Rappels sur la fonction exponentielle. Fonction logarithme népérien

Rappels sur la fonction exp

EXERCICE 1

Calcul de la constante e

1) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \ e^x \geqslant x+1$
On pourra étudier les variations sur $\mathbb{R}$ de f définie par : $f(x) = e^x - (x+1)$
2) En déduire que pour tout entier naturel n, les deux inégalités suivantes :

a) $e \geqslant \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ b) $\dfrac{1}{e} \geqslant \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$

c) En déduire alors l'encadrement : $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \leqslant e \leqslant \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{-n}$

3) On prend $n = 1000$, donner un encadrement à 10^{-3} de e.

EXERCICE 2

Simplifier l'expression suivante : $\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2$

EXERCICE 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1) $e^{x^2-2} = e^{5x+4}$
2) $xe^{2x} - 2e^{2x} = 0$
3) $e^{2x-1}\,e^{x+5} = e^{3-2x}$
4) $e^{3-x}\,e^{2x-1} = \left(e^{5+x}\right)^2$
5) $e^{2-3x} \geqslant 1$
6) $e^{2x+3} < \dfrac{1}{e}$
7) $\dfrac{e^x+3}{e^x+1} > 2$

EXERCICE 4

Déterminer les limites suivantes :

1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 3xe^{-x}$
2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} (3-x)e^x$
3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-e^x}{2x}$
4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^2\,e^{1+x}$
5) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-1}{x^3}$
6) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{e^{x-1}-1}{3(x-1)}$

EXERCICE 5

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - x}$

1) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2) Déterminer la fonction dérivée de f.
3) En déduire les variations de f puis dresser son tableau de variations.
   Représenter $\mathscr{C}_f$ ainsi que les asymptotes éventuelles.
   Unité graphique 2 cm sur les deux axes et $x \in [-3\,;\,3]$, $y \in [-1\,;\,3]$.

EXERCICE 6

Tangente passant par l'origine

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{x-1} + 1$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Partie A : étude de la fonction

1) Déterminer la limite de f en $-\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}_f$?
2) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3) Déterminer la fonction dérivée f'.
4) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.

Partie B : recherche d'une tangente particulière

Soit a un réel strictement positif. Le but de cette partie est de rechercher s'il existe une tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a, qui passe par l'origine du repère.

1) Soit T_a la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a. Donner une équation de T_a.
2) Démontrer qu'une tangente à $\mathscr{C}_f$ en un point d'abscisse a strictement positive passe par l'origine du repère si et seulement si $1 - a^2e^{a-1} = 0$.
3) Montrer que 1 est l'unique solution sur $]0\,;\,+\infty[$ de : $1 - x^2e^{x-1} = 0$..
4) Donner alors une équation de la tangente recherchée.

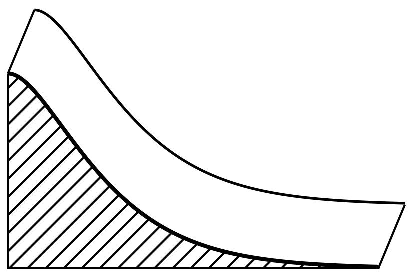
EXERCICE 7

Le directeur d'un zoo souhaite faire construire un toboggan pour les pandas. Il réalise le schéma ci-contre de ce toboggan en perspective cavalière.

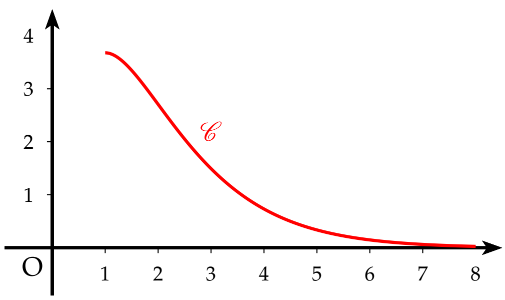
Le profil de ce toboggan est modélisé par la courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;8]$ par :

$$f(x) = (ax+b)e^{-x} \quad \text{où} \quad a \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad b \in \mathbb{N}$$

La courbe $\mathscr{C}$ est tracée ci-dessous dans un repère orthonormé dont l'unité est le mètre.



1) On souhaite que la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 1 soit horizontale.
   Déterminer la valeur de l'entier b.
2) On souhaite que le haut du toboggan soit situé entre 3,5 et 4 mètres de haut.
   Déterminer la valeur de l'entier a.



