

Correction – Devoir surveillé n°5

NOM et Prénom : Classe :

Calculatrice autorisée – La qualité de la rédaction est prise en compte dans la notation

Exercice 1 : 5 points

- a. Vrai ou Faux ? Justifier. L'équation $\ln(6x - 1) + \ln(2x - 1) = \ln(x)$ admet deux solutions dans $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} 6x - 1 > 0 \\ 2x - 1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{6} \\ x > \frac{1}{2} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1}{2} \quad \text{Il faut donc résoudre cette équation dans } \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[.$$

$$\begin{aligned} \ln(6x - 1) + \ln(2x - 1) &= \ln(x) \\ \Leftrightarrow \ln((6x - 1)(2x - 1)) &= \ln(x) \\ \Leftrightarrow (6x - 1)(2x - 1) &= x \\ \Leftrightarrow 12x^2 - 6x - 2x + 1 - x &= 0 \\ \Leftrightarrow 12x^2 - 9x + 1 &= 0 & \text{0,75 pt} \\ \Delta = (-9)^2 - 4 \times 12 \times 1 &= 81 - 48 = 33 \end{aligned}$$

$\Delta > 0$ donc cette équation admet deux solutions dans $\mathbb{R}$ mais pas forcément dans $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$:

$$\begin{array}{l|l} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} & x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ = \frac{9 - \sqrt{33}}{24} & = \frac{9 + \sqrt{33}}{24} \\ \simeq 0,14 & \simeq 0,61 \end{array}$$

On remarque que $x_1 \notin \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$ et que $x_2 \in \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$.

Ainsi, dans $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$, l'équation admet une seule solution. **0,75 pt**

L'affirmation est donc fausse.

- b. Résoudre l'inéquation $(3 \ln(x) - 5)(e^x - 4) > 0$.

Étudions le signe de chaque facteur dans l'intervalle $]0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} 3 \ln(x) - 5 > 0 &\Leftrightarrow \ln(x) > \frac{5}{3} \Leftrightarrow x > e^{\frac{5}{3}} \\ e^x - 4 > 0 &\Leftrightarrow e^x > 4 \Leftrightarrow x > \ln(4) \end{aligned}$$

On a donc le tableau de signe suivant :

x	0 $\ln(4)$ $e^{\frac{5}{3}}$ $+\infty$				
Signe de $-x^2 + 2x + 3$	—		—	0 +	
Signe de $-x + 10$	—	0	+		+
Signe de $B(x)$	+	0	—	0	+

Ainsi, l'ensemble de solution est :

$$\mathcal{S} =]0; \ln(4)[\cup \left] e^{\frac{5}{3}}; +\infty \right[$$

1,5 pt

- c. On considère la fonction f définie sur $]5; +\infty[$ par $f(x) = x + \ln\left(\frac{x-5}{2x-1}\right)$. On note f' sa dérivée. Déterminer l'expression de $f'(x)$ puis la réduire sous la forme d'un seul quotient.

$$f(x) = x + \ln(u(x))$$

$$\text{où } \left| \begin{array}{l} u(x) = \frac{x-5}{2x-1} = \frac{w(x)}{v(x)} \\ \text{donc } u(x) = \frac{w'(x)v(x) - v'(x)w(x)}{v(x)^2} \end{array} \right. \text{ avec } \left| \begin{array}{l} w(x) = x-5 \quad \text{donc } w'(x) = 1 \\ v(x) = 2x-1 \quad \text{donc } v'(x) = 2 \end{array} \right.$$

$$= \frac{1 \times (2x-1) - 2(x-5)}{(2x-1)^2} = \frac{9}{(2x-1)^2}$$

Ainsi, pour tout $x \in]5; +\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \frac{u'(x)}{u(x)} \\ &= 1 + \frac{\frac{9}{(2x-1)^2}}{\frac{x-5}{2x-1}} \\ &= 1 + \frac{9}{(2x-1)^2} \times \frac{2x-1}{x-5} \\ &= \frac{(2x-1)(x-5)}{(2x-1)(x-5)} + \frac{9}{(2x-1)(x-5)} \\ &= \frac{2x^2 - 10x - x + 5 + 9}{(2x-1)(x-5)} \\ &= \frac{2x^2 - 11x + 14}{(2x-1)(x-5)} \end{aligned}$$

2 pt

Exercice 2 : 8,5 points

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x + 2 - x \ln(x)$.

