

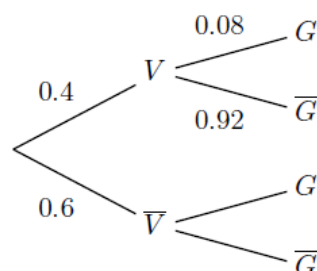
Exercice 1 :

Partie A

1. (a) Probabilité de l'événement G :

D'après l'énoncé, la probabilité que la personne ait contracté la grippe est $P(G) = 0,2$.

- (b) Arbre pondéré :



2. Probabilité que la personne choisie ait contracté la grippe et soit vaccinée :

On a $P(G \cap V) = P(V) \times P_V(G) = 0,4 \times 0,08 = 0,032$

Donc la probabilité que la personne choisie ait contracté la grippe et soit vaccinée est 0,032.

3. Probabilité que la personne ait contracté la grippe sachant qu'elle n'est pas vaccinée :

On a $P_{\bar{V}}(G) = \frac{P(\bar{V} \cap G)}{P(\bar{V})}$

Or, comme V et $\bar{V}$ forment une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales,

$P(G) = P(V \cap G) + P(\bar{V} \cap G)$

Ainsi $P_{\bar{V}}(G) = \frac{P(G) - P(V \cap G)}{1 - P(V)} = \frac{0,2 - 0,032}{1 - 0,4} = 0,28$

Donc la personne n'étant pas vaccinée, la probabilité qu'elle ait contracté la grippe est égale à 0,28.

Partie B

1. Loi de probabilité de X :

L'expérience : « Interroger un habitant du village » a deux issues possibles :

Le succès S : « La personne est vaccinée contre la grippe » de probabilité $p = 0,4$.

et l'échec : « La personne n'est pas vaccinée contre la grippe ».

On répète n fois cette épreuve de Bernoulli de façon identique et indépendante et X compte le nombre de succès.

Donc X suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,4$.

2. (a) Probabilité qu'exactly 15 des 40 personnes interrogées soient vaccinées :

On a $n = 40$ et $p = 0,4$ veut $P(X = 15)$

$$P(X = 15) = \binom{40}{15} \times 0,4^{15} \times (1 - 0,4)^{40-15} = \binom{40}{15} \times 0,4^{15} \times 0,6^{25} \approx 0,123$$

Donc la probabilité qu'exactly 15 des 40 personnes interrogées soient vaccinées est d'environ 0,123.

- (b) Probabilité qu'au moins la moitié des personnes interrogées soit vaccinée :

$$P(X \geq 20) = 1 - P(X \leq 19) \approx 0,130$$

La probabilité qu'au moins la moitié des personnes interrogées soit vaccinée est d'environ 0,130

- (c) Nombre moyen de personnes vaccinées dans ce groupe :

$$E(X) = n \times p = 40 \times 0,4 = 16$$

En répétant un très grand nombre de fois cette expérience, le nombre moyen de personnes vaccinées parmi les 40 personnes interrogées est de 16.

Exercice 2 :

1. (a) $u_1 = \frac{4}{5} = 0,8$; $u_2 = \frac{14}{13} \simeq 1,08$; $u_3 = \frac{40}{41} \simeq 0,98$; $u_4 = \frac{122}{121} \simeq 1,01$.
(b) On voit bien que $u_0 > 1$; $u_1 < 1$; $u_2 > 1$; $u_3 < 1$; $u_4 > 1$ donc le signe des différences $(u_n - 1)$ change à chaque rang :
si n pair c'est +
si n impair c'est -, comme $(-1)^n$.

(c) $u_{n+1} - 1 = \frac{u_n + 2 - (2u_n + 1)}{2u_n + 1} = \frac{1 - u_n}{2u_n + 1} = \frac{-u_n + 1}{2u_n + 1}.$

- (d) On a admis au début de l'énoncé que tous les u_n sont strictement positifs (on pourrait le démontrer par récurrence) ; démontrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}$: $(u_n - 1)$ a le même signe que $(-1)^n$:

L'initialisation est faite au b : $(u_0 - 1 > 0)$.

