

Manuel page 135 capacité 7 et capacité 8 page 133 capacités 6

Exercice 1 :Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{n-1}{n+4}$

1. Montrer que (u_n) est majorée par 1
2. Montrer que (u_n) est croissante
3. En déduire que (u_n) converge

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n - 1 = \frac{n-1}{n+4} - 1 = \frac{n-1-(n+4)}{n+4} = \frac{-5}{n+4} < 0$$

donc $u_n < 1$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)-1}{(n+1)+4} - \frac{n-1}{n+4} = \frac{n}{n+5} - \frac{n-1}{n+4}$$

$$= \frac{n(n+4) - (n-1)(n+5)}{(n+5)(n+4)}$$

$$= \frac{n^2 + 4n - n^2 + 4n + 5}{(n+5)(n+4)}$$

$$= \frac{5}{(n+5)(n+4)} > 0$$

$u_{n+1} > u_n$ donc la suite (u_n) est strictement croissante

3. La suite (u_n) est croissante et majorée donc elle converge

Exercice 2 :Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = n^2 + 4$

1. Montrer que la suite (v_n) est minorée par 4
2. Etudier les variations de la suite (v_n)
3. Peut-on appliquer le théorème de convergence des suites monotones

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2 \geq 0$

$$n^2 + 4 \geq 4$$

$$\text{donc } v_n \geq 4$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} - v_n = (n+1)^2 + 4 - (n^2 + 4)$$

$$= n^2 + 2n + 1 + 4 - n^2 - 4$$

$$= 2n + 1 > 0$$

$v_{n+1} > v_n$ donc la suite (v_n) est strictement croissante

3. La suite est croissante et minorée on ne peut pas appliquer les théorèmes de convergence des suites monotones. Il faudrait avoir croissante majorée ou décroissante minorée
remarque par somme de limites on sait que la suite diverge vers $+\infty$

N°47 p 141 :

47



CALC

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - 6n + 4$.

1. a. À l'aide d'une calculatrice, calculer les 10 premiers termes de la suite (u_n) .

b. -1 peut-il être un minorant de (u_n) ?

c. 20 peut-il être un majorant de (u_n) ?

2. Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n + 5 = (n-3)^2$.

3. En déduire un minorant de (u_n) .

A	B
n	U_n
0	4
1	-1
2	-4
3	-5
4	-4
5	-1
6	4
7	11
8	20
9	31

-1 ne peut pas être un minorant de (u_n) car

$$u_2 = -4 < -1$$

20 n'est pas un majorant car $u_9 = 31 > 20$

2. Pour tout entier naturel n ,

$$(n-3)^2 = n^2 - 6n + 9 = n^2 - 6n + 4 + 5 = u_n + 5$$

3. Pour tout entier naturel n , $u_n + 5 = (n-3)^2 \geq 0$

$$\text{Donc } u_n \geq -5$$

-5 est un minorant de la suite (u_n)

Exercice 3 :Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n ,

$$1 \leq u_{n+1} \leq u_n$$

2. En déduire que la suite (u_n) est convergente

1. $H(n)$: " $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$ "

Initialisation :

$$u_1 = \sqrt{u_0 + 1} = \sqrt{2 + 1} = \sqrt{3}$$

$$1 \leq u_1 \leq u_0$$

Donc l'hypothèse de récurrence est vraie au rang 0

Hérédité : Soit n en entier tel que $H(n)$ soit vraie

$$1 \leq u_{n+1} \leq u_n$$

$$2 \leq u_{n+1} + 1 \leq u_n + 1$$

La fonction racine carrée est strictement

croissante sur $[0; +\infty[$ donc

$$\sqrt{2} \leq \sqrt{u_{n+1} + 1} \leq \sqrt{u_n + 1}$$

$$1 \leq \sqrt{2} \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

$H(n+1)$ est vraie

Conclusion : Par principe de récurrence la propriété est vraie pour tout entier n

2. La suite est décroissante et minorée par 1 donc elle converge

N°49 p 141 :

49  **CALC** Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 3$.

1. a. À l'aide de la calculatrice, calculer les 10 premiers termes de la suite.

b. Conjecturer le sens de variation de (u_n) et une majoration de (u_n) .

2. Montrer par récurrence que (u_n) est majorée par 9.

3. Montrer que $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{3}u_n + 3$, puis en déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

4. Justifier que la suite (u_n) converge.

49 1. a. $u_0 = 2$; $u_1 = \frac{13}{3} \approx 4,3$; $u_2 = \frac{53}{9} \approx 5,9$; $u_3 = \frac{187}{27} \approx 6,9$; $u_4 = \frac{617}{81} \approx 7,6$; $u_5 = \frac{1963}{243} \approx 8,1$; $u_6 = \frac{6113}{729} \approx 8,4$; $u_7 = \frac{18787}{2187} \approx 8,6$; $u_8 = \frac{57257}{6561} \approx 8,7$; $u_9 \approx 8,8$.

b. (u_n) semble être croissante et majorée par 9.

