

Correction – Devoir surveillé n°1

Calculatrice autorisée – La qualité de la rédaction est prise en compte dans la notation

Exercice 1 : 9,25 points

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_{n+1} = 0,6u_n + 0,1$ avec $u_1 = 0,05$.

Question de programmation :

Compléter la fonction Python **u** ci-dessous, de paramètre n , afin qu'elle renvoie la valeur de u_n .

```
def u(n):  
    U = 0.05  
    for k in range(1, n):  
        U = 0.6*U + 0.1  
    return U
```

1,5 pt

L'objectif est maintenant de déterminer de deux façons différentes l'expression de u_n en fonction de n .

Les méthodes 1 et 2 sont indépendantes (*ne pas utiliser le résultat de la méthode 1 dans la méthode 2*).

Méthode 1 :

Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$: $u_n = -0,2 \times 0,6^{n-1} + 0,25$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note P_n la proposition $u_n = -0,2 \times 0,6^{n-1} + 0,25$.

- Initialisation : Pour $n = 1$:

D'une part, $u_1 = 0,05$.

D'autre part, $-0,2 \times 0,6^{1-1} + 0,25 = -0,2 \times 0,6^0 + 0,25 = -0,2 + 0,25 = 0,05$.

Donc $u_1 = -0,2 \times 0,6^{1-1} + 0,25$. Ainsi, P_1 est vraie. 1,25 pt

- Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons que P_k est vraie i.e. $u_k = -0,2 \times 0,6^{k-1} + 0,25$.

Montrons alors que P_{k+1} est vraie i.e. $u_{k+1} = -0,2 \times 0,6^k + 0,25$.

$$\begin{aligned}\text{On a } u_{k+1} &= 0,6u_k + 0,1 && \text{par définition de la suite } (u_n) \\ &= 0,6(-0,2 \times 0,6^{k-1} + 0,25) + 0,1 && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= 0,6 \times (-0,2) \times 0,6^{k-1} + 0,6 \times 0,25 + 0,1 \\ &= -0,2 \times 0,6^k + 0,15 + 0,1 \\ &= -0,2 \times 0,6^k + 0,25\end{aligned}$$

Ainsi, P_{k+1} est vraie. 3 pts

- Conclusion : La proposition P_n est vraie au rang $n = 1$ et est héréditaire.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = -0,2 \times 0,6^{n-1} + 0,25$. 0,5 pt

Méthode 2 :

Soit (a_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $a_n = u_n - 0,25$.

1. Montrer que la suite (a_n) est géométrique dont on précisera la raison.

$$\begin{aligned}a_n &= u_n - 0,25 \quad (*) \quad \text{donc} \quad a_{n+1} = u_{n+1} - 0,25 \\ &= 0,6u_n + 0,1 - 0,25 && \text{(en utilisant la déf. de la suite } (u_n)) \\ &= 0,6(a_n + 0,25) - 0,15 && \text{car } u_n = a_n + 0,25 \text{ d'après } (*) \\ &= 0,6a_n + 0,6 \times 0,25 - 0,15 \\ &= 0,6a_n\end{aligned}$$

Ainsi, la suite (a_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,6$. 2

2. En déduire l'expression de a_n en fonction de n , puis celle de u_n en fonction de n .

D'après la question précédente, $a_n = a_1 \times q^{n-1}$ (attention, a_0 n'est pas défini car $n \in \mathbb{N}^*$) avec $q = 0,6$.

Or $a_1 = u_1 - 0,25 = 0,05 - 0,25 = -0,2$.

Ainsi, $a_n = -0,2 \times 0,6^{n-1}$.

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = a_n + 0,25 = -0,2 \times 0,6^{n-1} + 0,25$. **1**

Exercice 2 : 10,75 points

Soit f la fonction définie sur $[-1; 3]$ par $f(x) = \frac{3-5x}{2x-10}$

1. Dresser le tableau de variations de f sur $[-1; 3]$.

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$\text{où } \begin{cases} u(x) = 3 - 5x & \text{et} \\ u'(x) = -5 \end{cases} \quad \begin{cases} v(x) = 2x - 10 \\ v'(x) = 2 \end{cases}$$

Donc f est dérivable sur $[-1; 3]$ et pour tout $x \in [-1; 3]$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v(x)^2} \\ &= \frac{-5(2x-10) - 2(3-5x)}{(2x-10)^2} \\ &= \frac{-10x+50-6+10x}{(2x-10)^2} \\ &= \frac{44}{(2x-10)^2} \end{aligned}$$

2 pts

Comme $(2x-10)^2 > 0$ car $x \neq 5$, alors pour tout $x \in [1; 3]$, $f'(x) > 0$.

Ainsi,

x	-1	3
Variations de f	$-\frac{2}{3}$	3

$$f(-1) = \frac{3-5 \times (-1)}{2 \times (-1) - 10} = \frac{8}{-12} = -\frac{2}{3}$$

$$f(3) = \frac{3-5 \times 3}{2 \times 3 - 10} = \frac{-12}{-4} = 3$$

1,5 pt

Attention, on ne pouvait pas se baser sur le graphique pour répondre à cette question 1 car le graphique n'est introduit que plus tard dans l'exercice.

