $S_n = \frac{64}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \right]$.

- c) Quelle est la limite de la suite (S_n) ?

69 Algo python

On construit une spirale en disposant bout à bout des diagonales d'une suite de carrés. À chaque étape, le côté du carré est divisé par 2 ; à l'étape 1, il est égal à 1.



On note L_n la longueur de la spirale à l'étape n , avec $n \geq 1$. Ainsi, $L_1 = \sqrt{2}$.

- 1. a) Expliquer pourquoi la suite (c_n) des côtés des carrés successifs est géométrique. Préciser sa raison.

- b) Exprimer c_n en fonction de n .

- 2. a) Exprimer L_n en fonction de $c_1, c_2, \dots, c_n$.

- b) Justifier que pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$L_n = 2\sqrt{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right].$$

- c) Déterminer la limite de la suite (L_n) .

- 3. a) Écrire un algorithme afin de déterminer le rang n à partir duquel $2\sqrt{2} - L_n < 10^{-p}$ (avec $p \in \mathbb{N}$).

- b) Coder cet algorithme en langage Python, le saisir et l'exécuter avec $p = 6$.

83 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right).$$

1. a) Déterminer la fonction dérivée de f et vérifier que pour tout réel $x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})}{2x^2}.$$

b) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^*$.

2. (u_n) est la suite définie par $u_0 = \frac{3}{2}$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n ,

$$\sqrt{2} < u_{n+1} < u_n \leq \frac{3}{2}.$$

b) En déduire que la suite (u_n) converge.

c) Démontrer que pour tout entier n ,

$$u_{n+1} - \sqrt{2} < \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{2}).$$

d) En déduire par récurrence que pour tout entier naturel n ,

$$0 < u_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^n}(u_0 - \sqrt{2}).$$

e) En déduire la limite de la suite (u_n) .

76 Partie A

(u_n) est la suite définie par son premier terme u_0 et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = au_n + b$$

où a et b sont des nombres réels non nuls, $a \neq 1$.

1. a) Déterminer une suite (c_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $c_n = k$ (avec k nombre réel) telle que pour tout entier naturel n ,

$$c_{n+1} = ac_n + b.$$

b) On note (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - k$. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison a .

2. En déduire que si a appartient à l'intervalle $] -1 ; 1[$, alors la suite (u_n) a pour limite $\frac{b}{1-a}$.

Partie B

En mars 2020, Max achète une plante verte mesurant 80 cm. On lui conseille de la tailler tous les ans, au mois de mars, en coupant un quart de sa hauteur. La plante poussera alors de 30 cm au cours des douze mois suivants. Dès qu'il rentre chez lui, Max taille sa plante.

1. Quelle sera la hauteur de la plante en mars 2021 avant que Max ne la taille à nouveau ?

2. Pour tout entier naturel n , on note h_n la hauteur de la plante, en cm, avant sa taille, en mars de l'année $(2020 + n)$.

a) Justifier que, pour tout entier naturel n ,

$$h_{n+1} = 0,75 h_n + 30.$$

b) La suite (h_n) est-elle convergente ? Justifier.

94 Étudier la moyenne d'une somme

Raisonner Calculer

(u_n) est la suite définie par $u_0 = -1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 2$.

a) Démontrer que pour tout entier naturel n ,

$$u_n = 4 - 5 \left(\frac{1}{2} \right)^n.$$

b) On pose pour tout entier naturel n ,

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n.$$

Déterminer la limite de la suite $\left(\frac{S_n}{n} \right)$.

103 Suite du type $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 4$, $u_1 = 14$ et pour tout entier naturel n par la relation **(1)** :

$$u_{n+2} = 6u_{n+1} - 8u_n.$$

a) Calculer les termes u_2 , u_3 , u_4 et u_5 .

b) Démontrer qu'il existe exactement deux suites géométriques du type (r^n) satisfaisant à la relation **(1)** avec $r \neq 0$.

On note r_1 et r_2 les raisons de ces suites avec $r_1 < r_2$.

c) En utilisant les valeurs r_1 et r_2 obtenues, vérifier que quels que soient les réels A et B , la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = Ar_1^n + Br_2^n$ satisfait à la relation **(1)**.

d) Déterminer les réels A et B pour que la suite (v_n) vérifie les conditions initiales $v_0 = 4$ et $v_1 = 14$.

e) On admet qu'il existe une seule suite vérifiant **(1)** et les conditions initiales données ; dans ces conditions, pour tout entier naturel n , $u_n = v_n$.

À l'aide de l'expression de u_n en fonction de n , déterminer la limite de la suite (u_n) .

91 Imaginer une stratégie

Chercher Raisonner

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, u_n est le nombre obtenu en juxtaposant successivement les nombres entiers $1, 2, \dots, n$ après la virgule. Ainsi, $u_1 = 0,1$; $u_2 = 0,12$; $u_{11} = 0,1234567891011$.

Montrer que la suite (u_n) est convergente.