

TG	Sujet 4	Révisions Bac Blanc - Exercices divers Correction	Janvier 24
----	---------	---	------------

Exercice 1 : 1. Réponse C / 2. Réponse A / 3 ; Réponse D / 4. Réponse C

Exercice 2 :

Partie A :

1. La formule à saisir dans la cellule B4, puis à recopier vers le bas, permettant d'obtenir des valeurs de la suite (u_n) dans la colonne B est $= 5*B3/4 - B2/4$

2.

	A	B
1	n	u_n
2	0	3
3	1	6
4	2	6,75
5	3	6,938
6	4	6,984
7	5	6,996

3. On peut conjecturer que la suite (u_n) converge vers le nombre 7.

Partie B : Étude de la suite

On considère les suites (v_n) et (w_n) définies pour tout n par : $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$ et $w_n = u_n - 7$.

1. (a) $v_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{4}u_{n+1} = \frac{5}{4}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{4}u_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n = v_n$ donc la suite (v_n) est constante.

- (b) La suite (v_n) est constante, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 = u_1 - \frac{1}{4}u_0 = 6 - \frac{3}{4} = \frac{21}{4}$.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n = \frac{21}{4}$ donc $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{21}{4}$.

2. (a) • **Initialisation**

$u_0 = 3$ et $u_1 = 6$ donc $u_0 < u_1 < 15$; la propriété est vraie pour $n = 0$.

• **Hérédité**

On suppose qu'il existe un rang $k \geq 0$, $u_k < u_{k+1} < 15$.

Montrons alors que : $u_{k+1} < u_{k+2} < 15$

$$\text{Or, } u_k < u_{k+1} < 15 \implies \frac{1}{4}u_k < \frac{1}{4}u_{k+1} < \frac{15}{4} \implies \frac{1}{4}u_k + \frac{21}{4} < \frac{1}{4}u_{k+1} + \frac{21}{4} < \frac{15}{4} + \frac{21}{4}.$$

Donc, $u_{k+1} < u_{k+2} < \frac{36}{4} < 15$.

• **Conclusion**

On a vérifié que la propriété était vraie pour $n = 0$; on a démontré qu'elle était héréditaire pour $n \leq 0$.

Donc, d'après le principe de récurrence, $u_n < u_{n+1} < 15$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- (b) On a démontré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1}$, donc la suite (u_n) est croissante.

On a démontré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 15$, donc la suite (u_n) est majorée.

La suite (u_n) est croissante et majorée donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente vers une limite $\ell \leq 15$.

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_n - 7$ donc $u_n = w_n + 7$.

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = u_{n+1} - 7 = \frac{1}{4}u_n + \frac{21}{4} - 7 = \frac{1}{4}(w_n + 7) - \frac{7}{4} = \frac{1}{4}w_n + \frac{7}{4} - \frac{7}{4} = \frac{1}{4}w_n$$

Donc la suite (w_n) est géométrique de premier terme $w_0 = u_0 - 7 = 3 - 7 = -4$ et de raison $q = \frac{1}{4}$.

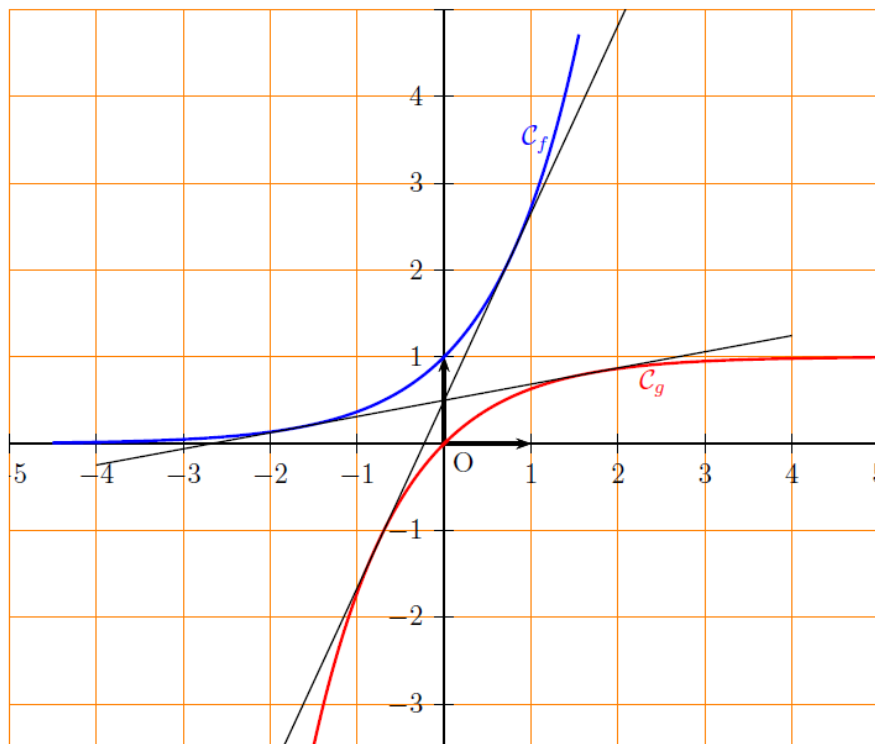
- (b) On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = w_0 \times q^n = -4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = -4 \times \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = -\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

Or $u_n = w_n + 7 = 7 + w_n$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 7 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

- (c) $-1 < \frac{1}{4} < 1$ donc, d'après les propriétés des limites des suites géométriques, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$.

