

Exercice 1

1) f est dérivable sur $[1; 2]$ comme fonction polynôme.

$\forall x \in [1; 2], f'(x) = 2x - 2$ donc $\forall x \in [1; 2], f'(x) \geq 0$ donc f est croissante sur $[1; 2]$.

2)

a) Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel $n : 1 \leq u_n \leq 2$

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $P(n)$ la proposition " $1 \leq u_n \leq 2$ "

Initialisation : $u_0 = \frac{3}{2}$ donc $1 \leq u_0 \leq 2$ donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : On suppose $P(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé.

Montrons que $P(n+1)$ est vraie c'est à dire $1 \leq u_{n+1} \leq 2$

D'après l'hypothèse de récurrence $1 \leq u_n \leq 2$

Donc, par croissance de f sur $[1; 2]$, on a $f(1) \leq f(u_n) \leq f(2)$ c'est à dire $1 \leq u_{n+1} \leq 2$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, on a :

$\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq 2$

b) Pour tout entier naturel n :

D'une part, $u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 2u_n + 2 - u_n = u_n^2 - 3u_n + 2$

D'autre part, $(u_n - 2)(u_n - 1) = u_n^2 - u_n - 2u_n + 2 = u_n^2 - 3u_n + 2$

Donc $u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)(u_n - 1)$

c) Pour tout entier naturel n , $1 \leq u_n \leq 2$ donc $u_n - 2 \leq 0$ et $u_n - 1 \geq 0$ donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$ donc la suite (u_n) est décroissante.

d) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1 donc, d'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers un réel L avec $1 \leq L \leq 2$.

D'une part, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = L$

D'autre part, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$ donc par limite de somme et produit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = L^2 - 2L + 2$

Donc, par unicité de la limite, $L = L^2 - 2L + 2$ (*)

(*) $\Leftrightarrow L^2 - 3L + 2 = 0$

(*) $\Leftrightarrow (L - 2)(L - 1) = 0$

(*) $\Leftrightarrow L = 1$ ou $L = 2$.

Or la suite (u_n) est décroissante donc majorée par $u_0 = \frac{3}{2}$ donc $L \leq \frac{3}{2}$ donc $L = 1$.

Exercice 2

Variables	u nombre réel ; n et i nombres entiers naturels
Entrée	Saisir n
Initialisation	u prend la valeur 3
Traitement	Pour i allant de 1 à n u prend la valeur $3u + (i - 1) - 4$ Fin boucle pour
Sortie	Afficher u