Ln : simplification et ensemble de définition

EXERCICE 8

1) Simplifier les écritures suivantes : $\text{A} = e^{\ln 3}$; $\text{B} = \dfrac{e^{3+\ln 8}}{e^{2+\ln 4}}$; $\text{C} = \dfrac{e^{\ln 8}}{e^{3\ln 2}}$

2) Simplifier les fonctions f et g : $f(x) = e^{\ln(x-1)+\ln x}$; $g(x) = \ln e^{\frac{1}{x}} + e^{-\ln x}$

EXERCICE 9

Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes :

1) $\ln(x-3)$
2) $\ln(1-x)$
3) $\ln(x^2)$
4) $\dfrac{1}{x}\ln(1+x)$
5) $\dfrac{1}{\ln x}$
6) $\ln(x^2+4x)$
7) $\ln\left(\dfrac{x-3}{2-x}\right)$
8) $\ln(e^x-1)$
9) $\ln|x+1| - \ln|x-1|$
10) $e^x + \ln|x|$
11) $\ln e^x - e^{\ln(x+1)}$

Ln : équations et inéquations

EXERCICE 10

Résoudre les équations suivantes en précisant leur ensemble de validité :

1) $\ln(2-2x) = 1$
2) $\ln(2-x) = -3$
3) $\ln(x^2-8) = 0$
4) $\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right) = 2$
5) $e^{x+2} = 3$
6) $e^{\frac{x}{x+1}} = 2$
7) $(e^x+1)(e^x-4) = 0$
8) $\ln(3x-4) = \ln(x^2-4)$
9) $\ln(-3x) = \ln(x^2-4)$
10) $\ln(x-2) = \ln 2$
11) $\ln(x-2) = \ln(x^2-2)$

EXERCICE 11

Résoudre les inéquations suivantes en précisant leur ensemble de validité :

1) $\ln x < 1$
2) $\ln x \geqslant 2$
3) $-1 \leqslant \ln x \leqslant 2$
4) $\ln(2x-1) \leqslant -1$
5) $e^{x-1} < 2$
6) $e^{\frac{x+1}{x}} > 3$
7) $\dfrac{1}{2} \leqslant e^x \leqslant 2$
8) $(e^x+1)(e^x-4) \leqslant 0$
9) $\ln(x-2) \leqslant \ln(2x-1)$
10) $\ln(-3x) \geqslant \ln(x^2-4)$
11) $\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right) \geqslant \ln x$
12) $\ln x \leqslant \ln(x^2-2x)$

Propriétés de la fonction logarithme

EXERCICE 12

1) Simplifier : $a = \ln 3 + \ln \frac{1}{3}$; $b = \ln \frac{1}{16}$; $c = \frac{1}{2} \ln \sqrt{2}$

2) Exprimer en fonction de $\ln 2$ et $\ln 5$: $a = \ln 50$; $b = \ln \frac{16}{25}$; $c = \ln 250$

3) Démontrer que : $\ln(2+\sqrt{3}) + \ln(2-\sqrt{3}) = 0$

4) Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue n entier naturel :

   a) $2^n \leqslant 10^6$ b) $\left(\frac{1}{3}\right)^n \leqslant 10^{-4}$ c) $\left(\frac{2}{5}\right)^n \leqslant 2 \times 10^{-3}$ d) $\left(1 + \frac{3}{100}\right)^n \geqslant 2$

EXERCICE 13

Simplifier au maximum chacun des nombres suivants :

1) $\mathrm{A} = \ln e^3 - \ln e^2$
2) $\mathrm{B} = \ln e\sqrt{e}$
3) $\mathrm{C} = \ln 2 + \ln(16e) - \ln(4e^2)$
4) $\mathrm{D} = \ln\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\ln \frac{1}{e}\right)^2$
5) $\mathrm{E} = 3(\ln 3 + \ln 5) - \ln 27 - 2\ln 10 - \ln \frac{1}{4}$

EXERCICE 14

Résoudre les équations suivantes en précisant leur ensemble de validité :

1) $2\ln x = \ln(x+4) + \ln 2x$
2) $e^{3x} = 4e^x$
3) $e^{2x} - 5e^x + 4 = 0$
4) $e^{-2x} - 5e^{-x} + 6 = 0$

EXERCICE 15

Résoudre les inéquations suivantes en précisant leur ensemble de validité :

1) $\ln(5-x) - \ln 3 + \ln(x-1) \geqslant 0$
2) $e^{2x} < 2e^x$
3) $e^{x+2} \geqslant \frac{3}{e^x}$
4) $\ln^2 x - 2\ln x - 3 \geqslant 0$
5) $3e^{2x} - 7e^x + 2 < 0$

EXERCICE 16

Pour tout réel x, on pose : $f(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2$

1) a) Vérifier que $f(-1) = 0$ puis en déduire une factorisation de $f(x)$

   b) Résoudre alors l'inéquation : $f(x) \leqslant 0$

2) En utilisant les résultats du 1) résoudre : $2\ln x + \ln(2x+5) \leqslant \ln(2-x)$.

