

Exercice 1

1) La proportion de personnes atteintes de la grippe dans la ville est $p = \frac{400}{20\,000} = 0,02$.

La population de la ville est suffisamment grande pour considérer que le choix des 30 personnes se fait de manière indépendante et identique.

On répète donc 30 fois la même épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0,02$: choisir une personne.

Le succès S est : la personne choisie est malade. Donc $P(S) = 0,02$.

L'échec $\bar{S}$ est : la personne choisie n'est pas malade. Donc $P(\bar{S}) = 1 - 0,02 = 0,98$.

Les épreuves étant identiques et indépendantes, X suit une loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0,02$:

X suit $B(30 ; 0,02)$.

2) a) L'évènement " Deux personnes exactement sont atteintes par le virus " correspond à $X = 2$.

$$P(X = 2) = \binom{30}{2} p^2 (1-p)^{28} = 435 \times 0,02^2 \times 0,98^{28} \approx 0,099.$$

La probabilité que parmi les 30 personnes choisies, deux exactement soient malades est $P(X = 2) \approx 0,099$.

b) L'évènement " Il y a au-moins une personne atteinte par le virus " correspond $P(X \geq 1)$.

L'évènement contraire de $P(X \geq 1)$ est $P(X < 1)$ c'est-à-dire $P(X = 0)$. Donc :

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{30}{0} p^0 (1-p)^{30} = 1 - 0,98^{30} \approx 0,455.$$

La probabilité que parmi les 30 personnes choisies, au-moins une soit malade est $P(X \geq 1) \approx 0,455$.

Exercice 2 : Gratte-ciel

1) On répète $n = 57$ fois la même expérience : choisir un ascenseur.

Il y a deux issues :

- le succès "l'ascenseur tombe en panne" de probabilité $p = 0,06$

- l'échec "l'ascenseur ne tombe pas en panne" de probabilité $1 - p = 0,94$

Les épreuves sont indépendantes (on a un schéma de Bernoulli).

La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès (nombre d'ascenseurs en panne) suit une loi binomiale de paramètres $n = 57$ et $p = 0,06$.

$$\forall k \in \{0 ; \dots ; 57\} : p(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k} = \binom{57}{k} \times 0,06^k \times 0,94^{57-k}$$

2) Calculer et interpréter les résultats obtenus dans le contexte de l'exercice :

$$\text{a) } p(X = 3) = \binom{57}{3} \times 0,06^3 \times 0,94^{57-3} \approx 0,22$$

La probabilité que trois ascenseurs tombent en panne un jour donné est de 0,22.

b)

$$p(X \leq 2) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) = \binom{57}{0} \times 0,06^0 \times 0,94^{57-0} + \binom{57}{1} \times 0,06^1 \times 0,94^{57-1} + \binom{57}{2} \times 0,06^2 \times 0,94^{57-2} \approx 0,33$$

La probabilité que moins de deux ascenseurs tombent en panne un jour donné est de 0,33

$$\text{c) } E(X) = np = 57 \times 0,06 = 3,42$$

En moyenne, entre 3 et 4 ascenseurs tombent en panne chaque jour.

Exercice 3 : Composants défectueux

1) On répète $n = 1000$ fois la même expérience : choisir une résistance

Il y a deux issues :

- le succès "la résistance est défectueuse" de probabilité $p = 5 \times 10^{-3}$

- l'échec "la résistance n'est pas défectueuse" de probabilité $1 - p$

Les épreuves sont indépendantes (on a un schéma de Bernoulli).

La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès (nombre de résistances défectueuses) suit une

loi binomiale de paramètres $n = 1000$ et $p = 5 \times 10^{-3}$.

2)

a) $p(X = 2) = \binom{1000}{2} \times (5 \times 10^{-3})^2 \times (1 - 5 \times 10^{-3})^{998} \approx 0,084$

b) $p(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \approx 0,124$

c) $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \approx 0,956$

2) $E(X) = 1000 \times 5 \times 10^{-3} = 5$

Dans un lot de 1000 résistances on peut s'attendre, en moyenne, à 5 résistances défectueuses.

Exercice 4 : Au tableau !

1)

a) On répète n fois la même expérience : interroger un élève

Il y a deux issues :

- le succès : "l'élève interrogé est une fille" de probabilité $p = \frac{2}{3}$

- l'échec : "l'élève interrogé est un garçon" de probabilité $1 - p = \frac{1}{3}$

Les épreuves sont indépendantes. (On a un schéma de Bernoulli)

La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès (nombre de filles interrogées) suit une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{2}{3}$.

Pour tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n$: $p(X = k) = \binom{n}{k} \times \left(\frac{2}{3}\right)^k \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}$

b) Pour $n = 5$, $p(X = 3) = \binom{5}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{80}{243} \approx 0,33$

La probabilité que le nombre de filles interrogées soit égal à 3 durant 5 cours est d'environ 0,33.

c) Pour $n = 5$, $p(X = 0) = \binom{5}{0} \times \left(\frac{2}{3}\right)^0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{243} \approx 0,004$

La probabilité qu'aucune fille ne soit interrogée durant 5 cours est d'environ 0,004.

2) DEBUT ALGORITHME

$0 \rightarrow n$

Tant que $\left(\frac{1}{3}\right)^n > 0,001$ faire

$n + 1 \rightarrow n$

Fin Tant que

Afficher n

FIN ALGORITHME

On trouve $n = 7$

3) Calculons l'espérance de X dans le cas où $n = 44$

$$E(X) = np = 44 \times \frac{2}{3} = \frac{88}{3} \approx 29$$

On peut espérer interroger 29 filles dans le trimestre.

