

Exercice 1 :

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

```

Demander  $p$ 
 $u \leftarrow 5$ 
Pour  $k$  variant de 1 à  $p$ 
     $u \leftarrow 0,5u + 0,5(k-1) - 1,5$ 
Finpour
Afficher  $u$ 
    
```

Faire fonctionner cet algorithme pour $p = 2$ en indiquant les valeurs des variables à chaque étape.
Quel nombre obtient-on en sortie ?

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n par

$$u_{n+1} = 0,5u_n + 0,5n - 1,5.$$

1. Modifier l'algorithme de la première partie pour obtenir en sortie toutes les valeurs de u_n pour n variant de 1 à p .
2. À l'aide de l'algorithme modifié, après avoir saisi $p = 4$, on obtient les résultats suivants :

n	1	2	3	4
u_n	1	-0,5	-0,75	-0,375

Peut-on affirmer, à partir de ces résultats, que la suite (u_n) est décroissante ?
Justifier.

3. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = 0,1u_n - 0,1n + 0,5$.
Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,5. Préciser la valeur de v_0 .
4. Exprimer v_n en fonction de n , pour tout entier naturel n .
5. En déduire que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = 10 \times 0,5^n + n - 5.$$

6. Démontrer que la suite (u_n) est croissante à partir du rang 3.
7. Déterminer la limite de la suite (u_n) . On admettra que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^n = 0$.

Exercice 2 :

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-4} près.

Partie A

En utilisant sa base de données, la sécurité sociale estime que la proportion de Français présentant, à la naissance, une malformation cardiaque de type anévrisme est de 10 %. L'étude a également permis de prouver que 30 % des Français présentant, à la naissance, une malformation cardiaque de type anévrisme, seront victimes d'un accident cardiaque au cours de leur vie alors que cette proportion n'atteint plus que 8 % pour ceux qui ne souffrent pas de cette malformation congénitale.

On choisit au hasard une personne dans la population française et on considère les événements :

M : « La personne présente, à la naissance, une malformation cardiaque de type anévrisme »

C : « La personne est victime d'un accident cardiaque au cours de sa vie ».

1. (a) Construire un arbre pondéré modélisant la situation.
(b) Montrer que $P(M \cap C) = 0,03$.
(c) Calculer $P(C)$.
2. On choisit au hasard une victime d'un accident cardiaque. Quelle est la probabilité qu'elle présente une malformation cardiaque de type anévrisme ?

Partie B

La sécurité sociale décide de lancer une enquête de santé publique, sur ce problème de malformation cardiaque de type anévrisme, sur un échantillon de n personnes, prises au hasard dans la population française.

On note X la variable aléatoire comptabilisant le nombre de personnes de l'échantillon présentant une malformation cardiaque de type anévrisme.

1. Définir la loi de la variable aléatoire X . Justifier.
2. Dans cette question, on suppose que $n = 400$.
 - (a) Déterminer $P(X = 35)$. Interpréter le résultat.
 - (b) Déterminer $P(30 \leq X \leq 50)$. Interpréter le résultat.
 - (c) Calculer $E(X)$. Interpréter le résultat.
3. Déterminer le nombre minimal de personnes à interroger dans la population française pour que la probabilité d'en avoir au moins une d'entre elle atteinte de la malformation soit supérieure à 0,99.

Exercice 3 :

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = x + 1 + \frac{x}{e^x}.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

Soit g la fonction définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 1 - x + e^x.$$

1. Étudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$. (Les limites ne sont pas attendues.)
2. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B

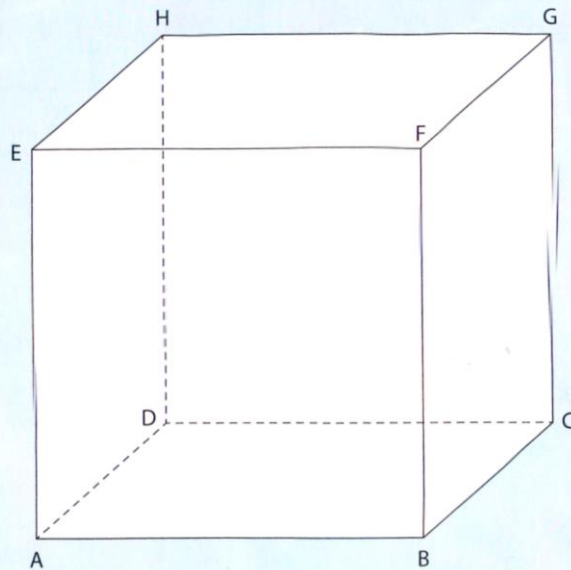
1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ puis la limite de f en $+\infty$.
2. On appelle f' la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que, pour tout réel x ,

$$f'(x) = e^{-x}g(x).$$

3. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
4. (a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle α sur $[-1; 0]$.
(b) Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.
(c) En déduire le signe de f sur $\mathbb{R}$.
5. (a) Démontrer que la droite T d'équation $y = 2x + 1$ est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
(b) Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite T .

Exercice 4 :

ABCDEFGH est le cube représenté ci-dessous.



Réaliser cette figure avec $AB = 6 \text{ cm}$ et la compléter au fur et à mesure.

On se place dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

Partie A

1. a) Construire les points I, J et K définis par :

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}, \quad \overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}, \quad \overrightarrow{AK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}.$$

b) Déterminer les coordonnées de chacun des points I, J et K.

c) Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur de chacune des droites (IJ) et (IK).

2. L est un point de l'arête [CD].

a) Justifier que les coordonnées de L sont de la forme $(a ; 1 ; 0)$ où a est un nombre réel de l'intervalle $[0 ; 1]$.

b) Pour quelle valeur de a , le point L appartient-il au plan (IJK) ?

Partie B

Dans cette partie, on pose $a = \frac{1}{4}$ et le point L a pour coordonnées $\left(\frac{1}{4}; 1; 0\right)$.

1. a) Démontrer que le quadrilatère IKJL est un parallélogramme.

b) Calculer les coordonnées du centre de IKJL.

c) Quelle est la position relative des droites (IJ) et (KL) ?

2. a) Démontrer que les droites (IJ) et (BH) sont sécantes.

b) Le centre du cube appartient-il au plan (IJK) ?

3. a) Déterminer un point M de la droite (HG) tel que les droites (MF) et (IL) soient parallèles.

b) Justifier que la droite (MF) est parallèle au plan (IJK).