

Exercice 1 :

Partie A Test de l'algorithme :

p	2	2	2
k		1	2
u	5	$0,5 \times 5 + 0,5 \times (1 - 1) - 1,5 = 1$	$0,5 \times 1 + 0,5 \times (2 - 1) - 1,5 = -0,5$

Le nombre affiché en sortie est $-0,5$.

Partie B

1. Modification de l'algorithme :

Demander p
 $u \leftarrow 5$
 Pour k variant de 1 à p
 $u \leftarrow 0,5u + 0,5(k - 1) - 1,5$
 Afficher u
 Finpour

2. Variations de la suite (u_n) à partir du tableau :

Les premiers termes de la suite ne semblent pas être les termes d'une suite décroissante car $u_4 > u_3$ mais l'étude de quelques termes ne suffit pas à conclure, la suite est peut-être monotone à partir d'un certain rang.

3. (v_n) géométrique ?

Soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 0,1u_{n+1} - 0,1(n+1) + 0,5 = 0,1 \times (0,5u_n + 0,5n - 1,5) - 0,1(n+1) + 0,5$

$$v_{n+1} = 0,05u_n + 0,05n - 0,15 - 0,1n - 0,1 + 0,5 = 0,05u_n - 0,05n + 0,25 = 0,5 \times \left(\frac{0,05u_n}{0,5} - \frac{0,05n}{0,5} + \frac{0,25}{0,5} \right)$$

$$v_{n+1} = 0,5 \times (0,1u_n - 0,1n + 0,5) = 0,5v_n$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $0,5$ et de terme initial $v_0 = 0,1u_0 - 0,1 \times 0 + 0,5 = 1$.

4. v_n en fonction de n :

(v_n) est géométrique donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = 1 \times 0,5^n = 0,5^n$

5. u_n en fonction de n :

On a $v_n = 0,1u_n - 0,1n + 0,5$ d'où $0,1u_n = v_n + 0,1n - 0,5$ et en divisant par $0,1$

$$u_n = 10v_n + n - 5 \text{ soit } u_n = 10 \times 0,5^n + n - 5.$$

6. Variations de (u_n) :

On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$:

$$u_{n+1} - u_n = 10 \times 0,5^{n+1} + (n+1) - 5 - (10 \times 0,5^n + n - 5)$$

$$u_{n+1} - u_n = 10 \times 0,5^n \times 0,5 + n + 1 - 5 - 10 \times 0,5^n - n + 5$$

$$u_{n+1} - u_n = 10 \times 0,5^n \times 0,5 + 1 - 10 \times 0,5^n$$

$$u_{n+1} - u_n = 10 \times 0,5^n \times (0,5 - 1) + 1$$

$$u_{n+1} - u_n = -5 \times 0,5^n + 1$$

La suite de terme général $-5 \times 0,5^n$ est une suite géométrique de terme initial $-5 < 0$ et de raison $0,5 \in]0; 1[$.

Elle est donc croissante et $-5 \times 0,5^3 = -0,625 > -1$. Donc pour tout $n \geq 3$, $-5 \times 0,5^n > -1$

Ainsi, pour tout $n \geq 3$, $u_{n+1} - u_n > 0$ donc la suite (u_n) est croissante à partir du rang 3.

7. Limite de la suite (u_n) :

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^n = 0$.

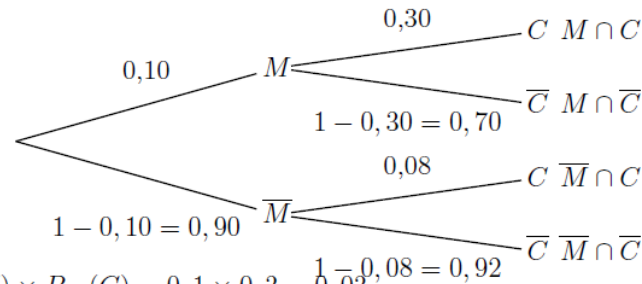
D'où par produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 10 \times 0,5^n = 0$.

