

EXERCICE 1 : Encadrement par balayage

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = (x + 1)e^x + x$.

1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[-1 ; 0]$.

2) On considère l'algorithme ci-contre :

a) Justifier la pertinence du choix $a = -1$.

.....

b) On choisit $h = 0,1$. Compléter le tableau d'étapes ci-dessous et donner le résultat affiché ?

.....

Saisir a, h
 $x \leftarrow a$
 Tant que $f(a) \times f(x) > 0$ faire
 $x \leftarrow x + h$
 Fin tant que
 Afficher $x - h, x$

Etape	a	x	$f(a)$ (arrondie à 10^{-3})	$f(x)$ (arrondie à 10^{-3})	Test $f(a) \times f(x) > 0$?
Initialisation	-1	-1	-1	-1	oui
Etape 1		-0,9	-1	$f(-0,9) \approx -0,859$	
Etape 2		-0,8		$f(-0,8) \approx -0,710$	
.....		-0,7		$f(-0,7) \approx -0,551$	
.....				$f(-0,6) \approx -0,381$	
.....				$f(-0,5) \approx -0,197$	
.....				$f(-0,4) \approx 0,002$	
.....					

c) Que teste la ligne « Tant que $(a) \times f(x) > 0$ » de l'algorithme ?

.....

d) Que permet d'obtenir cet algorithme :

e) Compléter la fonction Python ci-dessous, puis l'exécuter pour $h = 0,01$. Quels sont les résultats affichés ?

.....

.....

.....

```

from math import *
def f(x) :
    return .....

def balayage(a, h) :
    x = .....
    n = 0
    while f(a) * f(x) ..... :
        x = .....
        n = .....

    return (....., ....., .....)
        
```

EXERCICE 2 : Encadrement par dichotomie avec tableur

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = e^{0,5x} + x^2 - 4$.

On veut déterminer un encadrement d'une solution α de l'équation $f(x) = 0$ sur $[0 ; 2]$.

La dichotomie consiste à partager l'intervalle $[a ; b]$ en deux. On calcule $m = \frac{b+a}{2}$. Il y a alors deux possibilités : soit $f(a) \times f(m) < 0$, soit $f(m) \times f(b) < 0$. On choisit le sous-intervalle où il y a le changement de signe car il contient α et on poursuit.

Ici, $a = 0$ et $b = 2$ donc $m = 1$.

$f(a) \times f(m) > 0$ donc $f(a)$ et $f(m)$ ont le même signe donc $\alpha \notin [a ; m]$

$f(m) \times f(b) < 0$ donc $f(m)$ et $f(b)$ sont de signes contraires donc $\alpha \in [m ; b]$.

1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0 ; 2]$.

2) A l'aide d'un tableur, on construit ce tableau :

	A	B	C	D	E	F	G
1	a	b	$m=(a+b)/2$	$f(a)$	$f(b)$	$f(m)$	$b-a$
2	0	2	1	-3	2,718282	-1,35128	2

a) Quelle formule doit-on entrer en **E2** et **F2** pour obtenir respectivement les images de m et b par f .

=	=
---	---

b) En utilisant la fonction : **SI(test ; valeur_si_vrai ;valeur_si_faux)**, quelle formule doit-on entrer en **A3** et **B3** pour appliquer la méthode de dichotomie ?

=	=
---	---

c) Recopier les formules vers la droite et le bas pour obtenir un résultat semblable à celui-ci :

	A	B	C	D	E	F	G
1	a	b	$m=(a+b)/2$	$f(a)$	$f(b)$	$f(m)$	$b-a$
2	0	2	1	-3	2,718282	-1,35128	2
3	1	2	1,5	-1,3512787	2,718282	0,36700	1
4	1	1,5	1,25	-1,3512787	0,367000	-0,56925	0,5
5	1,25	1,5	1,375	-0,569254	0,367000	-0,12064	0,25
6	1,375	1,5	1,4375	-0,1206375	0,367000	0,11827	0,125
7	1,375	1,4375	1,40625	-0,1206375	0,118273	-0,00241	0,0625

d) Continuer jusqu'à déterminer un encadrement de α 10^{-4} près ainsi que le nombre de tests effectués.
 $a =$ $b =$ $\text{nbre de tests} =$

EXERCICE 3 : La méthode de Newton.