1. Etudier les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 2) = 2$ et par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$

Ainsi, par différence, $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 2$ 0,5 pt

- Pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$g(x) = x \left(1 - \frac{2}{x} - \ln(x) \right)$$

D'une part, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

D'autre part, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x} \right) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x} - \ln(x) \right) = -\infty$

Ainsi, par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$. 0,75 pt

2. Dresser le tableau de variations de la fonction g .

$$g(x) = x + 2 - u(x) \times v(x)$$

$$\text{où } \left| \begin{array}{l} u(x) = x \quad \text{donc } u'(x) = 1 \\ v(x) = \ln(x) \quad \text{donc } v'(x) = \frac{1}{x} \end{array} \right.$$

g est donc dérivable sur $x \in]0; +\infty[$ et on a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 + 0 - (u'(x)v(x) - v'(x)u(x)) \\ &= 1 - 1 \times \ln(x) - \frac{1}{x} \times x \\ &= 1 - \ln(x) - 1 \\ &= -\ln(x) \end{aligned}$$

0,75 pt

Puis $g'(x) > 0 \Leftrightarrow -\ln(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) < 0 \Leftrightarrow x < e^0 \Leftrightarrow x < 1$

0,75 pt

x	0	1	α	$+\infty$
signe de $g'(x)$	+	0		-
variations de g		2	3	$-\infty$

question 3 $\leftrightarrow$ rouge

$$g(1) = 1 + 2 - 1 \times \ln(1) = 3$$

3. a. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]0; +\infty[$.

• Sur $]0; 1[$:

D'après le tableau de variations, pour tout $x \in]0; 1[$, $g(x) > 2$ donc $g(x) > 0$.

L'équation $g(x) = 0$ n'admet donc pas de solution sur $]0; 1[$. 0,5 pt

• Sur $[1; +\infty[$:

$$\left| \begin{array}{l} g \text{ est continue et strictement croissante sur } [1; +\infty[. \\ g(1) = 3 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \quad \text{et} \quad 0 \in]-\infty; 3]. \end{array} \right.$$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique solution $\alpha \in [1; +\infty[$ de l'équation $g(x) = 0$. 0,75 pt

• Ainsi, l'équation $g(x) = 0$ admet α pour unique solution dans $]0; +\infty[$.

b. En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$.

En utilisant le tableau de variation de g , on obtient :

0,5 pt

x	0	α	$+\infty$
signe de $g(x)$	+	0	-

Partie B : Etude d'une fonction f

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(x)}{2+x}$.

1. Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x(2+x)^2}$.

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{2+x} = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \text{etc.}$$

Pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{x} \times (2+x) - 1 \times \ln(x)}{(2+x)^2} \\ &= \frac{\frac{2}{x} + 1 - \ln(x)}{(2+x)^2} \\ &= \frac{x \times \left(\frac{2}{x} + 1 - \ln(x)\right)}{x \times (2+x)^2} \\ &= \frac{2+x - x \ln(x)}{x(2+x)^2} \\ &= \frac{g(x)}{x(2+x)^2} \end{aligned}$$

0,5 pt

2. Etudier les limites de f en 0 et en $+\infty$.

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} (2+x) = 2$

donc par quotient, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$. 0,25 pt

- $f(x) = \frac{\ln(x)}{2+x} = \frac{\ln(x)}{x(\frac{2}{x}+1)} = \frac{\ln(x)}{x} \times \frac{1}{1+\frac{2}{x}}$

D'une part, par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

D'autre part, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+\frac{2}{x}} = 1$

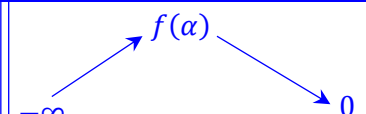
Ainsi, par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. **0,75 pt**

3. a. Dresser le tableau de variation de f sur $]0; +\infty[$.

Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $x > 0$ et $(2+x)^2 > 0$.

Donc $f'(x)$ est strictement du même signe que $g'(x)$.

0,75 pt

x	0	α	$+\infty$
signe de $f'(x)$	+	0	-
variations de f			

b. En déduire que le maximum de f vaut $\frac{1}{\alpha}$.

Le maximum de f sur $]0; +\infty[$ vaut $f(\alpha)$.

$$f(\alpha) = \frac{\ln(\alpha)}{2+\alpha}$$

Or, α vérifie $g(\alpha) = 0$

donc $\alpha + 2 - \alpha \ln(\alpha) = 0$

donc $\frac{\alpha + 2}{\alpha} = \ln(\alpha)$  car $\alpha > 0$ puisque $\alpha \in]1; +\infty[$

Ainsi, le maximum de f est :

$$f(\alpha) = \frac{\frac{\alpha + 2}{\alpha}}{2 + \alpha} = \frac{\alpha + 2}{\alpha} \times \frac{1}{2 + \alpha} = \frac{1}{\alpha}$$

1 pt

c. Donner un encadrement de α à 10^{-2} .

A l'aide de la calculatrice, on obtient $4,31 < \alpha < 4,32$.

0,5 pt

Exercice 3 : 8,5 points

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_{n+1} = \ln(2 - e^{-u_n})$ avec $u_1 = \ln(2)$.

On admet que la suite (u_n) est bien définie, et on définit la suite (S_n) sur $\mathbb{N}^*$ par : $S_n = \sum_{k=1}^n u_k = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

Partie A : Etude d'une suite auxiliaire

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la suite (v_n) par $v_n = e^{u_n}$.

1. Vérifier que $v_1 = 2$ et que pour tout entier $n \geq 1$: $v_{n+1} = 2 - \frac{1}{v_n}$.

$$v_1 = e^{u_1} = e^{\ln(2)} = 2 \quad \text{0,25 pt}$$

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}^*. \quad v_{n+1} = e^{u_{n+1}} = e^{\ln(2 - e^{-u_n})} = 2 - e^{-u_n} = 2 - \frac{1}{e^{u_n}} = 2 - \frac{1}{v_n} \quad \text{0,5 pt}$$

2. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $v_{n+1} - v_n = -\frac{(v_n - 1)^2}{v_n}$. En déduire le sens de variations de (v_n) .

