

Terminale G – Annales corrigées 2

Exercice 1

On s'intéresse à la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -2(x+2)e^{-x}$$

Partie A

1. Calculer $f(-1)$ et en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

$$f(-1) = -2(-1+2)e^{-(-1)} = -2e^1 = -2e \simeq -5,44$$

2. Justifier que $f'(x) = 2(x+1)e^{-x}$ où f' est la fonction dérivée de f .

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = (-2x-4)e^{-x}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = -2 \times e^{-x} + (-2x-4) \times (-e^{-x}) = -2e^{-x} + 2xe^{-x} + 4e^{-x} = (2x+2)e^{-x} = 2(x+1)e^{-x}$$

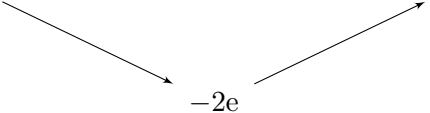
3. En déduire les variations de la fonction f .

Étudions le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Sur $\mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$ car la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Donc $f'(x)$ est du signe de $x+1$.

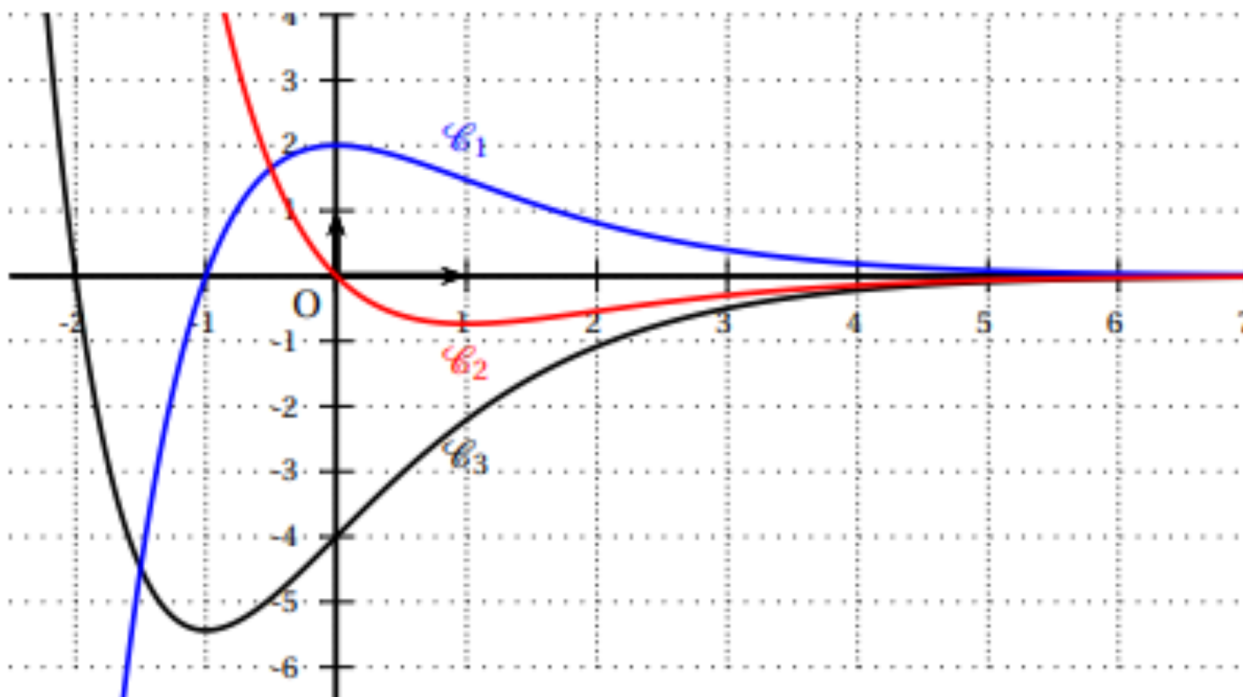
$$x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ et } x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1.$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
Signes de $x+1$	$-$	0	$+$
Signes de $f'(x)$	$-$	0	$+$
Variations de f			

Partie B

Dans le repère orthogonal ci-dessous trois courbes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ ont été représentées.

L'une de ces courbes représente la fonction f , une autre représente sa dérivée et une troisième représente sa dérivée seconde.



1. Identifier chaque courbe.

La courbe représentative de f est décroissante sur $] -\infty; -1]$ et croissante sur $[-1; +\infty[$.
C'est donc $\mathcal{C}_3$.
La courbe représentative de f' est négative sur $] -\infty; -1]$ et positive sur $[-1; +\infty[$.
C'est donc $\mathcal{C}_1$.
La courbe représentative de f'' est donc la courbe restante, c'est à dire $\mathcal{C}_2$.

