

Exercices représentation paramétrique d'une droite et équation cartésienne d'un plan Term

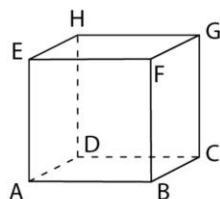
20 On donne les points $A(1; 0; -3)$ et $B(2; 5; 0)$.

- a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB) .
 b) Les points $C(-1; 2; -3)$ et $D(3; 10; 3)$ appartiennent-ils à la droite (AB) ? Justifier.

21 d est la droite qui passe par le point $A(2; 4; 0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1; 7; -2)$.

- a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite d .
 b) Dans chaque cas, indiquer si le point appartient ou non à la droite d .
 • $C(-1; -17; 6)$ • $D(5; 10; -14)$ • $E(3; 11; -2)$.

25 ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre.



- a) Déterminer les coordonnées de chacun des sommets dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.
 b) Déterminer une représentation paramétrique de chacune des droites (AG) et (BH) .

26 a) d et d' sont les droites de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = -4 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 5 + 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 3 - 4t' \\ y = 4t' \\ z = 2 + 4t' \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R}).$$

Les droites d et d' sont-elles parallèles, orthogonales ou ni l'un, ni l'autre?

b) Reprendre la question précédente avec les représentations paramétriques :

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 5t \\ z = -3 - 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 1 - 4t' \\ y = 2 - 10t' \\ z = 6t' \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R}).$$

34 $\mathcal{P}$ est le plan d'équation cartésienne :

$$x - y + 2z + 1 = 0.$$

- a) Donner les coordonnées de trois points A, B, C qui appartiennent au plan $\mathcal{P}$.
 b) En déduire les coordonnées de deux vecteurs non colinéaires de $\mathcal{P}$.

35 $\mathcal{P}$ est le plan passant par le point $A(2; -1; 3)$ et de vecteur normal $\vec{n}(1; 1; -2)$.

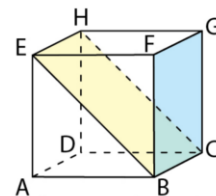
- a) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.
 b) Les points $B(-2; 0; 1)$ et $C(3; 0; 4)$ appartiennent-ils au plan $\mathcal{P}$? Justifier.

37 On donne les points $A(3; 0; 0)$ et $B(3; 1; 2)$.

$\mathcal{P}$ est le plan qui passe par le point B et est orthogonal à la droite (AB) .

- a) Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à $\mathcal{P}$.
 b) Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

39 On se place dans le repère orthonormé $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.



- a) Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal au plan (BCF) , puis au plan (BCE) .
 b) Déterminer une équation cartésienne du plan (BCF) , puis du plan (BCE) .

43 On donne les points $I(1; 2; 0)$, $J(-1; 0; -2)$, $K(2; 3; 0)$, $L(-1; -2; -1)$.

1. Vérifier que les points I, J, K ne sont pas alignés.
 2. a) Démontrer que le vecteur $\vec{n}(2; -2; 0)$ est un vecteur normal au plan (IJK) .
 b) Déterminer une équation cartésienne du plan (IJK) .
 3. Les points I, J, K, L sont-ils coplanaires? Justifier.

49 d et d' sont les droites de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 2 + t' \\ y = -2 - t' \\ z = -2t' \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R}).$$

- a) Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de d et d'un vecteur directeur $\vec{u}'$ de d' .
 b) En déduire que d et d' ne sont pas parallèles. Quelle peut être la position relative de d et d' ?
 c) Déterminer le point d'intersection de d et d' en résolvant un système d'équations.

52 d et d' sont les droites de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = 5 - t \\ y = 2 + t \\ z = 1 - 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = t' \\ y = 2 - 2t' \\ z = 1 + t' \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R}).$$

- a) Démontrer que d et d' ne sont pas parallèles.
 b) Démontrer que d et d' ne sont pas coplanaires en résolvant un système d'équations.