De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n - 5 = +\infty$

Donc par somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 2 :

1. (a) En utilisant les données du texte, on peut construire l'arbre pondéré suivant :



(b) $P(M \cap C) = P(M) \times P_M(C) = 0,1 \times 0,3 = 0,03$

- (c) D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(C) &= P(M \cap C) + P(\overline{M} \cap C) \\ &= P(M) \times P_M(C) + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(C) = 0,1 \times 0,3 + 0,9 \times 0,08 = 0,03 + 0,072 = 0,102 \end{aligned}$$

2. On choisit au hasard une victime d'un accident cardiaque.

La probabilité qu'elle présente une malformation cardiaque de type anévrisme est $P_C(M)$:

$$P_C(M) = \frac{P(M \cap C)}{P(C)} = \frac{0,03}{0,102} \approx 0,2941$$

Partie B

1. On peut considérer que, choisir au hasard un échantillon de n personnes, peut être assimilé à un tirage avec remise de n personnes dans la population totale.

Or la probabilité qu'une personne souffre d'une malformation cardiaque de type anévrisme est

$P(M) = 0,1$ d'après le texte.

Donc on peut dire que la variable aléatoire X qui donne le nombre de personnes souffrant de cette malformation cardiaque suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,1$.

2. $n = 400$.

- (a) Comme X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(400; 0,1)$, $P(X = 35) = \binom{400}{35} 0,1^{35} (1 - 0,1)^{400-35}$;

le résultat donné par la calculatrice est approximativement 0,049 1.

La probabilité que 35 personnes de ce groupe présentent une malformation cardiaque de type anévrisme est d'environ 0,049 1.

- (b) $P(30 \leq X \leq 50) = P(X \leq 50) - P(X \leq 29) \approx 0,920 7$.

La probabilité qu'entre 30 et 50 personnes de ce groupe présentent une malformation cardiaque de type anévrisme est d'environ 0,920 7.

- (c) $E(X) = n \times p = 400 \times 0,1 = 40$. En moyenne, 40 personnes dans les groupes de 400 présentent une malformation cardiaque de type anévrisme.

3. $P(X \geq 1) \geq 0,99 \iff 1 - P(X = 0) \geq 0,99 \iff 1 - 0,9^n \geq 0,99$

Or, pour $n = 43$, $1 - 0,9^{43} \approx 0,9892$ et pour $n = 44$, $1 - 0,9^{44} \approx 0,9903$.

Il faut donc, au minimum, interroger 44 personnes.

Exercice 3 :

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = x + 1 + \frac{x}{e^x}.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

Soit g la fonction définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 1 - x + e^x.$$

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -1 + e^x$.

Or, $e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
g	$+\infty$	2	$+\infty$

Ainsi, on a :

2. Le minimum de g sur $\mathbb{R}$ vaut 2, donc g est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Partie B

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ en restant positif, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$.

Donc, par produit, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x} = -\infty$ et, par somme, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x + 1 + \frac{x}{e^x} = -\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$.

Donc, par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 + \frac{x}{e^x} = +\infty$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 1 + \frac{1 \times e^x - x \times e^x}{(e^x)^2} = 1 + \frac{(1-x)e^x}{e^{2x}} = 1 + (1-x)e^{-x} = e^{-x}(e^x + 1 - x) = e^{-x}(1 - x + e^x) = e^{-x}g(x).$$

x	$-\infty$	$+\infty$
e^{-x}	$+$	
$g(x)$	$+$	
$f'(x)$	$+$	
f	$-\infty$	$+\infty$

3.

4. (a) • f est continue sur $[-1; 0]$ car dérivable sur $\mathbb{R}$,
 • f est strictement croissante sur $[-1; 0]$,
 • $f(-1) = -e$ et $f(0) = 1$, donc, $0 \in [f(-1); f(0)]$

donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[-1; 0]$.

