

Éléments de réponses

1. Déterminer la limite en $-\infty$ de la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 + 2}{1 - x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty \quad (\text{limite d'une rationnelle en l'infini}).$$

2. Déterminer la limite en $+\infty$ de $g(x) = \frac{\sin(2x+3)}{x-8}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(2x+3)}{x-8} ?$$

On encadre $\sin(2x+3)$ entre -1 et 1 ensuite on divise par $x-8 > 0$ au voisinage de $+\infty$. Pour $x > 8$, on obtient $-\frac{1}{(x-8)} \leq \frac{\sin(2x+3)}{x-8} \leq \frac{1}{(x-8)}$.

Mais $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{(x-8)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x-8)} = 0$ donc par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(2x+3)}{x-8} = 0.$$

3. Déterminer la limite en 2 de $h(x) = \frac{2x+5}{4-x^2}$? h est définie sur $] -\infty ; -2[\cup] -2 ; 2[\cup] 2 ; +\infty[$. On doit calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} h(x)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} h(x)$ et pour cela on a besoin du signe de $4 - x^2$.

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$4 - x^2$		+	0	-
		0	-	0
			0	+

D'une part $\lim_{x \rightarrow 2} (2x+5) = 9$ et d'autres part $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} (4 - x^2) = 0^-$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} (4 - x^2) = 0^+$.

Par quotient $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} h(x) = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} h(x) = +\infty$.

4. Déterminer la limite en 0 et en $+\infty$ de $k(x) = \frac{e^{2x} - e^x}{x}$

a) Limite en 0 : On factorise pour lever l'indétermination : $\frac{e^{2x} - e^x}{x} = \frac{e^x(e^x - 1)}{x} = e^x \times \frac{e^x - 1}{x}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) = 1 \quad (\text{voir cours, par la dérivabilité de la fonction exp en 0}) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1.$$

$$\text{Par produit} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{2x} - e^x}{x} \right) = 1.$$

b) Limite en $+\infty$: On factorise pour lever l'indétermination : $\frac{e^{2x} - e^x}{x} = \frac{e^x(e^x - 1)}{x} = \frac{e^x}{x} \times (e^x - 1)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \text{par croissance comparée} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 1) = +\infty. \quad \text{Par produit} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = +\infty.$$

5. Déterminer la limite en $+\infty$ de $i(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-2}{3x+1}$.

On doit factoriser pour lever l'indétermination : Pour $x > 0$, $\frac{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - \frac{2}{x}\right)}{x\left(3+\frac{1}{x}\right)} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - \frac{2}{x}}{3+\frac{1}{x}}$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x} = 1$, par composition $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right) = 1$.

Aussi $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0$, par somme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - \frac{2}{x}\right) = 1$.

Mais $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{1}{x}\right) = 3$, ainsi par quotient $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2+1}-2}{3x+1}\right) = \frac{1}{3}$.

6. Déterminer la limite en $-\infty$ et $+\infty$ de $j(x) = x - \sqrt{x^2 + 1}$

a) Limite en $+\infty$: on doit lever l'indétermination en $-\infty$ en multipliant par la forme conjuguée à savoir : $x + \sqrt{x^2 + 1}$.

On obtient $j(x) = x - \sqrt{x^2 + 1} = \frac{(x - \sqrt{x^2 + 1})(x + \sqrt{x^2 + 1})}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x^2 - x^2 - 1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{-1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{x^2 + 1}) = +\infty$, par composition et somme.

Enfin, par quotient $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}\right) = 0^-$.

b) Limite en $-\infty$: aucune indétermination n'est en vue. En effet, d'une part $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ et d'autre part $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + 1 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$, par composition on obtient

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$. Enfin par produit (on a multiplié par -1) et somme $\lim_{x \rightarrow -\infty} x - \sqrt{x^2 + 1} = -\infty$.

7. Déterminer la limite en -1 de $r(x) = \frac{2x+2}{x^2-2x-3}$. Par les opérations, on tombe sur une F.I : 0/0

On factorise $2x + 2 = 2(x + 1)$ et $x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$.

Pour tout réel $x \neq -1$, on obtient $r(x) = \frac{2(x+1)}{(x+1)(x-3)} = \frac{2}{x-3}$ en simplifiant par $(x + 1)$ non nul.

$\lim_{x \rightarrow -1} x - 3 = -4$ et par quotient $\lim_{x \rightarrow -1} r(x) = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$.

8. Etudier la continuité en 0 de la fonction t définie par :
$$\begin{cases} t(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ t(0) = 0 \end{cases}$$

Il suffit de vérifier si $\lim_{x \rightarrow 0} t(x) = t(0)$? avec les opérations sur les limites on tombe sur F-I : 0/0

On lève l'indétermination en constatant que $t(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ est un taux d'accroissement entre 0 et x d'une fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - 1$ avec $f(0) = 1$. La dérivabilité de f en 0 (car composée et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$). Ainsi, par définition, $\lim_{x \rightarrow 0} t(x) = f'(0)$.

Mais, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ et donc $f'(0) = 1$. Soit, $\lim_{x \rightarrow 0} t(x) = 1$. Sauf que $t(0) = 0$ différent de 1.

La fonction t n'est pas continue en 0