54 d est la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = -1 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

- a) Parmi les plans ci-dessous, indiquer celui qui est orthogonal à la droite d .
 • $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $x + 2y - z + 5 = 0$.
 • $\mathcal{Q}$ d'équation cartésienne $4x - 2y - 4z + 1 = 0$.
 b) Déterminer le point d'intersection de d et de ce plan en résolvant un système d'équations.

55 $\mathcal{P}$ est le plan d'équation cartésienne :

$$x + 4y - 5z - 16 = 0$$

et $\mathcal{D}$ la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -5 + t \\ y = 4 - t \\ z = 5 - 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

- Démontrer que la droite $\mathcal{D}$ et le plan $\mathcal{P}$ sont sécants.
- Déterminer leur point d'intersection en résolvant un système d'équations.

58 a et b désignent des nombres réels. On donne les points $A(1; 1; a)$, $B(3; a; b)$, $C(-3; b; 2a + 1)$. On se propose de déterminer a et b afin que les points A, B, C soient alignés.

- Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
- Montrer que les points A, B, C sont alignés si, et seulement si, $\begin{cases} b - 1 = -2(a + 1) \\ a + 1 = -2(b - a) \end{cases}$.
- Résoudre ce système et conclure en donnant les coordonnées de A, B, C .

60 $\mathcal{P}$ est le plan d'équation cartésienne :

$$2x + y - z + 3 = 0.$$

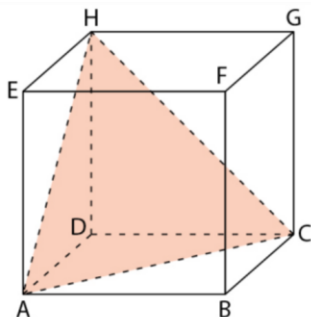
A est le point de coordonnées $(2; 0; -1)$.

- Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par A et perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$.
- En déduire les coordonnées du point H , projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$.

72 ABCDEFGH est le cube d'arête 1 représenté ci-contre.

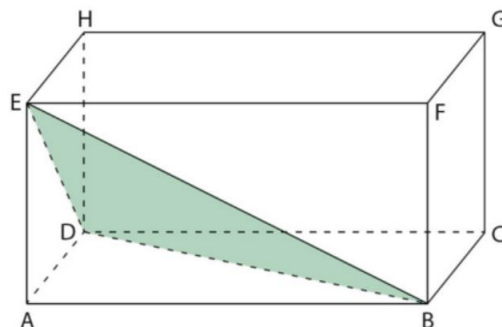
L'espace est muni du repère orthonormé $(D; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$.

- Déterminer une équation cartésienne du plan (ACH) .
- On note d la droite passant par le point F et orthogonale au plan (ACH) .
 - Déterminer une représentation paramétrique de la droite d .
 - Calculer les coordonnées du projeté orthogonal K du point F sur le plan (ACH) .
 - Calculer la distance du point F au plan (ACH) .



73 ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle tel que $AB = 12$, $AD = 18$ et $AE = 6$.

L'espace est muni du repère orthonormé d'origine A dans lequel les points B, D et E ont pour coordonnées respectives $(12; 0; 0)$, $(0; 18; 0)$ et $(0; 0; 6)$.



- Vérifier que le plan (EBD) a pour équation cartésienne $3x + 2y + 6z - 36 = 0$.
- a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AG) .
b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (AG) et du plan (EBD) . On note K ce point.
- La droite (AG) est-elle orthogonale au plan (EBD) ? Justifier.
- On note $\mathcal{P}$ le plan parallèle au plan (ADE) passant par le point K .
a) Démontrer que le plan $\mathcal{P}$ coupe le plan (EBD) selon une droite d parallèle à la droite (ED) .
b) Réaliser une figure et construire d .

75 Dans un repère orthonormé de l'espace, $\mathcal{P}$ est le plan passant par le point $A(1; -1; 2)$ et dont deux vecteurs non colinéaires sont $\vec{u}(-3; 1; 0)$ et $\vec{v}(2; 0; 1)$.