2. Étudier la convexité de la fonction f .
Donner les coordonnées du point d'inflexion de la courbe représentative de f .

Étudions le signe de $f''(x)$ sur $\mathbb{R}$.
Graphiquement,
La fonction f'' est positive sur $] -\infty; 0]$ donc la fonction f est convexe sur $] -\infty; 0]$.
La fonction f'' est négative sur $[0; +\infty[$ donc la fonction f est concave sur $[0; +\infty[$.
 f'' s'annule en changeant de signe en $x = 0$. Donc la courbe représentative de f possède un point d'inflexion de coordonnées $(0; f(0))$, c'est à dire $(0; -4)$.

Exercice 2

On considère un double cône, de rayon r , de hauteur h et d'arête 3.

1. Déterminer l'expression de r^2 en fonction de h .

Le triangle rouge est rectangle. D'après le théorème de Pythagore :
 $3^2 = h^2 + r^2$, d'où $r^2 = 3^2 - h^2 = 9 - h^2$.

2. Déterminer l'expression du volume V du cône en fonction de h .

Le volume d'un cône est donné par la formule : $V = \frac{1}{3} \mathcal{A}_{\text{base}} h = \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

3. Soit f la fonction définie sur $[0; 3]$ par :

$$f(x) = \frac{2\pi}{3}(9x - x^3).$$

Dresser le tableau de variation de f sur $[0; 3]$.

La fonction f est dérivable sur $[0 ; 3]$ comme fonction polynôme.

$$\text{Pour tout } x \in [0 ; 3], f'(x) = \frac{2\pi}{3}(9 - 3x^2) = \frac{2\pi \times 3(3 - x^2)}{3} = 2\pi(3 - x^2) = 2\pi(\sqrt{3} - x)(\sqrt{3} + x)$$

Étudions le signe de $f'(x)$ sur $[0 ; 3]$.

C'est un polynôme du second degré ayant pour racines $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$.

x	0	$\sqrt{3}$	3
Signes de $f'(x)$	+	0	-
Variations de f	0	$4\pi\sqrt{3}$	0

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(3) &= 0 \\ f(\sqrt{3}) &= \frac{2\pi}{3}(9\sqrt{3} - (\sqrt{3})^3) = \frac{2\pi}{3}(9\sqrt{3} - 3\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3} \times 6\sqrt{3} = 4\pi\sqrt{3} \end{aligned}$$

4. En déduire le volume maximal du cône.

$$\text{Le double cône a pour volume } 2V = \frac{2\pi}{3}r^2h = \frac{2\pi}{3}(9 - h^2)h = \frac{2\pi}{3}(9h - h^3).$$

De plus, h prend ses valeurs dans l'intervalle $[0 ; 3]$.

D'après la question précédente, le double cône a pour volume maximal $4\pi\sqrt{3}$

Exercice 3

On modélise le nombre de malades (en milliers) dans un pays lors d'une épidémie, en fonction du nombre t de jours écoulés depuis l'apparition d'une maladie.

Cette modélisation est donnée par la fonction f définie sur $[0 ; 60]$ par $f(t) = t^2 e^{-0,1t}$.

1. Calculer $f'(t)$ pour tout réel de l'intervalle $[0; 60]$.

La fonction f est dérivable sur $[0 ; 60]$ comme produit et composée de fonctions dérivables sur $[0 ; 60]$.

Pour tout $t \in [0 ; 60]$,

$$f'(t) = 2t \times e^{-0,1t} + t^2 \times (-0,1)e^{-0,1t} = 2te^{-0,1t} - 0,1t^2 e^{-0,1t} = (-0,1t^2 + 2t)e^{-0,1t}$$

2. (a) Déterminer le signes de $f'(t)$ sur $[0 ; 60]$.

(b) Déterminer les variations de $f'(t)$ sur $[0 ; 60]$.

Étudions le signe de $f'(t)$ sur $[0 ; 60]$.