2. Par récurrence sur la propriété $P(n)$: $u_n \leq 9$.

Initialisation : on a $u_0 \leq 9$. $P(0)$ est vraie.

Hérédité : On considère un entier naturel n tel que $u_n \leq 9$. Alors en multipliant chaque membre de l'inégalité par $\frac{2}{3}$ et en ajoutant 3 on obtient $u_{n+1} \leq 9$.

3. Pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + 3 - u_n = -\frac{1}{3}u_n + 3$.

Comme $u_n \leq 9$ alors $-\frac{1}{3}u_n + 3 \geq 0$ et donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$. La suite est croissante.

4. La suite est croissante et majorée donc elle converge. (Théorème de convergence monotone)

N°39 p 141 :

39 Déterminer la limite, si elle existe, de chaque suite (u_n) définie par :

a. $u_n = -25\left(\frac{5}{6}\right)^n$ b. $u_n = -7(\sqrt{3})^n$ c. $u_n = -2\left(\frac{10}{7}\right)^n$

d. $u_n = (-\pi)^n$ e. $u_n = 3^{n+1}$

39 Chaque suite (u_n) est une suite géométrique.

a. Comme $-1 < \frac{5}{6} < 1$ on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

b. Comme $\sqrt{3} > 1$ on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{3})^n = +\infty$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

c. Comme $\frac{10}{7} > 1$ on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{10}{7}\right)^n = +\infty$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

d. Comme $-\pi < -1$, la suite (u_n) diverge par absence de limite.

e. Pour tout entier naturel n , $u_n = 3 \times 3^n$. Comme $3 > 1$ on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

N°40 p 141 :

40 On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n , par $u_n = \frac{6^n}{7^n}$. En écrivant u_n sous la forme q^n , avec q un réel à déterminer, étudier la convergence de la suite.

Pour tout entier naturel n ,

$$u_n = \left(\frac{6}{7}\right)^n = q^n \text{ avec } q = \frac{6}{7}$$

$-1 < q < 1$ donc la suite converge vers 0

N° 70 à 72 p 144

70 Capacité 6, p. 133

1. $u_n = \frac{4}{7^n}$ 2. $u_n = \frac{2 \times 12^n}{6 \times 4^n}$ 3. $u_n = \frac{(-1)^n 3^n}{(-0,1)^n}$ 4. $u_n = \frac{(-4)^{n+1}}{5^n}$

1. 0 2. $+\infty$ 3. $+\infty$ 4. 0

71 1. $u_n = 4^n + 7^n$

2. $u_n = -2 \times 12^n + 3^n - 5$

3. $u_n = 9^n - 3^n$

4. $u_n = 1 + 0,5 + \dots + 0,5^n$

5. $u_n = 4^n + (-2)^n + 4$

6. $u_n = \sum_{k=0}^n 2^k$

71 1. $+\infty$.

2. Pour tout entier naturel n , $u_n = 3^n(-2 \times 4^n + 1) - 5$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

3. $+\infty$.

4. 2.

5. Pour tout entier naturel n , $u_n = 4^n(1 + (-0,5)^n) + 4$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

6. $+\infty$.

72 1. $u_n = \frac{2^n - 3^n}{5^n + 4^n}$ 2. $u_n = \frac{2^n - 3^n}{3^n - 1}$ 3. $u_n = \frac{5^n + (-3)^n}{2^n + 3(-1)^n}$

72 1. 0. 2. -1. 3. $+\infty$.

73 Déterminer la limite de chacune des suites ci-dessous définies pour tout entier naturel n non nul par :

a. $u_n = 0,5^n \cos n$ b. $u_n = 3^n + \sin n$ c. $u_n = \frac{1}{n} \sin(2^n)$

Piste : Utiliser un encadrement du sinus ou du cosinus d'un réel.

- a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq \cos(n) \leq 1$
donc $-0,5^n \leq u_n \leq 0,5^n$
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^n = 0$
D'après le théorème des gendarmes la suite converge vers 0
- b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq \sin(n) \leq 1$
donc $3^n - 1 \leq u_n \leq 3^n + 1$
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3^n - 1) = +\infty$
D'après le théorème de comparaison la suite diverge vers $+\infty$
- c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-1 \leq \sin(2^n) \leq 1$
Donc $-\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$
D'après le théorème des gendarmes la suite converge vers 0

77 VRAI/FAUX

Indiquer si l'affirmation est vraie ou fausse, puis justifier.

Si q est un nombre réel tel que $-1 < q < 1$, alors la suite de terme général $\sum_{k=0}^n q^k$ converge.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout réel $q \neq 1$

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Si $-1 < q < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^{n+1} = 0$

Donc la suite converge vers $\frac{1}{1-q}$