- Soit $n \geq 1$ un entier.

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= 2 - \frac{1}{v_n} - v_n \\ &= \frac{2v_n}{v_n} - \frac{1}{v_n} - \frac{v_n^2}{v_n} \\ &= \frac{-v_n^2 + 2v_n - 1}{v_n} \\ &= \frac{-(v_n^2 - 2v_n + 1)}{v_n} \\ &= \frac{-(v_n - 1)^2}{v_n} \quad \text{0,75 pt} \end{aligned}$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(v_n - 1)^2 \geq 0$ donc $-(v_n - 1)^2 \leq 0$.

D'autre part, $v_n = e^{u_n}$ donc $v_n > 0$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - v_n \leq 0$ i.e. $v_{n+1} \leq v_n$.

La suite (v_n) est donc décroissante. 0,75 pt

3. a. Calculer v_2 et v_3 sous forme de fraction irréductible.

$$v_2 = 2 - \frac{1}{v_1} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad v_3 = 2 - \frac{1}{v_2} = 2 - \frac{1}{\frac{3}{2}} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \quad \text{0,5 pt}$$

- b. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $v_n = \frac{n+1}{n}$.

Pour tout entier $n \geq 1$, on note $\mathcal{P}_n$ la proposition $v_n = \frac{n+1}{n}$.

- Initialisation : Pour $n = 1$:

D'une part, $v_1 = 2$. D'autre part, $\frac{1+1}{1} = 2$.

On a bien $v_1 = \frac{1+1}{1}$ donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

- Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}_k$ est vraie i.e. $v_k = \frac{k+1}{k}$.

Si tu lis cette phrase et que tu es le premier à venir me voir, tu auras 1 point supplémentaire sur ce devoir.

Montrons alors que $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie i.e. $v_{k+1} = \frac{k+2}{k+1}$.

On a :

$$\begin{aligned} v_{k+1} &= 2 - \frac{1}{v_k} \quad \text{d'après la q°1} \\ &= 2 - \frac{1}{\frac{k+1}{k}} \quad \text{en utilisant l'hypothèse de récurrence} \\ &= 2 - \frac{k}{k+1} \\ &= \frac{2(k+1)}{k+1} - \frac{k}{k+1} \\ &= \frac{2k+2-k}{k+1} \\ &= \frac{k+2}{k+1} \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

- Conclusion : La proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie au rang $n = 1$ et est héréditaire.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{n+1}{n}$. **1,5 pt**

Partie B : Etude de (S_n)

1. Dédurre de la partie A l'expression de u_n en fonction de n , puis déterminer la limite de (u_n) .

$$v_n = e^{u_n} \quad \text{donc} \quad \ln(v_n) = u_n \quad \text{puis en utilisant la question précédente} \quad u_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \quad \text{0,5 pt}$$

$$\text{Or, } \frac{n+1}{n} = \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n} = 1 + \frac{1}{n} \quad \text{on aurait pu aussi le retrouver de cette manière : } \frac{n+1}{n} = \frac{n}{n} + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$$

Donc, par continuité du logarithme népérien en 1 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \stackrel{\downarrow}{=} \ln(1) = 0 \quad \text{0,75 pt}$$

2. Vérifier que $S_3 = \ln(4)$.

$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3$$

$$= \ln(v_1) + \ln(v_2) + \ln(v_3)$$

$$= \ln(2) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$\text{ou poursuivre avec : } S_3 = \ln(2) + \ln(3) - \ln(2) + \ln(4) - \ln(3) = \ln(4)$$

$$= \ln\left(2 \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3}\right)$$

$$= \ln(4)$$

0,5 pt

3. Montrer que l'expression de S_n est $\ln(n+1)$. En déduire la limite de la suite (S_n) .

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$$

$$= \ln(v_1) + \ln(v_2) + \ln(v_3) + \dots + \ln(v_n)$$

$$= \ln\left(\frac{2}{1}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \dots + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

ou poursuivre comme à la q°2 : c'est un "télescopage"

$$= \ln\left(\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \dots \times \frac{n+1}{n}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{n+1}{1}\right) = \ln(n+1)$$

0,75 pt

$$\text{On en déduit que } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) = +\infty. \quad \text{0,25 pt}$$

Partie C : Algorithmique

1. Exprimer S_{n+1} en fonction de S_n et de u_{n+1} .

$$S_{n+1} = \underbrace{u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n}_{S_n} + u_{n+1}$$

$$= S_n + u_{n+1}$$

0,5 pt

2. Compléter la fonction Python ci-contre afin qu'elle renvoie la valeur de S_n pour une valeur de n choisie par l'utilisateur.

1 pt

```
from math import log, exp
def S(n):
    u = log(2)
    S = u
    for k in range(1, n):
        u = log(2 - exp(-u))
        S = S + u
    return S
```