

..... Montrer une égalité.....

**Exercice 1**

Soit  $(u_n)$  la suite définie par :  $u_2 = 3$  et  $u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{u_n + 3}$  pour tout  $n \geq 2$

Démontrer par récurrence que pour tout entier  $n \geq 2$  on a  $u_n = \frac{2^n + 2}{2^n - 2}$

On note  $\mathcal{P}(n)$  l'égalité à démontrer :  $u_n = \frac{2^n + 2}{2^n - 2}$

• **Initialisation** ( pour  $n = 2$  )

D'une part on a :  $u_2 = 3$ ,

d'autre part pour  $n = 2$  on a :  $\frac{2^n + 2}{2^n - 2} = \frac{2^2 + 2}{2^2 - 2} = \frac{6}{2} = 3$

donc  $\mathcal{P}(2)$  est vrai

• **Hérédité**

Soit un entier  $n \geq 2$ ,

on suppose que  $\mathcal{P}(n)$  est vrai c'est-à-dire  $u_n = \frac{2^n + 2}{2^n - 2}$ ,

on va montrer que  $\mathcal{P}(n+1)$  est vrai c'est-à-dire  $u_{n+1} = \frac{2^{n+1} + 2}{2^{n+1} - 2}$

|                                                                                      |                                                                   |                                                     |                                        |
|--------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|----------------------------------------|
| On a :                                                                               | $\frac{3(2^n + 2) + 2^n - 2}{2^n - 2}$                            | $= \frac{2^n(3 + 1) + 4}{2^n(1 + 3) - 4}$           | $= \frac{2^{n+1} + 2}{2^{n+1} - 2}$    |
| $u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{u_n + 3}$                                                 | $= \frac{2^n + 2 + 3(2^n - 2)}{2^n - 2}$                          | $= \frac{2^n \times 4 + 4}{2^n \times 4 - 4}$       | Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vrai et    |
| $= \frac{3 \left( \frac{2^n + 2}{2^n - 2} \right) + 1}{\frac{2^n + 2}{2^n - 2} + 3}$ | $= \frac{3(2^n + 2) + 2^n - 2}{2^n + 2 + 3(2^n - 2)}$             | $= \frac{2^n \times 4 + 4}{2^n \times 4 - 4}$       | donc $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire. |
|                                                                                      | $= \frac{3 \times 2^n + 6 + 2^n - 2}{2^n + 2 + 3 \times 2^n - 6}$ | $= \frac{2(2^n \times 2 + 2)}{2(2^n \times 2 - 2)}$ |                                        |

• **Conclusion**

D'après le principe de raisonnement par récurrence  $\mathcal{P}(n)$  est vrai pour tout  $n \geq 2$ .

**Exercice 2**

On considère la suite numérique  $(v_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $v_0 = \frac{7}{8}$  et pour tout  $n \geq 0$   $v_{n+1} = v_n^2$

Démontrer par récurrence que  $v_n = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$ .

On note  $\mathcal{P}(n)$  l'égalité à démontrer :  $v_n = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$ .

• **Initialisation** ( pour  $n = 0$  )

D'une part on a :  $v_0 = \frac{7}{8}$ ,

d'autre part pour  $n = 0$  on a :  $\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n} = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^0} = \left(\frac{7}{8}\right)^1 = \frac{7}{8}$

donc  $\mathcal{P}(0)$  est vrai.

• **Hérédité**

Soit un entier  $n \geq 0$ , on suppose que  $\mathcal{P}(n)$  est vrai c'est-à-dire  $v_n = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$

on va montrer que  $\mathcal{P}(n+1)$  est vrai c'est-à-dire  $v_{n+1} = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^{n+1}}$

$$\text{On a : } v_{n+1} = v_n^2 = \left[\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}\right]^2 = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^n \times 2} = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^{n+1}}$$

Donc  $\mathcal{P}(n+1)$  est vrai et donc  $\mathcal{P}(n)$  est héréditaire.

### • Conclusion

D'après le principe de raisonnement par récurrence  $\mathcal{P}(n)$  est vrai pour tout  $n \geq 0$ .

..... Montrer une égalité pour une somme .....