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 7$.

Exercice 3 :



Partie B

1. (a) Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A est égal à $f'(a)$. Or $f'(x) = e^x$, donc $f'(a) = e^a$.
- (b) De même le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point B est égal à $g'(b)$. Or $g'(x) = -(-e^{-x})$, donc $g'(b) = e^{-b}$.
- (c) Si les deux tangentes sont égales le coefficient directeur de leurs équations réduites sont égaux, soit :

$$f'(a) = g'(b) \iff e^a = e^{-b} \text{ et par croissance de la fonction logarithme népérien :}$$

$$a = -b \iff b = -a.$$

2. Une équation réduite de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A est égale à :

$$y - e^a = e^a(x - a) \iff y = xe^a + e^a(1 - a).$$

Une équation réduite de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point B est égale à :

$$y - (1 - e^{-b}) = e^{-b}(x - b) \iff y = xe^{-b} + 1 - e^{-b} - be^{-b}.$$

Ou en remplaçant $-b$ par a :

$$y = xe^a + 1 - e^a + ae^a \iff y = xe^a + 1 + e^a(a - 1).$$

Si les deux tangentes sont égales, leurs équations réduites sont les mêmes. On a déjà vu l'égalité des coefficients directeurs. Les ordonnées à l'origine sont aussi les mêmes soit :

$$e^a(1 - a) = 1 + e^a(a - 1) \iff e^a(2 - 2a) = 1 \iff 2(a - 1)e^a + 1 = 0.$$

Donc a est solution de l'équation dans $\mathbb{R}$:

$$2(x - 1)e^x + 1 = 0.$$

Partie C

1. (a) Sur $\mathbb{R}$, $\varphi(x) = 2xe^x - 2e^x + 1$.

On sait que $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$, d'où par somme de limite :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = 1.$$

La droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de φ .

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, d'où par somme de limites : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$.

- (b) Somme de fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$, φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\varphi'(x) = 2e^x + 2(x-1)e^x = 2xe^x.$$

Comme, quel que soit $x \in \mathbb{R}$; $e^x > 0$, le signe de $\varphi'(x)$ est celui de x . Donc sur $] -\infty ; 0[$, $\varphi'(x) < 0$: la fonction est décroissante sur cet intervalle et sur $]0 ; +\infty[$, $\varphi'(x) > 0$: la fonction φ est croissante sur cet intervalle. D'où le tableau de variations :

- (c)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi'(x)$	$-$	0	$+$
$\varphi(x)$	1		$+\infty$
		-1	

2. (a) Sur $] -\infty ; 0[$ la fonction φ est continue et strictement décroissante à valeurs dans $[-1 ; 1]$. Comme $0 \in [-1 ; 1]$ il existe un réel unique α de $] -\infty ; 0[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Le même raisonnement sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ montre qu'il existe un réel unique de cet intervalle β tel que $f(\beta) = 0$.

Donc l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.

- (b) La calculatrice donne successivement :

$$\varphi(-2) \approx 0,18 \text{ et } \varphi(-1) \approx -0,47, \text{ donc } -2 < \alpha < -1;$$

$$\varphi(-1,7) \approx 0,013 \text{ et } \varphi(-1,6) \approx -0,05, \text{ donc } -1,7 < \alpha < -1,6;$$

$$\varphi(-1,68) \approx 0,001 \text{ et } \varphi(-1,67) \approx -0,005, \text{ donc } -1,68 < \alpha < -1,67;$$

$$\varphi(-1,679) \approx 0,00041 \text{ et } \varphi(-1,678) \approx -0,0002, \text{ donc } -1,679 < \alpha < -1,678.$$

Conclusion au centième près $\alpha \approx -1,68$.

De la même façon on obtient $\beta \approx 0,77$.

Partie D

1. Le coefficient directeur de la tangente en E à $\mathcal{C}_f$ est e^α .

$$\text{Le coefficient directeur de la droite (EF) est : } \frac{1 - e^\alpha - e^\alpha}{-\alpha - \alpha} = \frac{1 - 2e^\alpha}{-2\alpha}.$$

Or α est solution de l'équation : $2(x-1)e^x + 1 = 0$, autrement dit

$$2(\alpha-1)e^\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\alpha e^\alpha = 2e^\alpha - 1, \text{ d'où en revenant au coefficient directeur de la droite}$$

$$\text{(EF) : } \frac{1 - 2e^\alpha}{-2\alpha} = \frac{-2\alpha e^\alpha}{-2\alpha} = e^\alpha$$

Conclusion : la droite (EF) est bien la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse α et la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse $-\alpha$.

2. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse $-\alpha$ est $e^{-(-\alpha)} = e^\alpha$.

On a vu dans la question précédente que la droite (EF) a pour coefficient directeur e^α et contient le point F.

Conclusion la droite (EF) est la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse $-\alpha$.

Exercice 4 :

- a. (1) b. (3) c. (2) d. (2)