

Exercice 1 :

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiples). Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses est exacte. Recopier le numéro de la question et la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Une réponse multiple ne rapporte aucun point.

- Soit f la fonction définie sur $D_f =]-\infty; -0,5] \cup [2, 5; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{4x^2 - 8x + 5}$.
Que vaut $f'(x)$?
 - $f'(x) = \sqrt{8x - 8}$;
 - $f'(x) = \frac{8x - 8}{\sqrt{4x^2 - 8x + 5}}$;
 - $f'(x) = \frac{4x - 4}{\sqrt{4x^2 - 8x + 5}}$;
 - $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4x^2 - 8x + 5}}$.
- L'équation $e^{2x+1} \times e^{x^2} = 0$
 - n'admet aucune solution;
 - est équivalente à $x^2 + 2x + 1 = 0$;
 - a pour solution 0;
 - est équivalente à $x^2 + 2x + 1 = 1$.
- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par $g(x) = e^{\frac{4x-1}{2x+4}}$.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction g .
 - $\mathcal{C}$ admet une asymptote d'équation $y = 7,4$;
 - $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} g(x) = 0$;
 - $\mathcal{C}$ admet une asymptote d'équation $y = -2$;
 - $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} g(x) = 0$.
- On considère une fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^3 + x^2 - x + 1$. On admet que cette fonction s'annule sur l'intervalle $[-2; 2]$. On cherche à déterminer un encadrement à 10^{-3} de la racine de cette fonction. On suppose la fonction h déjà définie sur le logiciel de programmation. Il faut considérer l'algorithme :

(a)

```

a ← -2
b ← 2
Tant que b - a < 10-3 faire
  m ←  $\frac{a+b}{2}$ 
  si h(a) × h(m) > 0 alors
    b ← m
  sinon
    a ← m
  finSi
finTantQue
Afficher a, b

```

(c)

```

a ← -2
b ← 2
Tant que b - a > 10-3 faire
  m ←  $\frac{a+b}{2}$ 
  si h(a) × h(m) > 0 alors
    a ← m
  sinon
    b ← m
  finSi
finTantQue
Afficher a, b

```

(b)

```

a ← -2
b ← 2
Tant que b - a < 10-3 faire
  m ←  $\frac{a+b}{2}$ 
  si h(a) × h(m) > 0 alors
    a ← m
  sinon
    b ← m
  finSi
finTantQue
Afficher a, b

```

(d)

```

a ← -2
b ← 2
Tant que b - a > 10-3 faire
  m ←  $\frac{a+b}{2}$ 
  si h(a) × h(m) > 0 alors
    b ← m
  sinon
    a ← m
  finSi
finTantQue
Afficher a, b

```

Exercice 2 :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 6$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+2} = \frac{5}{4}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

Le but de cet exercice est d'étudier la limite éventuelle de la suite (u_n) .

Partie A :

On souhaite calculer les valeurs des premiers termes de la suite (u_n) à l'aide d'un tableur.

On a reproduit ci-dessous une partie d'une feuille de calcul, où figurent les valeurs de u_0 et de u_1 .

	A	B
1	n	u_n
2	0	3
3	1	6
4	2	
5	3	
6	4	
7	5	

1. Donner une formule qui, saisie dans la cellule B4, puis recopiée vers le bas, permet d'obtenir des valeurs de la suite (u_n) dans la colonne B.
2. Recopier et compléter le tableau ci-dessus. On donnera des valeurs approchées à 10^{-3} près de u_n pour n allant de 2 à 5.
3. Que peut-on conjecturer à propos de la convergence de la suite (u_n) ?

Partie B : Étude de la suite

On considère les suites (v_n) et (w_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \quad \text{et} \quad w_n = u_n - 7.$$

1. (a) Démontrer que (v_n) est une suite constante.
(b) En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{21}{4}$.
2. (a) En utilisant le résultat de la question 1. b., montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n < u_{n+1} < 15$.
(b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
3. (a) Démontrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
(b) En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = 7 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.
(c) Calculer la limite de la suite (u_n) .

Exercice 3 :

On considère les fonctions f et g définies pour tout réel x par :

$$f(x) = e^x \quad \text{et} \quad g(x) = 1 - e^{-x}.$$

Les courbes représentatives de ces fonctions dans un repère orthogonal du plan, notées respectivement $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, sont fournies en annexe.

Partie A

Ces courbes semblent admettre deux tangentes communes. Tracer aux mieux ces tangentes sur la figure de l'annexe.

Partie B

Dans cette partie, on admet l'existence de ces tangentes communes.

On note $\mathcal{D}$ l'une d'entre elles. Cette droite est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse a et tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point B d'abscisse b .

1. (a) Exprimer en fonction de a le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A.
(b) Exprimer en fonction de b le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point B.
(c) En déduire que $b = -a$.
2. Démontrer que le réel a est solution de l'équation

$$2(x - 1)e^x + 1 = 0.$$

Partie C

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = 2(x - 1)e^x + 1.$$

1. (a) Calculer les limites de la fonction φ en $-\infty$ et $+\infty$.
(b) Calculer la dérivée de la fonction φ , puis étudier son signe.
(c) Dresser le tableau de variation de la fonction φ sur $\mathbb{R}$. Préciser la valeur de $\varphi(0)$.
2. (a) Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.
(b) On note α la solution négative de l'équation $\varphi(x) = 0$ et β la solution positive de cette équation.
À l'aide d'une calculatrice, donner les valeurs de α et β arrondies au centième.

Partie D

Dans cette partie, on démontre l'existence de ces tangentes communes, que l'on a admise dans la partie B.

On note E le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse α et F le point de la courbe $\mathcal{C}_g$ d'abscisse $-\alpha$ (α est le nombre réel défini dans la partie C).

1. Démontrer que la droite (EF) est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point E.
2. Démontrer que (EF) est tangente à $\mathcal{C}_g$ au point F.

Exercice 4 :

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Pour chaque question, une seule proposition est correcte. Indiquer cette réponse. On ne demande pas de justifier.

L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points :

$A(1; 2; 0)$, $B(0; 3; 1)$, $C(1; 1; -1)$, $D(-1; 4; 2)$ et $E(1; 5; 1)$.

a)

(1) $D \in (ABC)$	(2) $E \in (ABC)$	(3) $E \in (BCD)$
--------------------------	--------------------------	--------------------------

b)

(1) A, B, E sont alignés	(2) B, D, E sont alignés	(3) A, B, D sont alignés
---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------

c) Un vecteur directeur de la droite (AB) a pour coordonnées ...

(1) $(-1; 1; -1)$	(2) $(2; -2; -2)$	(3) $(1; 5; 1)$
--------------------------	--------------------------	------------------------

d) Le plan qui passe par le point E et de vecteurs directeurs ...

(1) $\vec{u}(-2; 2; 2)$ et $\vec{v}(0; -1; -1)$ est sécant avec (ABC)	(2) $\vec{u}(-2; 2; 2)$ et $\vec{v}(0; -1; -1)$ est parallèle à (ABC)	(3) $\vec{u}(0; 3; 1)$ et $\vec{v}(-1; 1; 1)$ est parallèle à (ABC)
--	--	---