Dans le repère ci-contre, on a représenté la courbe représentative de la fonction f , et la droite d'équation $y = x$.

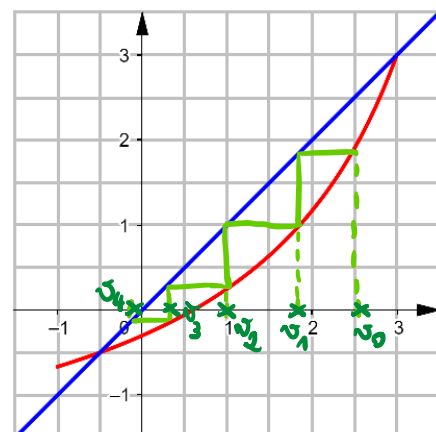
On considère la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$v_{n+1} = f(v_n) \text{ avec } v_0 = \frac{5}{2}$$

2. a. Sur l'axe des abscisses, construire les termes v_0, v_1, v_2, v_3 et v_4 et laisser apparaître les traits de constructions. **1,5 pt**

b. Quel semble être la limite de cette suite ?

Il semble que la limite de cette suite vaut $-\frac{1}{2}$. **0,5 pt**



3. a. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-\frac{1}{2} \leq v_{n+1} \leq v_n \leq \frac{5}{2}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note P_n la proposition $-\frac{1}{2} \leq v_{n+1} \leq v_n \leq \frac{5}{2}$.

- Initialisation : Pour $n = 0$:

D'une part, $v_0 = \frac{5}{2}$.

D'autre part :

$$v_1 = f(v_0) = f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3 - 5 \times \frac{5}{2}}{2 \times \frac{5}{2} - 10} = \frac{-\frac{19}{2}}{-5} = \frac{19}{10}$$

On a bien $-\frac{1}{2} \leq v_1 \leq v_0 \leq \frac{5}{2}$ donc P_0 est vraie. **1,25 pt**

- Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que P_k est vraie i.e. $-\frac{1}{2} \leq v_{k+1} \leq v_k \leq \frac{5}{2}$.

Montrons alors que P_{k+1} est vraie i.e. $-\frac{1}{2} \leq v_{k+2} \leq v_{k+1} \leq \frac{5}{2}$.

On a par hypothèse de récurrence :

$$-\frac{1}{2} \leq v_{k+1} \leq v_k \leq \frac{5}{2}$$

Comme f est croissante sur $[-1; 3]$, alors :

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) \leq f(v_{k+1}) \leq f(v_k) \leq f\left(\frac{5}{2}\right)$$

Or :

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3 - 5 \times \left(-\frac{1}{2}\right)}{2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - 10} = \frac{\frac{11}{2}}{-11} = -\frac{1}{2} \quad ; \quad f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{19}{10} \quad ; \quad f(v_{k+1}) = v_{k+2} \quad \text{et} \quad f(v_k) = v_{k+1}$$

On a donc :

$$-\frac{1}{2} \leq v_{k+1} \leq v_k \leq \frac{19}{10} \leq \frac{5}{2}$$

donc

$$-\frac{1}{2} \leq v_{k+1} \leq v_k \leq \frac{5}{2}$$

Ainsi, P_{k+1} est vraie. **3 pts**

- Conclusion : La proposition P_n est vraie au rang $n = 0$ et est héréditaire.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-\frac{1}{2} \leq v_{n+1} \leq v_n \leq \frac{5}{2}$. **0,5 pt**

b. Que peut-on en déduire concernant les variations de la suite (v_n) ?

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} \leq v_n$ alors la suite (v_n) est décroissante. **0,5 pt**

Exercice bonus : + 0,75 point

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n + 2$ est divisible par 3.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note P_n la proposition $4^n + 2$ est divisible par 3 (c'est-à-dire multiple de 3).

- Initialisation : Pour $n = 0$:

$4^0 + 2 = 1 + 2 = 3$ est bien un multiple de 3.

Donc P_0 est vraie.

- Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que P_k est vraie i.e. qu'il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $4^k + 2 = 3m$.

Montrons alors que P_{k+1} est vraie i.e. $4^{k+1} + 2$ est un multiple de 3.

$$4^{k+1} + 2 = 4 \times 4^k + 2 \quad \text{attention : } 4 \times 4^k + 2 \neq 4 \times (4^k + 2) = 4 \times 3m$$

Or, par hypothèse de récurrence, $4^k + 2 = 3m$ donc $4^k = 3m - 2$.

$$\text{Donc } 4^{k+1} + 2 = 4 \times (3m - 2) + 2 = 4 \times 3m - 8 + 2 = 3 \times 4m - 6 = 3 \underbrace{(4m - 2)}_{\in \mathbb{Z}}$$

Donc $4^{k+1} + 2$ est un multiple de 3 d'où P_{k+1} est vraie.

- Conclusion : La proposition P_n est vraie au rang $n = 0$ et est héréditaire.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n + 2$ est divisible par 3.