EXERCICE 17

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'équation (E_1) sur $]0\,;+\infty[$: $e^x - x^n = 0$

1) Montrer que l'équation (E_1) est équivalente à l'équation (E_2) : $\ln(x) - \frac{x}{n} = 0$

2) Pour quelles valeurs de n l'équation (E_1) admet-elle deux solutions ?

Limites

EXERCICE 18

Déterminer les limites au point considéré :

1) $f(x) = x + 1 + \dfrac{\ln x}{x}$ en $+\infty$

2) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln x$ en 0

3) $f(x) = \ln(e^x + 2)$ en $-\infty$ et $+\infty$

4) $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x + 1}{2e^x + 3}\right)$ en $-\infty$ et $+\infty$

Dérivées

EXERCICE 19

Pour les fonctions suivantes calculer la fonction dérivée en donnant auparavant l'ensemble sur lequel la dérivée est définie :

1) $f(x) = \ln(1 + x^2)$

2) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

3) $f(x) = \ln(\ln x)$

4) $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}$

5) $f(x) = e^{-x} \ln x$

6) $f(x) = e^{x \ln x}$

7) $f(x) = \ln(1 + e^x)$

8) $f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$

Études de fonctions

EXERCICE 20

f est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$

1) a) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$

   b) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

2) a) On note A le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 1.
   Trouver une équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ en A.

   b) Construire T, puis $\mathscr{C}_f$ (unités 2 cm sur (Ox) et 5 cm sur (Oy)).

EXERCICE 21

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - \ln(x^2 + 1)$.

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = x$.

2) Justifier tous les éléments du tableau de variations ci-dessous à l'exception de la limite de la fonction f en $+\infty$ que l'on admet.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$		$\nearrow$		$+\infty$

3) Montrer que, pour tout réel x appartenant à $[0;1]$, $f(x)$ appartient à $[0;1]$.

4) On considère l'algorithme suivant :

```
from math import*
"entrez␣la␣valeur␣a"
a=float(input())
n=0
while n-log(n**2+1)<a:
    n+=1
print(n)
```

a) Que détermine cet algorithme ?

b) Qu'affiche l'algorithme lorsque la valeur saisie pour a est 100 ?

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à $[0;1]$.

2) Étudier les variations de la suite (u_n).

3) Montrer que la suite (u_n) est convergente vers ℓ.

4) Déterminer la valeur ℓ de la limite de la suite (u_n)

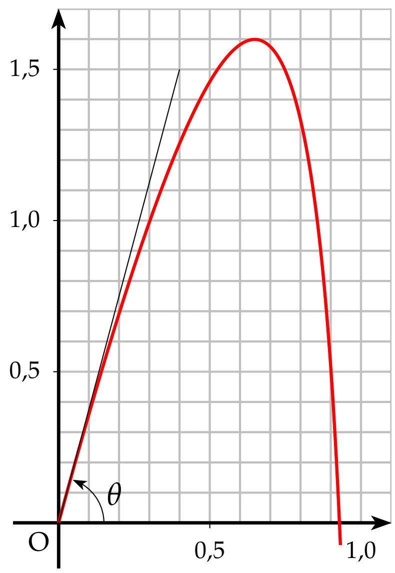
EXERCICE 22

Projectile dans un fluide

Lors d'une expérience, on lance un projectile dans un milieu fluide. L'objectif est de déterminer pour quel angle de tir θ par rapport à l'horizontale la hauteur du projectile ne dépasse pas 1,6 m.
Le projectile ne se déplace pas dans l'air mais dans un fluide, le modèle parabolique n'est pas adopté.
On modélise le projectile par un point qui se déplace, dans un plan vertical, sur la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie sur l'intervalle $[0;1[$ par :

$$f(x) = bx + 2\ln(1-x)$$

$b \geqslant 2$ est un paramètre réel, x et $f(x)$, exprimés en mètres, sont l'abscisse et l'ordonnée du projectile.



1) a) Calculer la fonction dérivée f' sur l'intervalle $[0;1[$

b) Montrer que la fonction f admet un maximum sur $[0;1[$.

