



Examen suisse de maturité, session d'hiver 2024

PHYSIQUE & APPLICATIONS DES MATHÉMATIQUES EN OPTION SPECIFIQUE

Durée : 3h

Candidat-e : Nom : Prénom : Numéro :

L'épreuve écrite dure 3 heures avec une répartition conseillée d'une heure pour la partie Physique et de deux heures pour la partie Applications des Mathématiques. Les points étant répartis à 1/3 pour la Physique et 2/3 pour les Applications des mathématiques. Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement tous les problèmes.

Le/la candidat-e présente sur un feuillet les problèmes de Physique et sur un deuxième feuillet les problèmes d'Applications des mathématiques. Il/elle indique clairement sur chacun de ceux-ci son nom, prénom et numéro.

Matériel autorisé :

- Calculatrice non programmable.
- Formulaires et Tables CRC/CRM/CRP non annoté.
- Règle, équerre, rapporteur, compas.

Partie A : PHYSIQUE / 20 points

Partie B : APPLICATIONS DES MATHÉMATIQUES / 40 points

Total / 60 points

Note :

Partie A « PHYSIQUE »

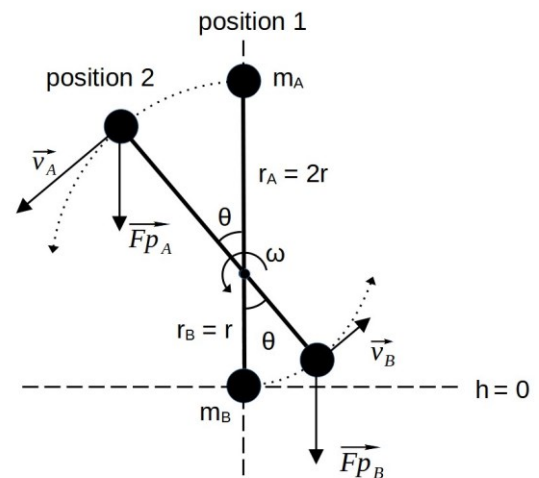
Durée indicative : 60 minutes

Avant toute application numérique, une solution algébrique est exigée.

A l'exception de celles qui figurent dans les « formulaires et tables », toutes les relations utilisées doivent être établies.

Problème 1 (12 pts)

Un système est composé de deux masses ponctuelles m_A et m_B reliées par une barre rigide de masse négligeable. Le système peut tourner dans un plan vertical autour d'un axe de rotation horizontal. Les deux masses sont identiques ($m_A = m_B = m$) et la longueur de la barre vaut $r_A + r_B$ avec $r_A = 2r = 2r_B$. Le système, initialement au repos à la verticale (position 1), est en équilibre instable et se met en mouvement de rotation vers la gauche comme indiqué sur la figure ci-contre.



- a) En considérant la conservation de l'énergie totale du système entre les positions 1 et 2, montrer que la vitesse v_B de la masse B en fonction de l'angle θ vaut

$$v_B = \sqrt{\frac{2rg(1 - \cos\theta)}{5}}$$

Le zéro des énergies potentielles de pesanteur des deux masses est fixé arbitrairement par rapport à la position 1 de la masse B ($h = 0$).

On pensera à la vitesse angulaire du système ω pour déterminer la relation entre les vitesses v_A et v_B .

- b) Dédurre de la réponse a) l'accélération tangentielle a_t de la masse B en fonction de θ .
Remarque : $\theta = \theta(t)$.
- c) Par rapport à l'axe de rotation, en fonction de m et r , exprimer le moment d'inertie du système, ainsi que la somme des moments de force en fonction de θ . Calculer l'accélération angulaire du système $\alpha = \dot{\omega}$. Vérifier alors que l'accélération tangentielle de la masse B est identique à celle trouvée au point b).

