

Correction – Devoir surveillé n°3

NOM et Prénom : Classe :

Durée : 2h – Calculatrice autorisée – La qualité de la rédaction est prise en compte dans la notation

Exercice 1 : 6,5 points

$ABCDEFGH$ est un cube. On note O le centre de la face $ABCD$.

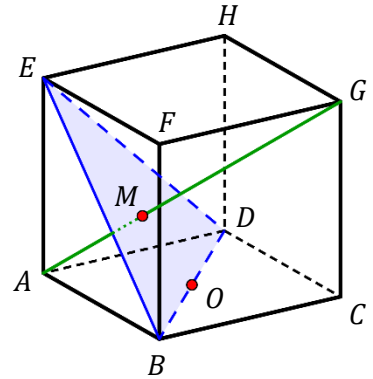
On définit le point M par la relation :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$$

1. Sans justifier, que peut-on dire des droites (EB) et (AG) ?

Les droites (EB) et (AG) sont non coplanaires (ni sécantes, ni parallèles).

0,5 pt



On se place dans le repère $(C; \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CG})$.

2. Sans justification, donner les coordonnées des points A, B, C, D, E et G dans ce repère.

Dans ce repère, on a :

$A(1; 1; 0)$ $B(1; 0; 0)$ $C(0; 0; 0)$ $D(0; 1; 0)$ $E(1; 1; 1)$ $G(0; 0; 1)$ 0,75 pt

3. a. Exprimer $\overrightarrow{CO}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CO} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} && \text{car } O \text{ est le centre de la face } ABCD \text{ donc le milieu du segment } [AC] \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}) \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} \end{aligned}$$

0,5 pt

- b. Montrer que $\overrightarrow{CM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CG}$. En déduire les coordonnées de M dans ce repère.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CM} &= \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OM} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} && \text{d'après la question précédente et l'énoncé} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CO} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CG} && \text{car } O \text{ est le milieu de } [CA] \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}\right) + \frac{1}{3}\overrightarrow{CG} && \text{d'après la question précédente} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \frac{1}{6}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{CD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CG} \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{CB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CG} \end{aligned}$$

1,25 pt

Dans le repère $(C; \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CG})$, le point M a donc pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$. 0,25 pt

4. Les points A, M et G sont-ils alignés ? Justifier.

Les points A, M et G sont alignés

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow$ il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que : $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AG}$

Or, $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_M - x_A \\ y_M - y_A \\ z_M - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AG}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On remarque alors que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$.

Ainsi, les points A, M et G sont alignés. 1 pt

5. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont coplanaires.

$\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont coplanaires
 $\Leftrightarrow$ il existe $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ tels que : $\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BD} + y\overrightarrow{BE}$ $\hookleftarrow$ car $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BE}$ ne sont pas colinéaires

Or, on a $\overrightarrow{BM} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BE} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Donc : $\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BD} + y\overrightarrow{BE} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3} = -1x + 0y \\ \frac{2}{3} = 1x + 1y \\ \frac{1}{3} = 0x + 1y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} - x = y \\ y = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$

Donc $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BE}$

Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont coplanaires. **1,5 pt**

6. On admet que la droite (AG) n'est pas parallèle au plan (BDE) .

Que peut-on en déduire pour le point M ? Justifier.

Comme la droite (AG) n'est pas parallèle au plan (BDE) ,
 alors (AG) traverse le plan (BDE) en un certain point.

Or :

- $M \in (AG)$ car A, M et G sont alignés (q°4).
- $M \in (BDE)$ car $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont coplanaires (q°5).

Ainsi, M est le point d'intersection de la droite (AG) et du plan (BDE) . **0,75 pt**

Exercice 2 : 5,75 points

En début du mois de janvier 2022, le journal *La Hulotte* compte 7500 abonnés.

A la fin de chaque mois, 90 % des abonnés restent fidèles, puis on compte ensuite 300 nouveaux abonnés.

Pour tout entier $n \geq 1$, on note u_n le nombre d'abonnés en début du n -ième mois à partir de janvier 2022.

On a donc $u_1 = 7500$ et pour tout entier $n \geq 1$, $u_{n+1} = 0,9u_n + 300$.

Les parties A et B sont indépendantes.

L'objectif est de déterminer de deux façons différentes la limite éventuelle de la suite (u_n) .

Partie A :

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq u_{n+1} \geq 3000$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note P_n la proposition $u_n \geq u_{n+1} \geq 3000$.

- Initialisation : Pour $n = 1$:

D'une part, $u_1 = 7500$.

D'autre part, $u_2 = 0,9 \times u_1 + 300 = 7050$.

On a bien $u_1 \geq u_2 \geq 3000$. Ainsi, P_1 est vraie.

- Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons que P_k est vraie i.e. $u_k \geq u_{k+1} \geq 3000$.