Sur $[0 ; 60]$, $e^{-0,1t} > 0$ car la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Donc $f'(t)$ est du signe de $-0,1t^2 + 2t$. C'est un polynôme du second degré.

$$-0,1t^2 + 2t = 0 \Leftrightarrow t(-0,1t + 2) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ ou } -0,1t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ ou } -0,1t = -2$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \text{ ou } t = \frac{-2}{-0,1} = 20$$

$a = -0,1 < 0$ (signe de a à l'extérieur des racines).

t	0	20	60
Signes de $-0,1t^2 + 2t$	+	0	-
Signes de $f'(t)$	+	0	-
Variations de f			

$$f(0) = 0^2 e^{-0,1 \times 0} = 0$$

$$f(0) = 20^2 e^{-0,1 \times 20} = 400e^{-2} \simeq 54,134$$

$$f(0) = 60^2 e^{-0,1 \times 60} = 3600e^{-6}$$

(c) Déterminer au bout de combien de jours le nombre des malades est maximal puis préciser le nombre approximatif de malades ce jour-là.

D'après le tableau de variations de la question précédente, la fonction f possède un maximum, $400e^{-2} \simeq 54,134$, atteint pour $t = 20$.

Au bout de 20 jours, le nombre de malades est maximal. Ce nombre maximal est d'environ 54 134 personnes.

3. Démontrer que pour tout réel t de $[0 ; 60]$, $f''(t) = (0,01t^2 - 0,4t + 2)e^{-0,1t}$.

La fonction f' est dérivable sur $[0 ; 60]$ comme produit et composée de fonctions dérivables sur $[0 ; 60]$.

Pour tout $t \in [0 ; 60]$,

$$f''(t) = (-0,2t + 2) \times e^{-0,1t} + (-0,1t^2 + 2t) \times (-0,1)e^{-0,1t} = (-0,2t + 2) \times e^{-0,1t} + (0,01t^2 - 0,2t)e^{-0,1t} = (0,01t^2 - 0,4t + 2)e^{-0,1t}$$

4. (a) Étudier la convexité de la fonction f sur $[0 ; 60]$.

Pour étudier la convexité de f sur $[0 ; 60]$, on étudie le signe de $f''(t)$ sur $[0 ; 60]$.

Sur $[0 ; 60]$, $e^{-0,1t} > 0$ car la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Donc $f''(t)$ est du signe de $0,01t^2 - 0,4t + 2$. C'est un polynôme du second degré ($a = 0,01$, $b = -0,4$ et $c = 2$).

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0,08 > 0.$$

$\Delta > 0$ donc le polynôme $0,01t^2 - 0,4t + 2$ possède deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{0,4 - \sqrt{0,08}}{2 \times 0,01} = \frac{0,4 - \sqrt{0,08}}{0,02} \simeq 6 \in [0 ; 60]$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{0,4 + \sqrt{0,08}}{2 \times 0,01} = \frac{0,4 + \sqrt{0,08}}{0,02} \simeq 34 \in [0 ; 60]$$

t	0	$\frac{0,4 - \sqrt{0,08}}{0,02}$	$\frac{0,4 + \sqrt{0,08}}{0,02}$	60
Signes de $0,01t^2 - 0,4t + 2$	+	0	-	0
Signes de $f'(t)$	+	0	-	0

La fonction f'' est positive sur $\left[0 ; \frac{0,4 - \sqrt{0,08}}{0,02}\right]$ et sur $\left[\frac{0,4 + \sqrt{0,08}}{0,02} ; 60\right]$ donc la fonction f est convexe sur $\left[0 ; \frac{0,4 - \sqrt{0,08}}{0,02}\right]$ et sur $\left[\frac{0,4 + \sqrt{0,08}}{0,02} ; 60\right]$.