Exercice 5 : dé truqué

1) $\sum_{i=1}^6 p_i = 1 \Leftrightarrow 9p_1 = 1 \Leftrightarrow p_1 = \frac{1}{9}$

Donc $p_1 = p_3 = p_5 = \frac{1}{9}$ et $p_2 = p_4 = p_6 = \frac{2}{9}$

2) On répète $n = 5$ fois la même expérience : lancer le dé

Il y a deux issues :

- le succès "le résultat est pair" de probabilité $p = \frac{2}{3}$

- l'échec "le résultat est impair" de probabilité $1 - p = \frac{1}{3}$

Les épreuves sont indépendantes (on a un schéma de Bernoulli).

La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès (nombre de résultats pairs) suit une loi binomiale

Probabilités : exercices (corrigés)

de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{2}{3}$.

$$E(X) = np = 5 \times \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$$

3)

a) Soit Y la variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{2}{3}$

$$q_n = p(Y \geq 1) = 1 - p(Y = 0) = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

b) $q_n > 0.999$ (*)

Par la calculatrice, on obtient $q_6 \simeq 0,9986 < 0,999$ et $q_7 \simeq 0,9995 > 0,999$. Ainsi, c'est à partir de 7 lancers.

Exercice 6 : rare ou pas ?

On répète $n = 100$ fois la même expérience : choisir une centrale

Il y a deux issues :

- le succès "la centrale tombe en panne" de probabilité $p = 10^{-4}$

- l'échec "la centrale ne tombe pas en panne" de probabilité $1 - p = 1 - 10^{-4}$

Les épreuves sont indépendantes (on a un schéma de Bernoulli).

La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès (nombre de centrales en panne) suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 10^{-4}$.

Pour un parc de 100 centrales, la probabilité qu'une centrale du parc tombe en panne est :

$$p(X = 1) = \binom{100}{1} \times 10^{-4} \times (1 - 10^{-4})^{99} \approx 10^{-2}.$$

La réponse est donc correcte.

Exercice 7 (Amérique du sud - Novembre 2009) QCM

1)

a) Un mot réponse est une liste avec répétition de 5 éléments d'un ensemble qui en contient 3.

Il y a $3^5 = 243$ mots-réponses possibles.

b) On répète 5 fois la même épreuve : répondre à une question.

Il y a deux issues :

- le succès : la réponse est exacte de probabilité $\frac{1}{3}$

- l'échec : la réponse est fausse de probabilité $\frac{2}{3}$

Les épreuves sont indépendantes. (On a un schéma de Bernoulli)

La variable aléatoire Z qui compte le nombre de succès (nombre de bonnes réponses au questionnaire) suit une loi binomiale de paramètre $n = 5$ et $p = \frac{1}{3}$.

$$p(E) = p(Z = 1) = \binom{5}{1} \times \left(\frac{1}{3}\right)^1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{80}{243}$$

$$p(F) = p(Z = 0) = \binom{5}{0} \times \left(\frac{1}{3}\right)^0 \times \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$$

Nombre de plindromes :

3 choix pour la 1^{ère} lettre

3 choix pour la 2^{ème} lettre

3 choix pour la 3^{ème} lettre

1 choix pour la 4^{ème} lettre

1 choix pour la 5^{ème} lettre

$$\text{Donc } p(G) = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 1 \times 1}{243} = \frac{1}{9} \text{ (situation d'équiprobabilité)}$$

2)

a) Les valeurs possibles pour X sont $\{0 ; 1 ; 3 ; 5\}$

Probabilités : exercices (corrigés)

$$p(X = 5) = p(Z = 5) = \binom{5}{5} \times \left(\frac{1}{3}\right)^5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{243}$$

$$p(X = 3) = p(Z = 4) = \binom{5}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{10}{243}$$

$$p(X = 1) = p(Z = 3) = \binom{5}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{40}{243}$$

$$p(X = 0) = p(Z \leq 2) = \binom{5}{0} \times \left(\frac{1}{3}\right)^0 \times \left(\frac{2}{3}\right)^5 + \binom{5}{1} \times \left(\frac{1}{3}\right)^1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \binom{5}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{64}{81}$$

x_i	0	1	3	5
$p(X = x_i)$	$\frac{64}{81}$	$\frac{40}{243}$	$\frac{10}{243}$	$\frac{1}{243}$

$$\text{b) } E(X) = 0 \times \frac{64}{81} + 1 \times \frac{40}{243} + 3 \times \frac{10}{243} + 5 \times \frac{1}{243} = \frac{25}{81} \approx 0.3.$$

En moyenne, le candidat a 0,3 points à l'exercice s'il répond au hasard.

3)

a) On répète 28 fois la même épreuve : répondre au questionnaire

Il y a deux issues :

- le succès : le mot-réponse ne comporte aucune réponse exacte de probabilité $\frac{32}{243}$

- l'échec : le mot-réponse comporte au moins une réponse exacte de probabilité $1 - \frac{32}{243} = \frac{211}{243}$

(On a un schéma de Bernoulli)

Les épreuves sont indépendantes.

La variable aléatoire Y qui compte le nombre de succès (nombre d'élèves dont le mot-réponse ne comporte aucune réponse exacte) suit une loi binomiale de paramètres $n = 28$ et $p = \frac{32}{243}$.

b)

$$p(Y \leq 1) = p(Y = 0) + p(Y = 1) = \binom{28}{0} \times \left(\frac{32}{243}\right)^0 \times \left(\frac{211}{243}\right)^{28} + \binom{28}{1} \times \left(\frac{32}{243}\right)^1 \times \left(\frac{211}{243}\right)^{27} \approx \boxed{0.10} \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$