

Exercice 1 : Probabilités – Les parties A et B sont indépendantes

Le virus de la grippe atteint chaque année, en période hivernale, une partie de la population d'une ville.
La vaccination contre la grippe est possible ; elle doit être renouvelée chaque année.

Partie A

L'efficacité du vaccin contre la grippe peut être diminuée en fonction des caractéristiques individuelles des personnes vaccinées, ou en raison du vaccin, qui n'est pas toujours totalement adapté aux souches du virus qui circulent. Il est donc possible de contracter la grippe tout en étant vacciné.

Une étude menée dans la population de la ville à l'issue de la période hivernale a permis de constater que :

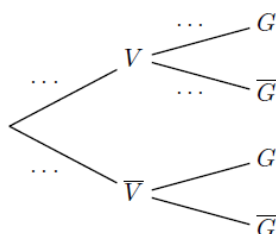
- 40 % de la population est vaccinée ;
- 8 % des personnes vaccinées ont contracté la grippe ;
- 20 % de la population a contracté la grippe.

On choisit une personne au hasard dans la population de la ville et on considère les événements :

V : « la personne est vaccinée contre la grippe » ;

G : « la personne a contracté la grippe ».

1. (a) Donner la probabilité de l'événement G .
- (b) Compléter les pointillés indiqués sur quatre des branches de l'arbre pondéré représenté ci-dessous.



2. Déterminer la probabilité que la personne choisie ait contracté la grippe et soit vaccinée.
3. La personne choisie n'est pas vaccinée. Montrer que la probabilité qu'elle ait contracté la grippe est égale à 0,28.

Partie B

Dans cette partie, les probabilités demandées seront données à 10^{-3} près.

Un laboratoire pharmaceutique mène une étude sur la vaccination contre la grippe dans cette ville.

Après la période hivernale, on interroge au hasard n habitants de la ville, en admettant que ce choix se ramène à n tirages successifs indépendants et avec remise. On suppose que la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la ville soit vaccinée contre la grippe est égale à 0,4.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes vaccinées parmi les n interrogées.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ?
2. Dans cette question, on suppose que $n = 40$.
 - (a) Déterminer la probabilité qu'exactly 15 des 40 personnes interrogées soient vaccinées.
 - (b) Déterminer la probabilité qu'au moins la moitié des personnes interrogées soit vaccinée.
 - (c) Déterminer le nombre moyen de personnes vaccinées dans ce groupe de 40 personnes interrogées.

Exercice 2 : Suites

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

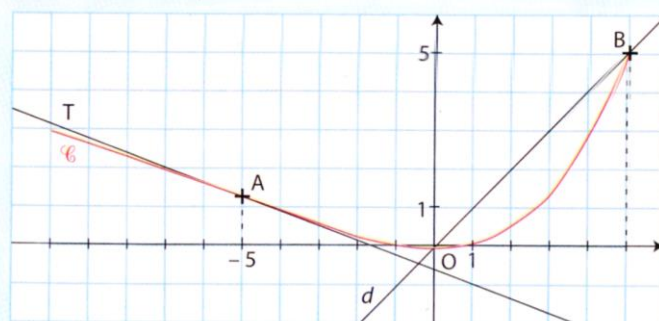
$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{2u_n + 1}.$$

On admet que pour tout entier naturel n , $u_n > 0$.

1. (a) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 . On pourra en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.
 (b) Vérifier que si n est l'un des entiers 0, 1, 2, 3, 4 alors $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$.
 (c) Établir que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - 1 = \frac{-u_n + 1}{2u_n + 1}$.
 (d) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$.
2. Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$.
 (a) Établir que pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = \frac{-u_n + 1}{3u_n + 3}$.
 (b) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{3}$.
 En déduire l'expression de v_n en fonction de n .
 (c) On admet que pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}$.
 Exprimer u_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (u_n) .

Exercice 3 : Fonctions

On a représenté dans le repère orthogonal ci-dessous, la courbe $\mathcal{C}$ représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-10; 5]$, la tangente T à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse -5 et la droite d d'équation $y = x$.



Partie A

Dans cette partie les estimations seront obtenues par lecture graphique.