On note $(x; y; z)$ les coordonnées d'un point M de $\mathcal{P}$. Ainsi, il existe des réels t et t' tels que :

$$\overrightarrow{AM} = t\vec{u} + t'\vec{v}.$$

- Expliquer pourquoi $\begin{cases} x = 1 - 3t + 2t' \\ y = -1 + t \\ z = 2 + t' \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}, t' \in \mathbb{R}).$

On dit que ce système est **une représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}$** .

- Déduire de ce système, une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.

86 Démontrer une formule

Raisonner Calculer

L'espace est muni d'un repère orthonormé.

1. $\mathcal{P}$ est un plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ avec a, b, c non tous nuls.

On note $A(x_A; y_A; z_A)$ un point n'appartenant pas à $\mathcal{P}$ et $\vec{n}$ un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

On note H le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$.

a) Justifier qu'il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{AH} = \lambda \vec{n}$.

b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AH) en prenant λ pour paramètre.

c) Quelle valeur de λ correspond au point H ?

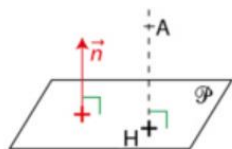
d) En utilisant le fait que $AH = |\lambda| \|\vec{n}\|$, démontrer que la distance de A au plan $\mathcal{P}$ est donnée par la formule :

$$AH = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

2. Application

a) Calculer la distance du point $A(1; -1; 2)$ au plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $x + y - z - 1 = 0$.

b) Le point $H(2; 0; 1)$ est-il le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$?



87 Déterminer un ensemble de points

Raisonner Calculer

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points :

$$A(2; 1; 3), B(-3; -1; 7), C(3; 2; 4).$$

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. d est la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -3t \\ z = 4 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

a) Montrer que la droite d est orthogonale au plan (ABC).

b) Donner une équation cartésienne du plan (ABC).

3. a) Déterminer les coordonnées du point d'intersection H de la droite d et du plan (ABC).

b) Déterminer des nombres réels non nuls a, b, c tels que :

$$a\overrightarrow{HA} + b\overrightarrow{HB} + c\overrightarrow{HC} = \vec{0}.$$

4. Déterminer la nature de l'ensemble Γ des points M de l'espace tels que :

$$(-2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) \cdot (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = 0.$$

Conseil : penser à utiliser la relation de Chasles dans la 1^{re} parenthèse de façon à exploiter la relation obtenue à la question 3. b).

89 Déterminer une section

Chercher Raisonner Calculer

Dans un repère orthonormé de l'espace, le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne

$$2x - 4y + z + 6 = 0$$

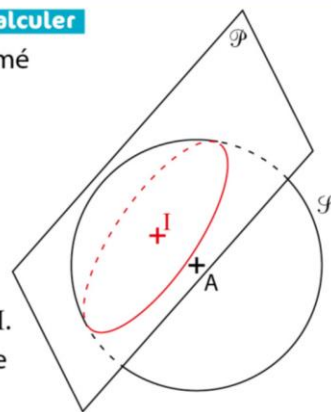
coupe la sphère $\mathcal{S}$

de centre $A(1; 2; -1)$

et de rayon 4 suivant

le cercle rouge de centre I.

Calculer le rayon du cercle rouge.



91 Reconnaître des plans sécants

Raisonner Calculer

Dans un repère orthonormé, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont les plans d'équations cartésiennes respectives :

$$2x + 5y - 3z - 15 = 0 \text{ et } -7x + 2y + z + 18 = 0.$$

a) Démontrer que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont sécants.

b) Expliquer pourquoi déterminer l'intersection de ces plans revient à résoudre le système :

$$\begin{cases} 2x + 5y = 15 + 3z \\ -7x + 2y = -18 - z \end{cases}$$

c) Justifier que ce système équivaut à :

$$\begin{cases} x = \frac{40}{13} + \frac{11}{39}z \\ y = \frac{23}{13} + \frac{19}{39}z \\ z = 0 + 1z \end{cases}$$

d) En déduire un point et un vecteur directeur de la droite d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.