

..... Montrer une égalité

Exercice 1

Soit (u_n) la suite définie par : $u_2 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{u_n + 3}$ pour tout $n \geq 2$

Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 2$ on a $u_n = \frac{2^n + 2}{2^n - 2}$

Exercice 2

On considère la suite numérique (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_0 = \frac{7}{8}$ et pour tout $n \geq 0$ $v_{n+1} = v_n^2$

Démontrer par récurrence que $v_n = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$.

..... Montrer une égalité pour une somme

Exercice 3

Pour tout $n \geq 1$, soit $S_n = \sum_{k=1}^n (2k-1)^2$

Démontrer que pour tout $n \geq 1$, on a : $S_n = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

..... Montrer une inégalité

Exercice 4

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n \geq n$.

..... Utiliser les variations d'une fonction

Exercice 5

On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = \frac{2}{3}$ et pour tout entier n $u_{n+1} = u_n(2 - u_n)$.

On considère la fonction $f : x \mapsto x(2 - x)$.

On admet que cette fonction f est croissante sur $[0; 1]$.

Montrer par récurrence que, pour tout entier n , $0 < u_n < 1$.

Exercice 6

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 2]$ par : $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$

Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = f(v_n)$ pour tout entier naturel n

On admet les propriétés suivantes : • f est croissante sur l'intervalle $[0; 2]$

• Si $x \in [1; 2]$ alors $f(x) \in [1; 2]$.

Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que :

1. Pour tout entier naturel n , $1 \leq v_n \leq 2$.

2. Pour tout entier naturel n , $v_{n+1} \leq v_n$.

Correction pages suivantes