

Exercice 1

10 points

Dans un tétraèdre $ABCD$, les points I et J sont les milieux des segments $[BC]$ et $[AD]$, le point G est le centre de gravité du triangle BCD c'est à dire le point défini par $\overrightarrow{DG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{DI}$.

Le point M est défini par $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AD}$

1. Sans utiliser de repère
 - a. Construire une figure.
 - b. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{MG}$ sont colinéaires
2. L'espace est rapporté au repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$
 - a. Déterminer les coordonnées de points I , M et G
 - b. Déterminer une représentation paramétrique des droites (AI) et (MG)
 - c. Démontrer que les droites (AI) et (MG) sont strictement parallèles
3. Le vecteur $\overrightarrow{u}$ est défini par $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.
On se propose de démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{DG}$, $\overrightarrow{IJ}$ ne forment pas une base de l'espace.
 - a. Démontrer que $2\overrightarrow{IJ} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$
 - b. Démontrer que $3\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AD}$
 - c. Démontrer que $\overrightarrow{u} = -6\overrightarrow{IJ} - 6\overrightarrow{DG}$, puis conclure.

Exercice 2

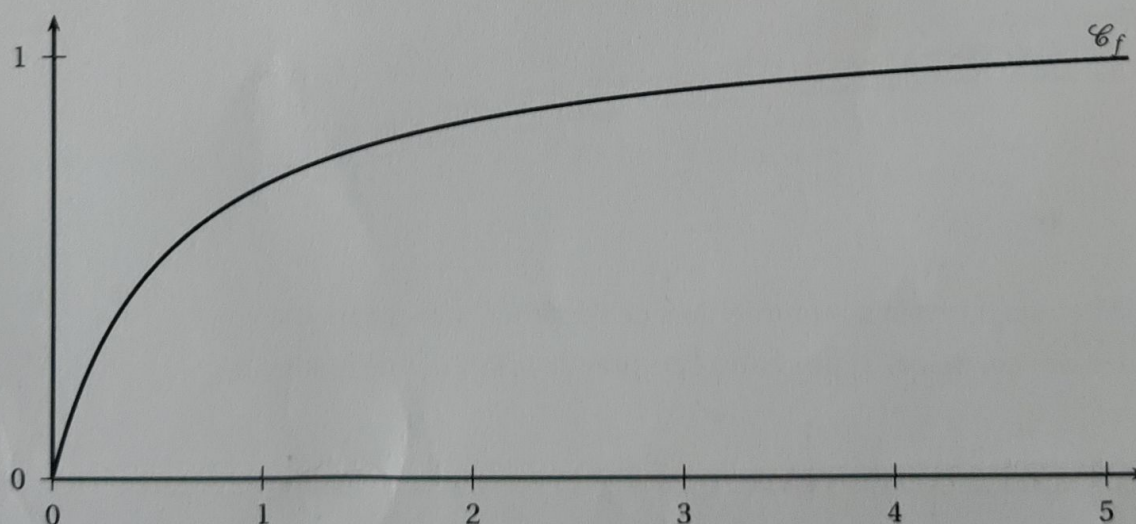
10 points

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = \ln \left(\frac{3x+1}{x+1} \right).$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $[0; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.



Partie A

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et en donner une interprétation graphique.

2. a. Démontrer que, pour tout nombre réel x positif ou nul,

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)(3x+1)}$$

- b. En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 = 3 \text{ et, pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = f(u_n).$$

- Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$.
- Démontrer que la suite (u_n) converge vers une limite strictement positive.

Partie C

On note ℓ la limite de la suite (u_n) . On admet que $f(\ell) = \ell$.

L'objectif de cette partie est de déterminer une valeur approchée de ℓ .

On introduit pour cela la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.

On donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction g sur $[0; +\infty[$ où

$$x_0 = \frac{-2 + \sqrt{7}}{3} \approx 0,215 \text{ et } g(x_0) \approx 0,088, \text{ en arrondissant à } 10^{-3}.$$

x	0	x_0	$+\infty$
Variations de la fonction g	0	$g(x_0)$	$-\infty$

- Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive. On la note α .
- a. Recopier et compléter la fonction Python ci-contre afin que la valeur retournée par la console soit une valeur approchée de α à 0,01 près.

```
from math import log
def alfa():
    x=0.22
    while __ __ __ __ __:
        x=x+0.01
    return(x)
```

- b. Déterminer la valeur retournée lors de l'appel de la fonction `alfa()`
- En déduire une valeur approchée à 0,01 près de la limite ℓ de la suite (u_n) .