

Correction – Interrogation n°3

Calculatrice interdite

1. Déterminer, en justifiant, la limite des suites définie sur $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$ par :

a. $u_n = 3 + \frac{1}{n^3 + 2}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^3 + 2) = +\infty$ donc par quotient $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3 + 2} = 0$

Ainsi, par somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$. **1 pt**

b. $v_n = \frac{5n^2 - n + 3}{n^2 + n + 3}$

Soit $n \neq 0$.

$$v_n = \frac{n^2 \left(5 - \frac{n}{n^2} + \frac{3}{n^2}\right)}{n^2 \left(1 + \frac{n}{n^2} + \frac{3}{n^2}\right)} = \frac{5 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}}$$

D'une part, $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n^2} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(5 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}\right) = 5$

D'autre part, de la même manière on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}\right) = 1$

Ainsi, par quotient, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{5}{1} = 5$

2,5 pts

c. $w_n = \left(n + \frac{1}{n}\right) \left(\frac{1}{n^4} - 5\right)$

D'une part, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n + \frac{1}{n}\right) = +\infty$

D'autre part, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^4} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^4} - 5\right) = -5$

Ainsi, par produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = -\infty$

1,5 pt

d. $t_n = \frac{2\sqrt{n} + 3}{3n + \sqrt{n}}$

Soit $n \neq 0$.

$$t_n = \frac{\sqrt{n} \left(2 + \frac{3}{\sqrt{n}}\right)}{n \left(3 + \frac{\sqrt{n}}{n}\right)} = \frac{\sqrt{n}}{n} \times \frac{2 + \frac{3}{\sqrt{n}}}{3 + \frac{1}{\sqrt{n} \times \sqrt{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{2 + \frac{3}{\sqrt{n}}}{3 + \frac{1}{\sqrt{n}}}$$

D'une part : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

D'autre part : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 3$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{3}{\sqrt{n}}\right) = 2$ donc par quotient $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{3}{\sqrt{n}}}{3 + \frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{2}{3}$

Ainsi, par produit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 0 \times \frac{2}{3} = 0$

2,5 pts

2. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{1}{2n+1}$.
On admet que la suite (u_n) converge vers 0.
On souhaite déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n < 0,001$.

a. Compléter le programme Python. **1,5 pt**

$$u_0 = \frac{1}{2 \times 0 + 1} = 1$$

```
n = 0
U = 1
while U >= 0.001 :
    n = n + 1
    U = 1/(2*n+1)
print(n)
```

b. Déterminer cet entier par le calcul.

Astuce : $0,001 = \frac{1}{1000}$

$$\begin{aligned} & u_n < 0,001 \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{2n+1} < \frac{1}{1000} \\ \Leftrightarrow & 1 < \frac{2n+1}{1000} \quad \text{car } 2n+1 > 0 \text{ puisque } n \in \mathbb{N} \\ \Leftrightarrow & 1000 < 2n+1 \quad \text{car } 1000 > 0 \\ \Leftrightarrow & 999 < 2n \\ \Leftrightarrow & \frac{999}{2} < n \quad \text{car } 2 > 0 \\ \Leftrightarrow & n > 499,5 \\ \Leftrightarrow & n \geq 500 \quad \text{car } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Ainsi, le plus petit entier recherché est $n = 500$.

1 pt