Cette partie A est un questionnaire à choix multiples.

Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée.

1. Parmi les quatre valeurs ci-dessous, la meilleure valeur approchée du coefficient directeur de la tangente T est :

- | | |
|-------------------|------------------|
| a) $-\frac{1}{3}$ | b) -3 |
| c) 3 | d) $\frac{1}{3}$ |

2. La fonction f semble :

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| a) concave sur $[-5; 0]$ | b) concave sur $[-10; 0]$ |
| c) convexe sur $[-10; 5]$ | d) convexe sur $[-5; 5]$ |

Partie B

La fonction f précédente, est la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-10; 5]$ par :

$$f(x) = (x - 5)e^{0,2x} + 5.$$

1. On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[-10; 5]$.

a) Montrer que $f'(x) = 0,2xe^{0,2x}$.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-10; 5]$.

c) Déterminer la valeur exacte du coefficient directeur de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse -5 .

2. Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-contre.

a) En utilisant ces résultats, justifier que la dérivée seconde de f , notée f'' , est définie par :

$$f''(x) = (0,2 + 0,04x)e^{0,2x}.$$

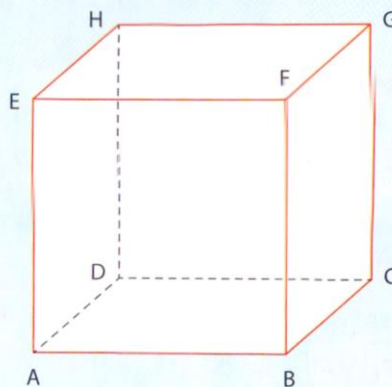
b) Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[-10; 5]$.

1	$g(x) := 0.2 \times e^{0.2x}$
$\rightarrow$	$g(x) := \frac{1}{5} \times e^{\frac{1}{5}x}$
2	Dérivée(g)
$\rightarrow$	$\frac{1}{25} \times e^{\frac{1}{5}x} + \frac{1}{5} e^{\frac{1}{5}x}$

Exercice 4 : Espace

La partie C est indépendante des parties A et B.

ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre.



Partie A : premiers résultats

1. Réaliser la figure et construire les points I, J et K :

- I le milieu de $[EF]$;
- J le milieu de $[EH]$;
- K le point tel que $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

2. On munit l'espace du repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

a) Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite (AE) .

b) Déterminer un couple de vecteurs directeurs du plan (FHK) .

c) Démontrer que la droite (AE) et le plan (FHK) ne sont pas parallèles.

Partie B : étude de l'intersection

1. a) M est un point de la droite (AE).

Justifier qu'il a pour coordonnées $(0; 0; a)$ où a est un nombre réel.

b) Justifier que le point M appartient au plan (FHK) s'il vérifie :

$$\overrightarrow{HM} = x\overrightarrow{HF} + y\overrightarrow{HK} \text{ où } x \text{ et } y \text{ sont deux nombres réels.}$$

c) Vérifier que le point d'intersection M de (AE) et (FHK), a pour coordonnées $\left(0; 0; -\frac{1}{3}\right)$. En déduire les valeurs de x et y .

2. Placer le point M sur la figure.

Partie C : justifier des affirmations

Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier.

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère.

$\mathcal{P}$ est le plan qui passe par A(1 ; 0 ; -2) et de vecteurs directeurs $\vec{u}(-1; 0; -3)$ et $\vec{v}(0; 1; 2)$.

1. Affirmation 1 : le point M(-1 ; -1 ; -10) est un point du plan $\mathcal{P}$.

2. Affirmation 2 : la droite d qui passe par le point B(0 ; -1 ; 3) et de vecteur directeur $\vec{w}(1; -2; 4)$ est parallèle au plan $\mathcal{P}$.

3. Le plan $\mathcal{Q}$ est le plan qui passe par C(-1 ; 2 ; -1) et de vecteurs directeurs $\vec{u}'(-1; 1; -1)$ et $\vec{v}'(-3; 2; -5)$.

Affirmation 3 : le plan $\mathcal{Q}$ est parallèle au plan $\mathcal{P}$.