Montrons alors que P_{k+1} est vraie i.e. $u_{k+1} \geq u_{k+2} \geq 3000$.

On a : $u_k \geq u_{k+1} \geq 3000$ d'après l'hypothèse de récurrence

donc $0,9u_k \geq 0,9u_{k+1} \geq 0,9 \times 3000$ car $0,9 > 0$

donc $0,9u_k + 300 \geq 0,9u_{k+1} + 300 \geq 2700 + 300$

donc $u_{k+1} \geq u_{k+2} \geq 3000$

Ainsi, P_{k+1} est vraie.

- Conclusion : La proposition P_n est vraie au rang $n = 1$ et est héréditaire.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq u_{n+1} \geq 3000$. **1,75 pt**

2. Justifier que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ . Que peut-on dire du réel ℓ ?

D'après la question précédente, la suite (u_n) est décroissante et minorée par 3000.

Ainsi, la suite (u_n) converge vers un réel ℓ . De plus, on peut affirmer que $\ell \geq 3000$. **0,75 pt**

3. Calculer la valeur de ℓ . Interpréter le résultat dans son contexte.

• D'une part : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$

• D'autre part : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (0,9u_n + 300) = 0,9 \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + 300 = 0,9\ell + 300$

Ainsi, on a l'égalité $\ell = 0,9\ell + 300$ donc $0,1\ell = 300$ puis $\ell = 3000$. **0,75 pt**

A terme (après un très grand nombre de mois), le journal *la Hulotte* comptera à peu près 3000 abonnés. **0,25 pt**

Partie B :

On définit la suite (v_n) pour tout entier $n \geq 1$ par $v_n = u_n - 3000$.

1. Montrer que la suite (v_n) est géométrique.

$v_n = u_n - 3000$ donc on a également $u_n = v_n + 3000$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 3000 \\ &= 0,9u_n + 300 - 3000 \\ &= 0,9(v_n + 3000) - 2700 \quad \text{car } u_n = v_n + 3000 \\ &= 0,9v_n + 0,9 \times 3000 - 2700 \\ &= 0,9v_n \end{aligned}$$

Ainsi, la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,9$. **1 pt**

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 3000 + 4500 \times 0,9^{n-1}$.

On déduit de la question précédente que $v_n = v_1 \times q^{n-1}$.

Or $v_1 = u_1 - 3000 = 7500 - 3000 = 4500$.

Donc $v_n = 4500 \times 0,9^{n-1}$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} u_n &= v_n + 3000 \\ &= 3000 + 4500 \times 0,9^{n-1} \end{aligned} \quad \textbf{0,5 pt}$$

3. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Puisque $0,9 \in]-1; 1[$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,9^{n-1} = 0$ car $0,9^{n-1} = \frac{0,9^n}{0,9} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{0,9} \frac{0}{9} = 0$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4500 \times 0,9^{n-1} = 0$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} (4500 \times 0,9^{n-1} + 3000) = 3000$.

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3000$. **0,75 pt**

Exercice 3 : 2,25 points

Soit $ABCD$ un tétraèdre. On note I le milieu de $[AC]$ et J le milieu de $[AD]$.

K est un point appartenant au plan (BCD) .

L'objectif est de tracer la section du plan (IJK) sur le tétraèdre.

1. Expliquer pourquoi (IJK) et (BCD) sont sécants.

$K \in (IJK)$ et $K \in (BCD)$ donc leur intersection est non vide.

De plus, les plans (IJK) et (BCD) ne sont pas confondus

car par exemple, $I \in (IJK)$ mais $I \notin (BCD)$ par construction du tétraèdre.

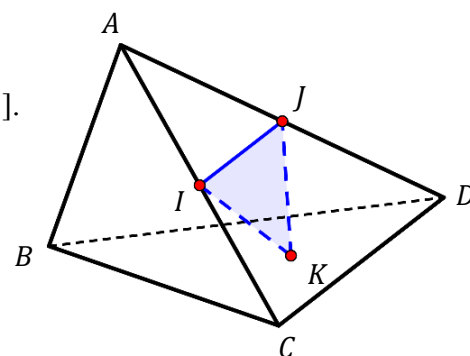
Ainsi, ces deux plans sont sécants selon une droite passant par le point K . **0,5 pt**

2. Justifier que les droites (IJ) et (CD) sont parallèles.

1^{ère} méthode :

I est le milieu du segment $[AC]$ et J est le milieu du segment $[AD]$.

D'après le théorème des milieux (cas particulier de la réciproque du théorème de Thalès), les droites (IJ) et (CD) sont parallèles.