Hérédité : supposons que pour n entier naturel $(u_n - 1)$ ait le signe de $(-1)^n$; alors $(1 - u_n)$ a le signe opposé de $(u_n - 1)$ donc a le signe de $(-(-1)^n)$ donc de $(-1)^{n+1}$ et

$(2u_n + 1) > 0$, vu que tous les u_n sont strictement positifs, donc la fraction $\frac{1 - u_n}{2u_n + 1}$ a le signe de $(-1)^{n+1}$ et comme elle est égale à $(u_{n+1} - 1)$, on a prouvé que $(u_{n+1} - 1)$ a le signe de $(-1)^{n+1}$, l'hérédité est prouvée.

CONCLUSION : On a montré que $u_0 - 1 > 0$ et si pour n de $\mathbb{N}$, $(u_n - 1)$ a le signe de $(-1)^n$ entraîne que $(u_{n+1} - 1)$ a le signe de $(-1)^{n+1}$, donc d'après le principe de récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(u_n - 1)$ a le même signe que $(-1)^n$.

2. Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}.$

Vu que tous les u_n sont strictement positifs, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existe.

(a) $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{u_n + 2}{2u_n + 1} - 1}{\frac{u_n + 2}{2u_n + 1} + 1} = \frac{\frac{u_n + 2 - (2u_n + 1)}{2u_n + 1}}{\frac{u_n + 2 + 2u_n + 1}{2u_n + 1}} = \frac{u_n + 2 - (2u_n + 1)}{u_n + 2 + 2u_n + 1} = \frac{-u_n + 1}{3u_n + 3}.$

(b) $v_{n+1} = \frac{-u_n + 1}{3u_n + 3} = \frac{-1}{3} \cdot \frac{(u_n - 1)}{u_n + 1} = \frac{-1}{3} v_n.$

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison $\frac{-1}{3}.$

$$v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 1} = \frac{1}{3} \text{ donc } v_n = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{-1}{3}\right)^n \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

- (c) On admet que pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}.$

$$\text{Donc, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \text{ on a } u_n = \frac{1 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{-1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{-1}{3}\right)^n}.$$

Comme la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{-1}{3}$, donc $-1 < q < 1$, (v_n) tend vers 0, donc (u_n) converge vers 1.

Exercice 3 :

Partie A

1. Réponse **a)**

2. Réponse **d)**

Partie B

1. **a)** Pour tout réel x de l'intervalle $[-10; 5]$,

$$f'(x) = 1 \times e^{0,2x} + (x - 5) \times 0,2e^{0,2x}$$

$$f'(x) = (1 + 0,2x - 1)e^{0,2x}$$

$$f'(x) = 0,2xe^{0,2x}$$

b) Pour tout réel x de l'intervalle $[-10; 5]$, $e^{0,2x} > 0$
donc $f'(x)$ est du signe de $0,2x$.

On en déduit le tableau suivant :

x	-10	0	5
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$f(-10)$	0	5

$$f(-10) = -15e^{-2} + 5$$

$$f(-10) \approx 2,97$$

c) Le coefficient directeur de la tangente T est

$$f'(-5) = 0,2 \times (-5)e^{0,2 \times (-5)} = -e^{-1}$$

2. **a)** La fonction f' est dérivable sur $[-10; 5]$ et pour tout réel x de cet intervalle, $f''(x) = g(x)$

$$f''(x) = g'(x)(0,2 + 0,04x)e^{0,2x}$$

b) Pour tout réel x de l'intervalle $[-10; 5]$, $e^{0,2x} \geq 0$,

$f''(x)$ est donc du signe de $0,2 + 0,04x$.

x	-10	-5	5
$f''(x)$	-	0	+

$$0,2 + 0,04x = 0$$

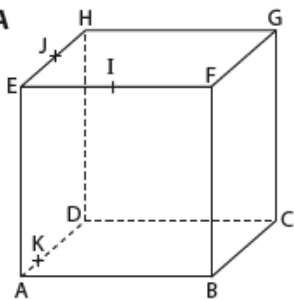
$$x = \frac{-0,2}{0,04} = -5$$

La fonction f est concave sur l'intervalle $[-10; -5]$ et est convexe sur l'intervalle $[-5; 5]$.

Exercice 4 :

Partie A

1.