### Exercice 3

Pour tout  $n \geq 1$ , soit  $S_n = \sum_{k=1}^n (2k-1)^2$

Démontrer que pour tout  $n \geq 1$ , on a  $S_n = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

On note  $\mathcal{P}(n)$  l'égalité à démontrer :  $S_n = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

### • Initialisation ( pour $n = 1$ )

D'une part  $S_1 = 1^2 = 1$ ,

d'autre part  $\frac{1(2 \times 1 - 1)(2 \times 1 + 1)}{3} = \frac{1 \times 3}{3} = 1$  donc  $\mathcal{P}(1)$  est vrai

### • Hérédité

Soit un entier  $n \geq 1$ , on suppose que  $\mathcal{P}(n)$  est vrai c'est-à-dire  $S_n = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$ ,

on va montrer que  $\mathcal{P}(n+1)$  est vrai c'est-à-dire  $S_{n+1} = \frac{(n+1)[2(n+1)-1][2(n+1)+1]}{3}$

ou  $S_{n+1} = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}$

Pour pouvoir utiliser l'égalité supposée vraie pour  $S_n$ , il faut trouver une relation entre  $S_{n+1}$  et  $S_n$ .

La relation est :  $S_{n+1} = S_n + (2n+1)^2$ .

Méthode :

En effet :  $S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} (2k-1)^2 = \sum_{k=1}^n (2k-1)^2 + (2(n+1)-1)^2 = S_n + (2n+1)^2$

$$\begin{aligned} \text{On a : } S_{n+1} &= S_n + (2n+1)^2 \\ &= \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3} + \frac{3(2n+1)^2}{3} \\ &= \frac{n(2n-1)(2n+1) + 3(2n+1)(2n+1)}{3} \\ &= \frac{(2n+1)[n(2n-1) + 3(2n+1)]}{3} \\ &= \frac{(2n+1)(2n^2 - n + 6n + 3)}{3} \\ &= \frac{(2n+1)(2n^2 + 5n + 3)}{3} \\ &= \frac{(2n+1)(2n+3)(n+1)}{3} \end{aligned}$$

Remarque : un calcul rapide permet de vérifier que l'on a bien :  $2n^2 + 5n + 3 = (2n+3)(n+1)$

Donc  $\mathcal{P}(n+1)$  est vrai et donc  $\mathcal{P}(n)$  est héréditaire.

### • Conclusion

D'après le principe de raisonnement par récurrence  $\mathcal{P}(n)$  est vrai pour tout  $n \geq 1$ .

..... Montrer une inégalité.....

#### Exercice 4

Soit la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 0$  et pour tout  $n \geq 0$ ,  $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$

Démontrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $u_n \geq n$ .

On note  $\mathcal{P}(n)$  l'égalité à démontrer :  $u_n \geq n$

• **Initialisation** ( pour  $n = 0$ )

On a :  $u_0 = 0$  donc  $u_0 \geq 0$ .

et donc  $\mathcal{P}(0)$  est vrai

• **Hérédité**

Soit un entier  $n \geq 0$ ,

on suppose que  $\mathcal{P}(n)$  est vrai c'est-à-dire  $u_n \geq n$ ,

on va montrer que  $\mathcal{P}(n+1)$  est vrai c'est-à-dire  $u_{n+1} \geq n+1$

On a :

$$u_n \geq n$$

$3u_n \geq 3n$  Multiplication par un nombre positif, le sens de l'inégalité ne change pas

$$3u_n - 2n \geq n$$

$$3u_n - 2n + 3 \geq n + 3$$

$$\text{or } n + 3 \geq n + 1$$

$$\text{donc } 3u_n - 2n + 3 \geq n + 1$$

Donc  $\mathcal{P}(n+1)$  est vrai et donc  $\mathcal{P}(n)$  est héréditaire.

• **Conclusion**

D'après le principe de raisonnement par récurrence  $\mathcal{P}(n)$  est vrai pour tout  $n \geq 0$ .

..... Utiliser les variations d'une fonction.....

#### Exercice 5

On considère la suite numérique  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $u_0 = \frac{2}{3}$  et pour tout entier  $n$ ,  $u_{n+1} = u_n(2 - u_n)$ .

On considère la fonction  $f : x \mapsto x(2 - x)$ .

On admet que cette fonction  $f$  est croissante sur  $[0; 1]$ .

Montrer par récurrence que, pour tout entier  $n$ ,  $0 < u_n < 1$ .