- (b) $\alpha \in [-0, 41; 0, 40]$

(c)

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

5. (a) $f(0) = 0 + 1 + \frac{0}{e^0} = 1$ et $f'(0) = e^{-0}g(0) = 2$, donc T a pour équation : $y = f'(0)(x-0) + f(0) = 2x + 1$.

- (b) On étudie le signe de $f(x) - (2x + 1) = \frac{x}{e^x} - x = x(e^{-x} - 1)$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	$-$	0	$+$
$e^{-x} - 1$	$+$	0	$-$
$f(x) - (2x + 1)$	$-$	0	$-$

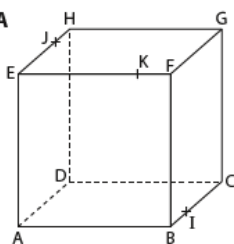
$$e^{-x} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^{-x} \geq e^0 \Leftrightarrow -x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$$

$\mathcal{C}$ est donc en dessous de sa tangente T au point d'abscisse 0.

Exercice 4 :

Partie A

1. a)



b) $I\left(1; \frac{1}{3}; 0\right)$, $J\left(0; \frac{2}{3}; 1\right)$ et $K\left(\frac{3}{4}; 0; 1\right)$

c) $\vec{IJ}\left(-1; \frac{1}{3}; 1\right)$ est un vecteur directeur de (IJ) et
 $\vec{IK}\left(-\frac{1}{4}; -\frac{1}{3}; 1\right)$ est un vecteur directeur de (IK).

2. a) $C(1; 1; 0)$ et $D(0; 1; 0)$ donc un point appartient à [CD] s'il existe un réel a tel que $L(a; 1; 0)$ et $0 \leq a \leq 1$

b) $\vec{IL}\left(a-1; \frac{2}{3}; 0\right)$.

Le point L est un point du plan (IJK) si : $\vec{IL} = \vec{IJ} - \vec{IK}$

On en déduit que $a-1 = -\frac{3}{4}$, soit $a = \frac{1}{4}$.

Partie B

1. a) $\vec{IL}\left(-\frac{3}{4}; \frac{2}{3}; 0\right)$ et $\vec{KJ}\left(-\frac{3}{4}; \frac{2}{3}; 0\right)$ donc $\vec{IL} = \vec{KJ}$:

IKJL est un parallélogramme.

b) Le milieu de [IJ] a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

c) (IJ) et (KL) sont les diagonales du parallélogramme IKJL, elles sont donc sécantes.

2. a) $\vec{IJ}\left(-1; \frac{1}{3}; 1\right)$ et $\vec{BH}\left(-1; 1; 1\right)$ ne sont pas colinéaires donc les droites (IJ) et (BH) ne sont pas parallèles.

I est un point de (BC) et J est un point de (EH) donc (IJ) et (BH) sont dans le plan (BCH).

Elles sont donc sécantes.

b) On note O le centre du cube.

$O\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $\vec{IO}\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{6}; \frac{1}{2}\right)$ et on remarque que $\vec{IO} = \frac{1}{2}\vec{IJ}$: les vecteurs $\vec{IO}$ et $\vec{IJ}$ sont colinéaires et donc O est un point du plan (IJK).

3. a) M est un point de (HG) donc $M(a; 1; 1)$ où a est un nombre réel.

$\vec{MF}(1-a; -1; 0)$ et $\vec{IL}\left(-\frac{3}{4}; \frac{2}{3}; 0\right)$ sont colinéaires si $\vec{IL} = -\frac{2}{3}\vec{MF}$, soit $-\frac{2}{3}(1-a) = -\frac{3}{4}$, c'est-à-dire $a = -\frac{1}{8}$.

Donc $M\left(-\frac{1}{8}; 1; 1\right)$

b) $\vec{MF}$ est colinéaire avec $\vec{IL}$ donc coplanaires avec $\vec{IL}$ et $\vec{IJ}$ qui sont deux vecteurs directeurs du plan (IJK). Par conséquent, la droite (MF) est parallèle au plan (IJK).