

EXERCICE 1 [5 points]

1. Après 30 minutes, 10 % de 1 mg ont été éliminés ; il en reste donc 0,9 mg. On donne alors 0,25 mg supplémentaires : la quantité de médicament dans le sang au bout d'une demi-heure est donc 1,15 mg.

2. D'après l'énoncé, toutes les 30 minutes, l'organisme du patient élimine 10 % de la quantité de médicament présente dans le sang et qu'il reçoit une dose supplémentaire de 0,25 mg de la substance

médicamenteuse. D'où, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \left(1 - \frac{10}{100}\right)u_n + 0,25$ i.e. $u_{n+1} = 0,9u_n + 0,25$.

3. a. Initialisation : $1 \leq 1,15 < 5$ d'où $u_0 \leq u_1 < 5$.

Hérédité : soit n un entier naturel. Supposons que $u_n \leq u_{n+1} < 5$.

Alors : $0,9u_n \leq 0,9u_{n+1} < 0,9 \times 5$
donc $0,9u_n + 0,25 \leq 0,9u_{n+1} + 0,25 < 0,9 \times 5 + 0,25$
i.e. $u_{n+1} \leq u_{n+2} < 4,75$
d'où $u_{n+1} \leq u_{n+2} < 5$.

Conclusion : ...

b. (u_n) est donc strictement croissante et majorée par 5 : d'après le théorème de convergence monotone, (u_n) est donc convergente.

4. a.

```
def efficace() :  
    u = 1  
    n = 0  
    while u < 1,8 :  
        u = 0,9*u + 0,25  
        n = n+1  
    return n
```

b. Le script renvoie : 8 (car $u_8 \approx 1,854$). Interprétation : le médicament commence à être réellement efficace au bout de 8 périodes de 30 min, c'est-à-dire après 4 heures.

5. a. $\forall n \in \mathbb{N} : v_{n+1} = 2,5 - u_{n+1} = 2,5 - (0,9u_n + 0,25) = 2,5 - 0,9u_n - 0,25 = 2,25 - 0,9u_n = 0,9 \times 2,5 - 0,9u_n = 0,9(2,5 - u_n)$

d'où $v_{n+1} = 0,9v_n$.

La suite (v_n) est donc géométrique de raison 0,9 et de premier terme v_0 avec $v_0 = 2,5 - u_0 = 1,5$.

b. Pour tout entier naturel n : $v_n = v_0 \times 0,9^n$ donc $2,5 - u_n = 1,5 \times 0,9^n$ d'où $u_n = 2,5 - 1,5 \times 0,9^n$.

c. $-1 < 0,9 < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,9^n = 0$. D'où, par produit et somme de limites : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2,5$.

La suite (u_n) étant croissante, on en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 2,5$.

Par conséquent, d'après le modèle choisi, le traitement ne présente pas un risque pour le patient.

EXERCICE 2 [4 points]

1. Réponse A : $\frac{5-3e^x}{1+e^x}$.

2. Réponse C : $F(x) = \frac{1}{3}x^3 \left(g(x) - \frac{1}{3} \right)$.

3. Réponse B : $y=2$.

4. Réponse C : f est convexe sur $]-\infty; -1]$ et sur $[2; +\infty[$.

EXERCICE 3 [6 points]**Partie A**

1. $p'(x) = 3x^2 - 6x + 5$

Discriminant de $p'(x)$: $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 3 \times 5 = -24$.

$\Delta < 0$ donc $p'(x)$ n'admet pas de racine réelle et, puisque $3 > 0$: $p'(x) > 0$ sur $[-3; 4]$.

La fonction p est donc strictement croissante sur $[-3; 4]$.

2. • p est dérivable sur $[-3; 4]$ donc continue sur $[-3; 4]$
 • p est strictement croissante sur $[-3; 4]$
 • $p(-3) = \dots = -68$ et $p(4) = \dots = 37$ et $-68 < 0 < 37$

Donc d'après le corollaire du TVI, l'équation $p(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[-3; 4]$ une unique solution qui sera notée α .

3. On utilise la calculatrice et la méthode par balayage :

$p(-1) < 0 < p(0)$ puis $p(-0,2) < 0 < p(-0,1)$ puis $p(-0,18) < 0 < p(-0,17)$.

Donc une valeur approchée de α au centième près est : $\alpha \approx -0,18$.

4.

x	-3	α	4
$p(x)$	-	0	+

Partie B

1. a. On pose : $u(x) = e^x$ $v(x) = 1 + x^2$. Alors : $u'(x) = e^x$ $v'(x) = 2x$.

