

Correction – Interrogation n°1 – Sujet A

Calculatrice interdite – Compléter sur le sujet

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 4$.

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n + 2$.

On notera P_n la proposition « $u_n = 3^n + 2$ ».

- Initialisation : Pour $n = 0$:

D'une part, $u_0 = 3$.

D'autre part, $3^0 + 2 = 1 + 2 = 3$.

Donc $u_0 = 3^0 + 2$. Ainsi, P_0 est vraie. **2 pts**

- Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que P_k est vraie i.e. $u_k = 3^k + 2$.

Montrons alors que P_{k+1} est vraie i.e. $u_{k+1} = 3^{k+1} + 2$.

$$\begin{aligned} \text{On a } u_{k+1} &= 3u_k - 4 && \text{par définition de la suite } (u_n) \\ &= 3(3^k + 2) - 4 && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= 3 \times 3^k + 6 - 4 \\ &= 3^{k+1} + 2 \end{aligned}$$

Ainsi, P_{k+1} est vraie. **4 pts**

- Conclusion : La proposition P_n est vraie au rang $n = 0$ et est héréditaire.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n + 2$. **2 pts**

Correction – Interrogation n°1 – Sujet B

Calculatrice interdite – Compléter sur le sujet

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 4u_n + 6$.

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 4^n - 2$.

On notera P_n la proposition « $u_n = 4^n - 2$ ».

- Initialisation : Pour $n = 0$:

D'une part, $u_0 = -1$.

D'autre part, $4^0 - 2 = 1 - 2 = -1$.

Donc $u_0 = 4^0 - 2$. Ainsi, P_0 est vraie. **2 pts**

- Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que P_k est vraie i.e. $u_k = 4^k - 2$.

Montrons alors que P_{k+1} est vraie i.e. $u_{k+1} = 4^{k+1} - 2$.

$$\begin{aligned} \text{On a } u_{k+1} &= 4u_k + 6 && \text{par définition de la suite } (u_n) \\ &= 4(4^k - 2) + 6 && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= 4 \times 4^k - 8 + 6 \\ &= 4^{k+1} - 2 \end{aligned}$$

Ainsi, P_{k+1} est vraie. **4 pts**

- Conclusion : La proposition P_n est vraie au rang $n = 0$ et est héréditaire.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 4^n - 2$. **2 pts**