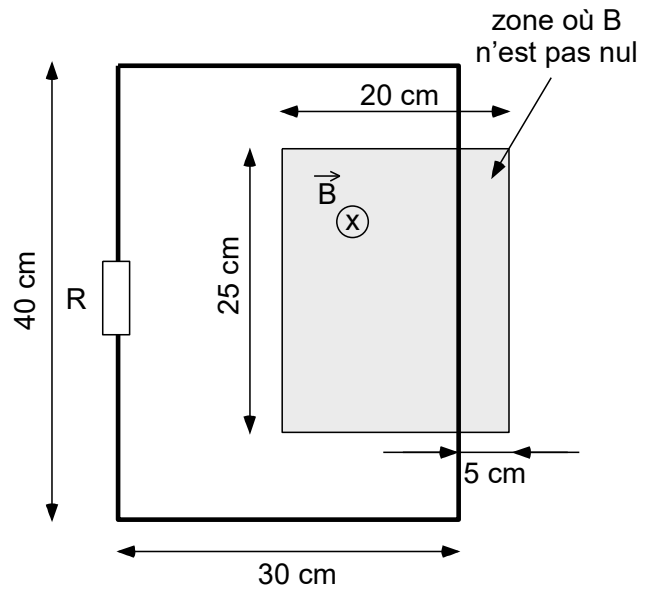
Problème 2

(8 pts)

Un cadre rigide, rectangulaire et conducteur est ouvert et ses deux extrémités sont reliées à une résistance $R = 2,14 \, \Omega$ qui ferme ainsi le circuit. Ses dimensions valent 30,0 cm de large sur 40,0 cm de haut.

Ce cadre est maintenu immobile et se trouve partiellement plongé dans une zone où règne un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ qui s'enfonce dans le plan. L'intensité de ce champ magnétique varie au cours du temps ; $B = k \cdot t$ où $k = 27,3 \text{ mT/s}$ et t est exprimé en secondes. La taille de cette zone est de 20,0 cm de large (dont 5,0 cm dépassent du cadre) sur 25,0 cm de haut.

On négligera les effets d'auto-induction.



- Expliquer dans le détail la raison pour laquelle un courant induit s'installe et en déterminer le sens tout en expliquant pourquoi il en est ainsi.
- Démontrer que l'intensité de ce courant induit vaut 0,478 mA.
- Expliquer pourquoi on doit exercer une force extérieure afin de maintenir le cadre en place et expliquer comment on en détermine sa direction et son sens. Représenter cette force extérieure. Calculer également la grandeur de cette force lorsque $t = 4,30 \text{ s}$.
- Déterminer la puissance instantanée dissipée dans la résistance par effet Joule lorsque $t = 4,30 \text{ s}$.

Partie B « Applications des mathématiques »

Durée indicative : 120 minutes

Problème 1 (14 points)

On considère l'équation différentielle $y' = -\frac{2y}{x} + 4x + k$ où k est un nombre réel.

On note s la solution particulière de l'équation satisfaisant la condition initiale $s(1) = 2$.

- On emploie la méthode d'Euler en 2 pas pour estimer, en fonction de k , la valeur de $s(2)$.
Trouver la valeur de k pour laquelle cette estimation vaut 0.
- Déterminer la solution générale de l'équation différentielle, en fonction de k .
- On pose $k = 2$. Déterminer alors $s(x)$.

Problème 2 (13 points)

- Le premier janvier de chaque année, la première fois le premier janvier 2024, Amélie verse 2000 francs sur un compte dont le taux d'intérêt annuel est de 2%. Le premier janvier 2028, le taux d'intérêt annuel passe à 3%. Amélie effectue dès cette date des versements annuels de 3000 francs. Quel est le capital total dont Amélie disposera le 31 décembre 2030 ?
- Le premier janvier, Brigitte a emprunté 100'000 francs à une banque. Elle rembourse son emprunt en versant à la fin de chaque année une annuité de 35'000 francs. Une fois qu'elle aura effectué 3 versements, son emprunt sera complètement remboursé. Déterminer une approximation du taux d'intérêt annuel de cet emprunt.

Indication :

Montrer d'abord qu'en posant $r = 1+t$, où t est le taux cherché, r est une solution de l'équation $20r^4 - 27r^3 + 7 = 0$. Calculer ensuite une approximation de r en utilisant une fois la formule de Newton avec la valeur initiale $r = 1.03$.

Problème 3 (13 points)

Ce problème est constitué de deux questions concernant des algorithmes, mais **indépendantes les unes des autres**.

- Déterminer le plus grand diviseur commun de 900 et de 1212 en utilisant l'algorithme d'Euclide et en détaillant les calculs.

- Maximiser $z = 3x + 4y$ sous les contraintes suivantes :
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \leq 6 \\ x + y \leq 10 \\ 3x + 2y \leq 24 \end{cases}$$

Représenter graphiquement les contraintes, c'est-à-dire le domaine dans lequel on peut choisir x et y . Hachurer ce domaine.