Hypothèses et Principe de la méthode :

a) On suppose ici $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, f deux fois dérivables, strictement croissante et convexe $[a ; b]$.

On peut conclure que f admet une seule racine sur $[a ; b]$.

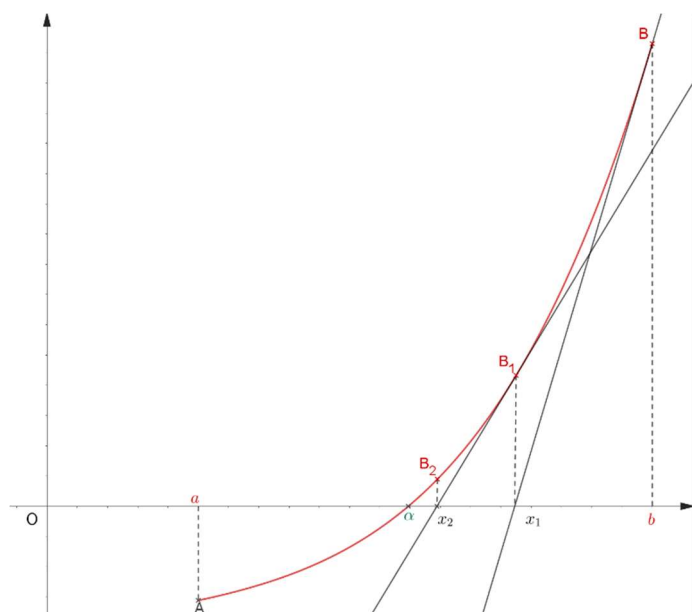
b) On suppose aussi que $f' \neq 0$ et f'' continue sur l'intervalle $[a ; b]$.

Dans le repère orthogonal ci-contre, la courbe en rouge représentée la fonction f et $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$.

1^{er} étape : on trace la tangente en B à la courbe, elle coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse x_1

2^{ème} étape : on trace la tangente en $B_1(x_1 ; f(x_1))$ à la courbe, elle coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse x_2

.....



On note x_n l'abscisse du point B_n . On définit ainsi une suite (x_n) de réels de $[a ; b]$ et on admet que pour tout entier naturel n , $f(x_n) \geq 0$.

1) Relation entre x_{n+1} et x_n

On note x_n l'abscisse du point B_n .

a) Justifier qu'une équation de la tangente à la courbe en B_n est $y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$

b) En déterminant le point d'intersection de la tangente à la courbe en B_n avec l'axe des abscisses, justifier que $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

2) Etude de la suite (x_n)

la suite (x_n) est définie par $x_0 = b$ et pour tout entier naturel n , $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

a) Montrer que, sur $[a ; b]$, la fonction $g: x \rightarrow x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ est croissante et vérifie $g(x) \geq \alpha$.

b) Démontrer que la suite (x_n) est décroissante et minorée. *Récurrence facile avec (a).*

c) En déduire que la suite (x_n) est convergente et déterminer algébriquement sa limite.

3) Un programme en langage Python

Dans cette partie on considère la fonction f définie sur $[0 ; 2]$, par $f(x) = e^{0,5x} + x^2 - 4$.

- a)** On décide pour la suite du TP de prendre $x_0 = 2$.
Compléter à l'aide de la calculatrice le tableau ci-dessous pour $n = 0, n = 1$ et $n = 2$.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	x_{n+1}
0					
1					
2					

- b)** Quelle est la précision obtenue ?
- 4)** Voici un programme incomplet écrit en langage Python qui met en œuvre la suite (x_n) définie ci-dessous.
- a)** Compléter le programme. La fonction $df(x)$ retourne la dérivée de la fonction f .
- b)** Saisir ce script et expliquer la condition de la ligne 19.
- c)** Quel est le nombre d'itérations pour avoir une précision de 10^{-3} ? Même question pour des précisions de 10^{-6} et 10^{-1} .
- d)** Comparer le nombre d'itérations nécessaires pour les méthodes de Newton et de la dichotomie en prenant $p = 4$.

```

1 from math import *
2
3 def f(x):
4
5     y=.....
6
7     return y
8
9
10 def df(x):
11
12     y=.....
13
14     return y
15
16 def Newton(b, p):
17     X=b
18     n=0
19     while abs(f(X))>10**(-p):
20
21         X=.....
22
23         n=n+1
24
25     return n,X

```