2ème méthode :

$$\vec{IJ} = \vec{IA} + \vec{AJ} = \frac{1}{2}\vec{CA} + \frac{1}{2}\vec{AD} = \frac{1}{2}(\vec{CA} + \vec{AD}) = \frac{1}{2}\vec{CD}$$

Donc les vecteurs $\vec{IJ}$ et $\vec{CD}$ sont colinéaires. Ainsi, les droites (IJ) et (CD) sont parallèles. **0,5 pt**

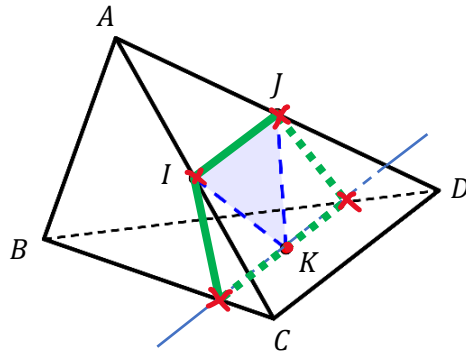
3. En déduire l'intersection des plans (IJK) et (BCD) .

Tracer ensuite cette droite au crayon à papier sur la figure.

- Les plans (IJK) et (BCD) sont sécants (q°1).
- (IJ) et (CD) sont parallèles.
- $(IJ) \subset (IJK)$ et $(CD) \subset (BCD)$.

D'après le théorème du toit, les plans (IJK) et (BCD) se coupent alors selon une droite parallèle à (CD) . De plus, cette droite passe par le point K (q°1). **0,75 pt**

4. Repasser en couleur la section du plan (IJK) sur le tétraèdre. **0,5 pt**



Exercice 4 : 2,75 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-8x^2}$. On note f' sa fonction dérivée.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^{-8x^2}(1 - 16x^2)$.

$$f(x) = u(x) \times v(x)$$

$$\text{où } \begin{cases} u(x) = x \\ u'(x) = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v(x) = e^{-8x^2} = e^{w(x)} \\ \text{avec } w(x) = -8x^2 \text{ et } w'(x) = -16x \\ \text{donc } v'(x) = e^{w(x)} \times w'(x) = -16xe^{-8x^2} \end{cases}$$

f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + v'(x)u(x) \\ &= 1 \times e^{-8x^2} + (-16xe^{-8x^2}) \times x \\ &= e^{-8x^2}(1 - 16x^2) \end{aligned} \quad \mathbf{1,5 \text{ pt}}$$

2. La courbe représentative de f admet-elle des tangentes horizontales ?

Si oui, déterminer l'abscisse des éventuels points concernés.

f admet une tangente horizontale au point d'abscisse x

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow e^{-8x^2}(1 - 16x^2) &= 0 && \text{car pour tout } x \in \mathbb{R} : e^{-8x^2} \neq 0 \text{ puisque } e^{-8x^2} > 0 \\ \Leftrightarrow 1 - 16x^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 16x^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow x^2 &= \frac{1}{16} \\ \Leftrightarrow x &= \sqrt{\frac{1}{16}} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{\frac{1}{16}} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{4} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{1}{4} \end{aligned} \quad \mathbf{1,25 \text{ pt}}$$

Alternative : pour résoudre $1 - 16x^2 = 0$, on aurait pu aussi calculer $\Delta = \dots$ puis $x_1 = \dots$ etc.

Exercice 5 : 2,75 points

Soit (w_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \frac{n \sin(n) + 1}{n^2 + 1}$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\frac{-n+1}{n^2+1} \leq w_n \leq \frac{n+1}{n^2+1}$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} & -1 \leq \sin(n) \leq 1 \quad \curvearrowright \text{ car } n \geq 0 \\ \text{donc } & -n \leq n \sin(n) \leq n \\ \text{donc } & -n+1 \leq n \sin(n) + 1 \leq n+1 \\ \text{donc } & \frac{-n+1}{n^2+1} \leq \frac{n \sin(n) + 1}{n^2+1} \leq \frac{n+1}{n^2+1} \quad \curvearrowright \text{ car } n^2+1 > 0 \\ \text{i.e. } & \frac{-n+1}{n^2+1} \leq w_n \leq \frac{n+1}{n^2+1} \end{aligned}$$

1 pt

2. En déduire la limite de la suite (w_n) .

- D'une part :

$$\frac{-n+1}{n^2+1} = \frac{n \left(-1 + \frac{1}{n}\right)}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{n} \times \frac{-1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\text{De plus, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-1 + \frac{1}{n}\right) = -1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = 1 \text{ donc par quotient, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}} = -1$$

$$\text{Ainsi, par produit : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-n+1}{n^2+1} = 0 \quad \textbf{1,25 pt}$$

- D'autre part :

$$\text{On obtient de la même manière que } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n^2+1} = 0 \quad \textbf{0,25 pt}$$

- On conclut par théorème des gendarmes que $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$. **0,25 pt**