2. a) $\overrightarrow{AE}(0;0;1)$ est un vecteur directeur de la droite (AE).

b) $\overrightarrow{FH}(-1;1;0)$ et $\overrightarrow{FK}\left(-1;\frac{1}{4};-1\right)$ sont deux vecteurs directeurs de (FHK).

c) On cherche s'il existe deux réels x, y tels que $\overrightarrow{AE} = x\overrightarrow{FH} + y\overrightarrow{FK}$ ce qui est équivalent au système :

$$\begin{cases} -x - y = 0 \\ x + \frac{1}{4}y = 0 \\ -y = 1 \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solution donc les vecteurs $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{FH}$, $\overrightarrow{FK}$ ne sont pas coplanaires et on peut donc en conclure que la droite (AE) n'est pas parallèle au plan (FHK).

Partie B

1. a) M est un point de la droite (AE) donc il existe un réel a tel que $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AE}$ donc $M(0;0;a)$

b) M est un point du plan (FHK) si les vecteurs $\overrightarrow{HM}$, $\overrightarrow{HF}$, $\overrightarrow{HK}$ sont coplanaires, donc s'il existe deux réels x, y tels que : $\overrightarrow{HM} = x\overrightarrow{HF} + y\overrightarrow{HK}$.

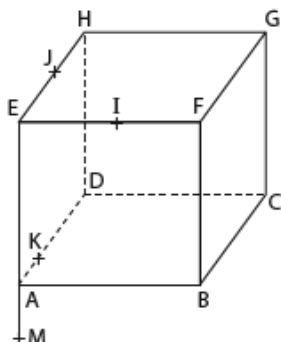
c) D'après la question 1. a), le point $\left(0;0;-\frac{1}{3}\right)$ est un point de la droite (AE).

De plus $\overrightarrow{HM}\left(0;-1;-\frac{4}{3}\right)$ et $\overrightarrow{HK}\left(0;-\frac{3}{4};-1\right)$ sont colinéaires car $\overrightarrow{HK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{HM}$ et donc $\overrightarrow{HM}$, $\overrightarrow{HF}$ et $\overrightarrow{HK}$ sont coplanaires.

Ainsi M est un point du plan (FHK).

En conclusion, M est le point d'intersection de la droite (AE) et du plan (FHK) et $\overrightarrow{HK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{HM}$, soit $x=0$ et $y = \frac{3}{4}$.

2.



Partie C

1. $\overrightarrow{AM}(-2;-1;-8)$ On cherche s'il existe deux réels x, y tels que : $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$ ce qui est équivalent au système :

$$\begin{cases} -x = -2 \\ y = -1 \\ -3x + 2y = -8 \end{cases}$$

Le système a pour solution $x=2$ et $y=-1$ donc $\overrightarrow{AM} = 2\vec{u} - \vec{v}$. Les vecteurs sont coplanaires. Le point M est un point de $\mathcal{P}$.

L'affirmation 1 est **vraie**.

2. On cherche s'il existe deux réels x, y tels que : $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$ ce qui est équivalent au système :

$$\begin{cases} -x = 1 \\ y = -2 \\ -3x + 2y = 4 \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solution. Les vecteurs $\vec{w}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ ne sont pas coplanaires donc la droite d n'est pas parallèle au plan $\mathcal{P}$.

L'affirmation 2 est **fausse**.

3. On cherche s'il existe deux réels x, y tels que :

$\vec{u}' = x\vec{u} + y\vec{v}$ ce qui est équivalent au système :

$$\begin{cases} -x = -1 \\ y = 1 \\ -3x + 2y = -1 \end{cases}$$

$x=1$ et $y=1$ est la solution du système donc

$\vec{u}' = \vec{u} + \vec{v}$: les vecteurs $\vec{u}'$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ sont coplanaires.

On cherche s'il existe deux réels x, y tels que :

$\vec{v}' = x\vec{u} + y\vec{v}$ ce qui est équivalent au système :

$$\begin{cases} -x = -3 \\ y = 2 \\ -3x + 2y = -5 \end{cases}$$

$x=3$ et $y=2$ est la solution du système donc

$\vec{v}' = 3\vec{u} + 2\vec{v}$: les vecteurs $\vec{v}'$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ sont coplanaires.

Ainsi les vecteurs $\vec{u}'$, $\vec{v}'$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ sont coplanaires.

Le plan $\mathcal{Q}$ est parallèle au plan $\mathcal{P}$.