2) On veut déterminer les valeurs du paramètre b pour lequel la hauteur maximale du projectile ne dépasse pas 1,6 mètre.
On pose la fonction g définie sur $\mathrm{I} = [2;+\infty[$ par : $g(x) = x - 2 + 2\ln 2 - 2\ln x$.

a) Montrer que le problème revient à résoudre $g(x) \leqslant 1,6$

b) Montrer que la fonction g est strictement croissante sur I.

c) Montrer que l'équation $g(x) = 1,6$ admet une unique solution α sur I. Déterminer un encadrement de la valeur de α à 10^{-3} près.

d) Déterminer les valeurs de b répondant au problème.

3) Dans cette question, on choisit $b = 5,69$.
L'angle de tir θ correspond à l'angle entre l'axe des abscisses et la tangente de $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
Déterminer une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle θ.

EXERCICE 23

Soit la fonction f définie sur I = $[-2,5\,;\,2.5]$ par : $f(x) = \ln(-2x^2 + 13,5)$

1) Montrer que : $\forall x \in \mathrm{I},\ f(x) \geqslant 0$
2) Déterminer la parité de la fonction f sur I. Que peut-on en déduire pour $\mathscr{C}_f$.
3) Déterminer la dérivée f' puis dresser le tableau de variation de la fonction f sur I. Retrouver alors le résultat de la question 1).
4) La courbe $\mathscr{C}_f$ est-elle un arc de cercle de centre 0 ? Justifier la réponse.

EXERCICE 24

Soit la fonction f définie sur $]-1\,;+\infty[$ par : $f(x) = x^2 - 2,2x + 2,2\ln(x+1)$

1) Visualiser, sur la calculatrice, la courbe $\mathscr{C}_f$: $X \in [-2\,;\,4]$ et $Y \in [-5\,;\,5]$
Reproduire l'allure de la courbe $\mathscr{C}_f$ obtenue sur la calculatrice.

2) À partir de cette représentation graphique, quelles conjectures peut-on faire :
   a) Sur les variations de la fonction f.
   b) Sur le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

3) On se propose maintenant d'étudier la fonction f.
   a) Calculer la dérivée f'.
   b) En déduire le sens de variation de la fonction f.
   c) Étudier la limite en -1. On admettra que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
   d) Dresser le tableau de variation de la fonction f.
   e) Déduire de cette étude, en précisant le raisonnement, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
   f) Les résultats 3 b) et 3 e) confirment-ils les conjectures émises au 2) ?

4) On veut représenter, sur la calculatrice, la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f sur l'intervalle $[-0,1\,;\,0,2]$, de façon à visualiser les résultats de la question 3).

   Quelles valeurs extrêmes de l'ordonnée Y proposez-vous pour mettre en évidence les résultats de la question 3) c) dans la fenêtre de votre calculatrice ?

   Vérifier le ensuite sur votre calculatrice.

EXERCICE 25

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $u(x) = \ln x + x - 3$.

1) Justifier que la fonction u est strictement croissante sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
2) Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [2\ ;\ 3]$.
3) En déduire le signe de $u(x)$ en fonction de x.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)(\ln x - 2) + 2$.

1) Déterminer la limite de la fonction f en 0.
2) a) Démontrer que, pour tout réel $x \in]0\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{u(x)}{x^2}$.
   b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Partie C

Soit $\mathscr{C}'$ la courbe d'équation $y = \ln(x)$.

1) Démontrer que, pour tout réel $x \in]0\ ;\ +\infty[$, $f(x) - \ln x = \dfrac{2 - \ln x}{x}$.
   En déduire que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}'$ ont un seul point commun dont on déterminera les coordonnées puis étudier les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}'$.
2) Calculer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{2 - \ln x}{x}$. Que peut-on dire de $\mathscr{C}'$ par rapport à $\mathscr{C}_f$?

Logarithme décimal

EXERCICE 26

Le plus grand nombre premier, montré en janvier 2016, est égal à $2^{74\,207\,281} - 1$.
Combien a t-il de chiffres ?

EXERCICE 27

Lors d'une réaction acide/base, le pH de la solution est donné par :

$$\mathrm{pH} = \mathrm{pK_A} + \log \frac{[\mathrm{Base}]}{[\mathrm{Acide}]}$$

où $\mathrm{pK_A} = -\log \mathrm{K_A}$, avec $\mathrm{K_A} = \dfrac{[\mathrm{Base}][\mathrm{H_3O^+}]}{[\mathrm{Acide}]}$, appelé constante d'équilibre.

On considère une solution contenant le couple $\mathrm{NH_4^+/NH_3}$ de $\mathrm{K_A} = 6,3 \times 10^{-10}$

On suppose que, dans cette solution, l'ammoniac est l'espèce prédominante : il y a vingt fois plus de molécules d'ammoniac que d'ion hydronium ($\mathrm{NH_4^+}$).

Déterminer le pH de la solution considérée