

EXERCICE 1

10 pts

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $g(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln x$

1. Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
2. Justifier qu'il existe un unique réel α de $]0; +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.
3. En déduire le signe de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
4. Donner une valeur approchée de α , arrondie au centième.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $f(x) = 2x - \frac{\ln x}{x^2}$
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan.

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
2. Justifier que $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$.
3. En déduire le tableau de variations de la fonction f .
4. Soit Δ la droite d'équation $y = 2x$.
 - a. Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par : $h(x) = f(x) - 2x$
 - b. Quelle interprétation peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$ et la droite Δ ?
 - c. Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite Δ .
5. Montrer que $f(\alpha) = 3\alpha - \frac{1}{2\alpha^2}$

EXERCICE 2

3 pts

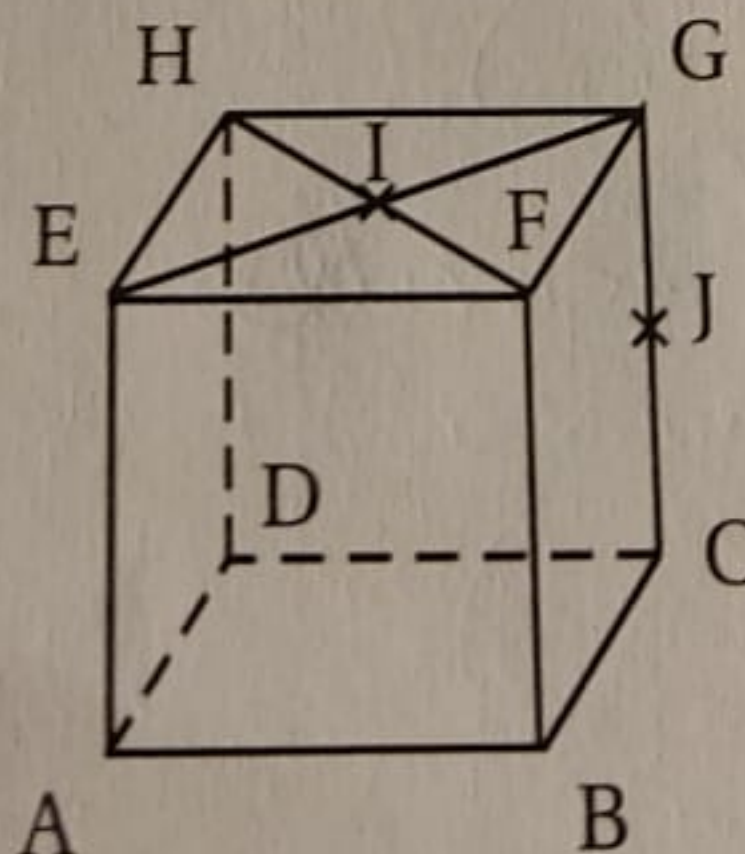
les deux questions suivantes sont indépendantes

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (I) : $\ln(x+3) \leq 2\ln(x+1)$
2. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$ telle que $f''(x) = \frac{1+2\ln x}{x^3}$
Déterminer le plus grand intervalle sur lequel f est convexe.

EXERCICE 3

2 pts

ABCDEFGH est un cube d'arête a . I est le centre de la face EFGH, et J est le milieu de l'arête [GC]



Calculer les produits scalaires suivants **sans utiliser de repère!**

a/ $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{FB}$

b/ $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{DB}$

EXERCICE 4

6 pts

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points suivants :

$$A(2; -1; 0), B(3; -1; 2), C(0; 4; 1) \text{ et } S(0; 1; 4).$$

1. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.
2. On considère le point H(2; 2; 3)
 - a. Montrer que H est le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC).
 - b. En déduire la distance du point S au plan (ABC).
3. On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est $V = \frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$.
Calculer le volume du tétraèdre SABC.
4. On veut déterminer une mesure de l'angle $\widehat{ASB}$
 - a. Calculer $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB}$
 - b. En déduire une mesure de l'angle $\widehat{ASB}$ approchée au dixième de degré.

EXERCICE 5

2 pts

ABCD est un tétraèdre régulier (c'est à dire que ses quatre faces sont des triangles équilatéraux).
Montrer que les droites (BC) et (AD) sont orthogonales.

EXERCICE 6

2 pts

On s'intéresse dans cet exercice à la désintégration de noyaux d'uranium radioactifs.
On admet que le nombre moyen $N(t)$ de noyaux non encore désintégrés à l'instant t ($t \geq 0$) est égal à :

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

où N_0 est le nombre initial de noyaux, et où λ est un réel strictement positif.

1. La demi-vie d'un élément radioactif est l'instant noté $T_{\frac{1}{2}}$ auquel la moitié des noyaux se seront désintégrés.
Montrer que $T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\lambda}$
2. Montrer que : pour tout entier n , $N(t + n T_{\frac{1}{2}}) = \left(\frac{1}{2}\right)^n N(t)$