$f = \frac{u}{v}$ avec u et v qui sont dérivables sur $[-3; 4]$ et v qui ne s'annule pas sur $[-3; 4]$ (un carré est toujours positif) donc f' est dérivable sur $[-3; 4]$ et :

$$f'(x) = \frac{e^x(1+x^2) - e^x \times 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{e^x(1-2x+x^2)}{(1+x^2)^2} \text{ i.e. } f'(x) = \frac{e^x(1-x)^2}{(1+x^2)^2}.$$

b. $f'(1) = \dots = 0$ donc la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.

2. Pour tout réel x de $[-3; 4]$: $e^x > 0$ et $(1+x^2)^3 > 0$ (car un carré est toujours positif et la fonction cube est strictement croissante sur $[1; +\infty[$).

Donc $f''(x)$ est du signe de $p(x)(x-1)$.

On en déduit que f admet deux points d'inflexion, d'abscisses α et 1.

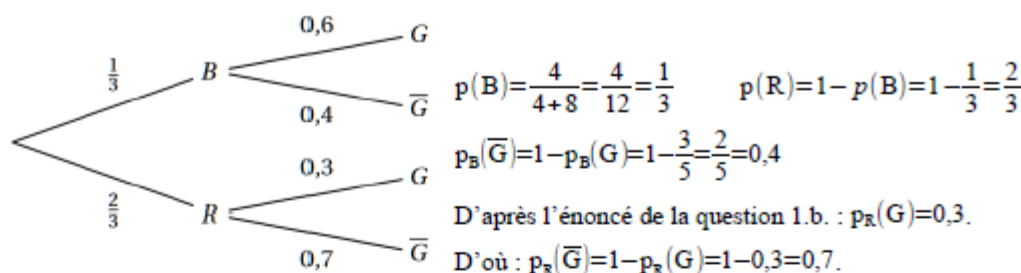
Selon le critère des concepteurs, le toboggan assure donc de bonnes sensations.

x	-3	α	1	4
$p(x)$	-	0	+	+
$x-1$	-	-	-	+
$f''(x)$	+	0	-	+

EXERCICE 4 [5 points]

1. a. D'après l'énoncé : $p_B(G) = \frac{3}{5}$.

b.



$$\begin{aligned}
 2. a. \quad p(G) &= p(B \cap G) + p(R \cap G) \\
 &= p(B) \times p_B(G) + p(R) \times p_R(G) \\
 &= \frac{1}{3} \times 0,6 + \frac{2}{3} \times 0,3 \\
 &= \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{10} \\
 &= \frac{2}{5} \quad \text{d'où } p(G) = 0,4.
 \end{aligned}$$

b. $p_G(B) = \frac{p(B \cap G)}{p(G)} = \frac{\frac{1}{3} \times 0,6}{0,4} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{3}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{2}$ donc la probabilité qu'un joueur ait obtenu une case blanche en lançant la roue, sachant qu'il gagne la partie, est de 0,5.

$$3. p(B \cap G) = p(B) \times p_B(G) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{5} \text{ et } p(B) \times p(G) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$$

donc $p(B \cap G) \neq p(B) \times p(G)$ donc B et G ne sont pas indépendants.

4. a. On répète 10 fois une épreuve de Bernoulli de succès l'événement G (probabilité de succès : 0,4), de manière identique et indépendante (« les jetons tirés sont remis dans le sac après chaque partie »).

On obtient donc un schéma de Bernoulli et X suit la loi binomiale de paramètres 10 et 0,4.

b. $p(X=3) = \binom{10}{3} \times 0,4^3 \times (1-0,4)^{10-3} \approx 0,215$ donc la probabilité que le joueur gagne exactement trois parties sur les dix parties jouées est d'environ 0,215.

$$c. p(X \geq 4) = \sum_{k=4}^{10} \binom{10}{k} \times 0,4^k \times (1-0,4)^{10-k}$$

D'après la calculatrice : $p(X \geq 4) \approx 0,618$.

La probabilité que le joueur gagne au moins quatre parties sur les dix parties jouées est d'environ 0,618.

5. a. En notant Y la loi binomiale de paramètres n et 0,4 :

$$p_n = p(Y \geq 1) = 1 - p(Y=0) = 1 - \binom{n}{0} \times 0,4^0 \times (1-0,4)^n$$

d'où $p_n = 1 - 0,6^n$.

b. • On peut faire un tableau de valeurs et trouver la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle la probabilité de gagner au moins une partie est supérieure ou égale à 0,99 : $n=10$.

• On peut aussi résoudre l'inéquation $p_n \geq 0,99$ en utilisant la fonction ln, on trouve :

$$p_n \geq 0,99 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,6)} \leq n$$

Or $\frac{\ln(0,01)}{\ln(0,6)} \approx 9,02$ d'où la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle la probabilité de gagner au moins une partie est supérieure ou égale à 0,99 : $n=10$.