

Ter Spé

Exercice : Loi binomiale

Enoncé

Exercice 1 :

Dans une ville comptant 20 000 habitants, on a recensé 400 cas de gripes. On choisit au hasard 30 personnes dans la ville.

On appelle X le nombre de personnes malades choisies atteintes par le virus grippal.

- 1) Quelle est la loi de probabilités de X ?
- 2) Calculer la probabilité des événements suivants (on donnera les résultats arrondis au millième) :
 - a) " Deux personnes exactement sont atteintes par le virus "
 - b) " Il y a au-moins une personne atteint par le virus "

Exercice 2 : Gratte-ciel

Burj Khalifa, gratte-ciel le plus haut du monde (en 2010) situé à Dubaï compte 57 ascenseurs. La probabilité qu'un ascenseur tombe en panne un jour donné est de 0,06. On considère que les pannes des ascenseurs sont indépendantes les unes des autres. On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre d'ascenseurs en panne un jour donné.

- 1) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
- 2) Calculer et interpréter les résultats obtenus dans le contexte de l'exercice :
 - a) $p(X = 3)$
 - b) $p(X \leq 2)$
 - c) $E(X)$

Exercice 3 : Composants défectueux

Un constructeur de composants produit des résistances. On admet que la probabilité qu'une résistance produite soit défectueuse est de 5×10^{-3} .

On prélève un lot de 1000 résistances dans la production et on suppose que le stock de résistance est suffisamment important pour assimiler le prélèvement à un tirage avec remise de 1000 résistances. On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 1000 résistances, associe le nombre de résistances défectueuses.

- 1) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
- 2) Calculer les probabilités des événements suivants :
 - a) le lot contient exactement deux résistances défectueuses.
 - b) le lot contient au plus deux résistances défectueuses.
 - c) le lot contient au moins deux résistances défectueuses.
- 2) Dans un lot de 1000 résistances, à combien de résistances défectueuses peut-on s'attendre, en moyenne ?

Exercice 4 : Au tableau !

Une classe de première compte 30 élèves dont 20 filles. A chaque cours de mathématique, le professeur de cette classe interroge un élève au hasard. D'un cours à l'autre, le professeur ne se rappelle pas de l'élève interrogé au cours précédent ce qui fait qu'à chaque cours, le choix de l'élève est indépendant des choix précédents.

- 1) Soit n un entier naturel non nul. On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de filles interrogées durant n cours de mathématiques consécutifs.
 - a) Quelle est la loi de probabilité de X ?
 - b) Quelle est la probabilité que le nombre de filles interrogées soit égal à 3 durant 5 cours ?
 - c) Quelle est la probabilité qu'aucune fille ne soit interrogée durant 5 cours.
- 2) Compléter l'algorithme suivant qui renvoie le nombre minimal de cours n pour que la probabilité qu'aucune fille ne soit interrogée lors de ces n cours soit inférieure ou égale à 0,001.

$n \leftarrow 1$

Tant que

$n \leftarrow \dots$

Fin Tant que

Afficher n

3) Durant un trimestre, il y a 44 cours de mathématiques. Quel est le nombre moyen de cours durant lequel une fille est interrogée peut-on espérer ?

Exercice 5 : dé truqué

On considère un dé truqué dont les six faces sont numérotées de 1 à 6. On note p_i la probabilité d'apparition de la face i .

1) Sachant que : $p_1 = p_3 = p_5$; $p_2 = p_4 = p_6$; $p_2 = 2p_3$

Déterminer p_i pour tout i compris entre 1 et 6.

2) On lance 5 fois de suite le dé et on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de résultats pairs obtenus.

Déterminer la loi de X et calculer son espérance mathématique.

3) On lance n fois de suite le dé.

a) Calculer la probabilité q_n de l'événement "on obtient au moins une fois un résultat pair". q

b) Pour quelle valeur de n a-t-on $q_n > 0.999$ à l'aide de la calculatrice.

Exercice 6 : rare ou pas ?

Lors d'un débat sur « le nucléaire », un défenseur de cette production d'énergie informe que le risque qu'une panne se produise dans une centrale nucléaire est de l'ordre de 10^{-4} . La réponse de son interlocuteur est la suivante : « Mais pour un parc de 100 centrales, la probabilité qu'une centrale du parc tombe en panne est alors d'environ 10^{-2} . »

Cet interlocuteur a-t-il raison ?

Exercice 7 (Amérique du sud - Novembre 2009) QCM

On considère un questionnaire comportant cinq questions.

Pour chacune des cinq questions posées, trois propositions de réponses sont faites (A, B et C), une seule d'entre elles étant exacte.

Un candidat répond à toutes les questions posées en écrivant un mot réponse de cinq lettres.

Par exemple, le mot «BBAAC» signifie que le candidat a répondu B aux première et deuxième questions, A aux troisième et quatrième questions et C à la cinquième question.

1) a) Combien y-a-t-il de mots-réponses possible à ce questionnaire ?

b) On suppose que le candidat répond au hasard à chacune des cinq questions de ce questionnaire.

Calculer la probabilité des événements suivants :

E : « le candidat a exactement une réponse exacte ».

F : « le candidat n'a aucune réponse exacte ».

G : « le mot-réponse du candidat est un palindrome » (On précise qu'un palindrome est un mot pouvant se lire indifféremment de gauche à droite ou de droite à gauche : par exemple, «BACAB» est un palindrome).

2) Chaque réponse juste rapporte un point, chaque réponse fausse fait perdre un point et si le total est négatif il est ramené à 0.

a) Déterminer la loi de la variable aléatoire X égal à la note de l'exercice.

b) Calculer $E(X)$ et interpréter le résultat obtenu.

3) Un professeur décide de soumettre ce questionnaire à ses 28 élèves en leur demandant de répondre au hasard à chacune des cinq questions de ce questionnaire.

On désigne par Y le nombre d'élèves dont le mot-réponse ne comporte aucune réponse exacte.

a) Justifier que la variable aléatoire Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 28$ et $p = \frac{32}{243}$.

b) Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-2} , qu'au plus un élève n'ait fourni que des réponses fausses.