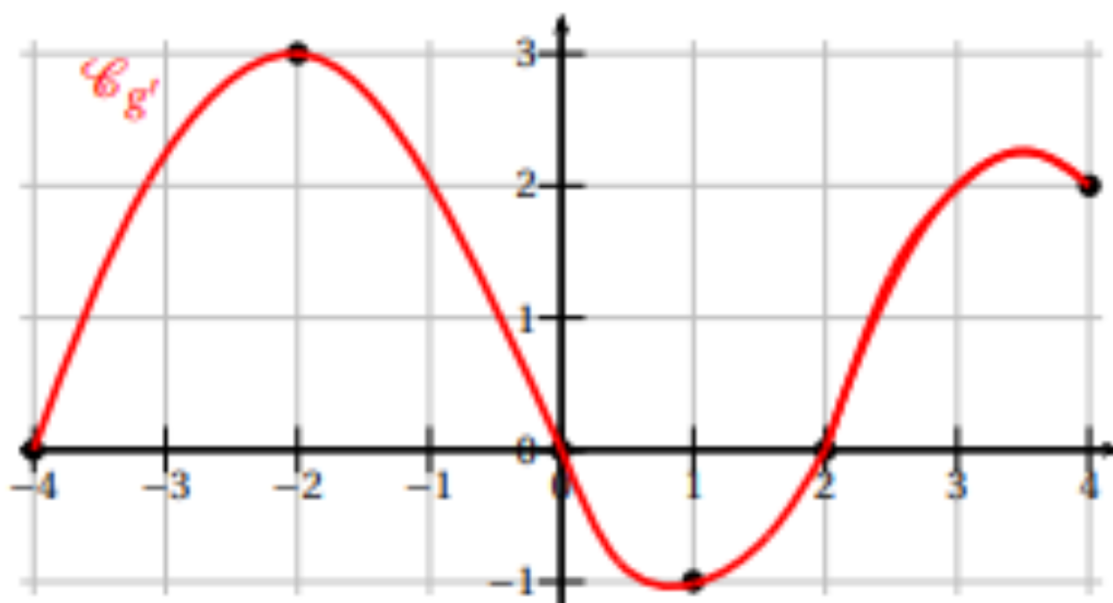
La fonction f'' est négative sur $\left[\frac{0,4 - \sqrt{0,08}}{0,02} ; \frac{0,4 + \sqrt{0,08}}{0,02}\right]$ donc la fonction f est concave sur $\left[\frac{0,4 - \sqrt{0,08}}{0,02} ; \frac{0,4 + \sqrt{0,08}}{0,02}\right]$.

- $$\frac{0,4 - \sqrt{0,08}}{0,02} \simeq 6 < 15 \text{ et } \frac{0,4 + \sqrt{0,08}}{0,02} \simeq 34 > 15.$$
 Sur l'intervalle $[0 ; 15]$, f'' s'annule en changeant de signe une et une seule fois, en $t = \frac{0,4 - \sqrt{0,08}}{0,02} \simeq 5,858$.
 Donc la fonction f admet bien un unique point d'inflexion sur $[0 ; 15]$.
 Au début de l'épidémie, le nombre de malades va augmenter, jusqu'à atteindre 5 858 malades, puis va continuer d'augmenter, mais cette augmentation va devenir plus lente.

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

- Formellement, $f'(x) = 1 \times e^{x^2} + x \times 2xe^{x^2} = (1 + 2x^2)e^{x^2}$
- Réponse c**

2. On suppose que g est une fonction dérivable sur l'intervalle $[-4 ; 4]$. On donne ci-dessous la représentation graphique de sa fonction dérivée g' .



On peut affirmer que :

- a. g admet un maximum en -2
- b. g est croissante sur $[1 ; 2]$
- c. g est convexe sur l'intervalle $[1 ; 2]$
- d. g admet un minimum en 0

Sur $[-4 ; 0]$, $g'(x) \geq 0$, sur $[0 ; 2]$, $g'(x) \leq 0$ et $g'(0) = 0$.
Donc g admet un minimum en 0 .

Réponse d

3. On considère une fonction f définie et dérivable sur $[-2 ; 2]$. Le tableau de variations de la fonction f' dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[-2 ; 2]$ est donné par :

x	-2	-1	0	2
variations de f'	1	0	-2	-1

La fonction f est :

- a. convexe sur $[-2 ; -1]$
- b. concave sur $[0 ; 1]$
- c. convexe sur $[-1 ; 2]$
- d. concave sur $[-2 ; 0]$

Sur $[-2 ; 0]$, f' est décroissante, donc f est concave.
Réponse d

4. Si H est une primitive d'une fonction h définie et continue sur $\mathbb{R}$, et si k est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = h(2x)$, alors, une primitive K de k est définie sur $\mathbb{R}$ par :

a. $K(x) = H(2x)$

b. $K(x) = 2H(2x)$

c. $K(x) = \frac{1}{2}H(2x)$

d. $K(x) = 2H(x)$

Formellement, pour $K(x) = \frac{1}{2}H(2x)$

$$K'(x) = \frac{1}{2} \times 2 \times H'(2x) = h(2x) = k(x)$$

Réponse c

5. L'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 1 de la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$ est :

a. $y = ex + e$

b. $y = 2ex - e$

c. $y = 2ex + e$

d. $y = ex$

Formellement, $f'(x) = 1 \times e^x + xe^x = (1+x)e^x$

$$f'(1) = 2e \text{ et } f(1) = e$$

La tangente au point d'abscisse 1 a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$$y = 2e(x-1) + e$$

$$y = 2ex - 2e + e$$

$$y = 2ex - e$$

Réponse b