• **Initialisation** ( pour  $n = 0$ )

On a  $u_0 = \frac{2}{3}$  donc  $0 < u_0 < 1$  :

donc  $\mathcal{P}(0)$  est vrai

• **Hérédité**

Soit un entier  $n \geq 0$ ,

on suppose que  $\mathcal{P}(n)$  est vrai c'est-à-dire  $0 < u_n < 1$ ,

on va montrer que  $\mathcal{P}(n+1)$  est vrai c'est-à-dire  $0 < u_{n+1} < 1$ .

On a :  $0 < u_n < 1$

La fonction  $f$  est croissante sur  $[0; 1]$ , donc :  $f(0) < f(u_n) < f(1)$

soit  $0 < u_{n+1} < 1$ .

Donc  $\mathcal{P}(n+1)$  est vrai et donc  $\mathcal{P}(n)$  est héréditaire.

• **Conclusion**

D'après le principe de raisonnement par récurrence  $\mathcal{P}(n)$  est vrai pour tout  $n \geq 0$ .

**Exercice 6**

Soit la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0; 2]$  par :  $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$

Soit la suite  $(v_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $v_0 = 2$  et  $v_{n+1} = f(v_n)$  pour tout entier naturel  $n$ .

On admet les propriétés suivantes : •  $f$  est croissante sur l'intervalle  $[0; 2]$

• Si  $x \in [1; 2]$  alors  $f(x) \in [1; 2]$ .

1. Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $1 \leq v_n \leq 2$ .

Soit  $\mathcal{P}(n)$  l'inégalité à démontrer :  $1 \leq v_n \leq 2$ .

• **Initialisation** (pour  $n = 0$ )

On a :  $v_0 = 2$  donc  $1 \leq v_0 \leq 2$

et donc  $\mathcal{P}(0)$  est vrai

• **Hérédité**

Soit un entier  $n \geq 0$ ,

on suppose que  $\mathcal{P}(n)$  est vrai c'est-à-dire  $1 \leq v_n \leq 2$ ,

on va montrer que  $\mathcal{P}(n+1)$  est vrai c'est-à-dire  $1 \leq v_{n+1} \leq 2$ .

On a :  $1 \leq v_n \leq 2$

La fonction  $f$  est croissante sur  $[0; 2]$ , donc :  $f(1) \leq f(v_n) \leq f(2)$

soit  $\frac{3}{2} \leq v_{n+1} \leq \frac{5}{3}$ . or  $1 \leq \frac{3}{2}$  et  $\frac{5}{3} \leq 2$  (Remarque :  $2 = \frac{6}{3}$ )

donc  $1 \leq v_{n+1} \leq 2$

Donc  $\mathcal{P}(n+1)$  est vrai et donc  $\mathcal{P}(n)$  est héréditaire.

• **Conclusion**

D'après le principe de raisonnement par récurrence  $\mathcal{P}(n)$  est vrai pour tout  $n \geq 0$ .

2. Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_{n+1} \leq v_n$ .

On note  $\mathcal{Q}(n)$  l'inégalité à démontrer :  $v_{n+1} \leq v_n$ .

• **Initialisation** (pour  $n = 0$ )

On a :  $v_1 = f(v_0) = f(2) = \frac{5}{3}$

et  $v_0 = 2$  donc  $v_1 \leq v_0$ .

Donc  $\mathcal{Q}(0)$  est vraie.

• **Hérédité**

Soit un entier  $n \geq 0$ , on suppose que  $\mathcal{Q}(n)$  est vrai c'est-à-dire  $v_{n+1} \leq v_n$ ,

on va montrer que  $\mathcal{Q}(n+1)$  est vrai c'est-à-dire  $v_{n+2} \leq v_{n+1}$ .

On a :

$$v_{n+1} \leq v_n.$$

$v_n \in [1; 2]$  d'après la question 1.

$v_{n+1} \in [1; 2]$  car  $v_{n+1} = f(v_n)$  avec  $v_n \in [1; 2]$ . (voir propriété de  $f$ ).

$f$  est croissante sur  $[0; 2]$ , donc :

$$f(v_{n+1}) \leq f(v_n)$$

soit  $v_{n+2} \leq v_{n+1}$

Donc  $\mathcal{Q}(n+1)$  est vrai et donc  $\mathcal{Q}(n)$  est héréditaire.

- **Conclusion**

D'après le principe de raisonnement par récurrence  $\mathcal{Q}(n)$  est vrai pour tout  $n \geq 0$ .