

Devoir surveillé n°2

NOM et Prénom : Classe :

Calculatrice autorisée – La qualité de la rédaction est prise en compte dans la notation

Exercice 1 : 6,5 points

En juillet 2001, Chihiro décide d'ouvrir un compte bancaire. Elle y place initialement 10 000 yens.

Le placement à intérêts composés est au taux annuel de 2 %.

Autrement dit, tous les 1^{ers} janvier, la banque lui verse 2 % du montant actuellement disponible sur son compte.

De plus, son travail chez Yubaba lui permet de placer 50 000 yens chaque année à la fin du mois de janvier.

Pour tout entier naturel n , on note u_n le montant, en milliers de yens, présent sur ce compte le 31 décembre de l'année 2001 + n . On a donc $u_0 = 10$.

1. Calculer u_1 puis justifier que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 1,02u_n + 50$.

0,25 . $10\,000 \times 1,02 + 50\,000 = 60\,200$ donc $u_1 = 60,2$.

. Augmenter une quantité de 2% revient à la multiplier par $c = 1 + \frac{2}{100} = 1,02$

On ajoute ensuite le placement annuel de Chihiro de 50 milliers de Yens.

0,25 Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 1,02u_n + 50$

2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$. Que peut-on en déduire ?

. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note P_n la proposition " $u_{n+1} > u_n$ ".

Initialisation: Pour $n = 0$:

0,25 $u_0 = 10$ et $u_1 = 60,2$ donc $u_1 > u_0$. Ainsi, P_0 est vraie.

Hérédité: Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que P_k est vraie i.e. $u_{k+1} > u_k$.

Montrons alors que P_{k+1} est vraie i.e. $u_{k+2} > u_{k+1}$.

Par hypothèse de récurrence, on a:

$$u_{k+1} > u_k$$

donc $1,02 u_{k+1} > 1,02 u_k$

1,5

donc $1,02 u_{k+1} + 50 > 1,02 u_k + 50$

donc $u_{k+2} > u_{k+1}$

Ainsi, P_{k+1} est vraie.

Autre méthode: On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1,02x + 50$.

Par H.R., on a: $u_{k+1} > u_k$

donc $f(u_{k+1}) > f(u_k)$ car f est une fonction affine strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

donc $1,02 u_{k+1} + 50 > 1,02 u_k + 50$

donc $u_{k+2} > u_{k+1}$ Ainsi, P_{k+1} est vraie.

0,25 Conclusion: la proposition P_n est vraie au rang $n=0$ et est héréditaire.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$

0,5 . On en déduit que la suite (u_n) est strictement croissante donc son argent augmente.

3. a. A l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geq 500$.

Interpréter ensuite ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

À l'aide de la calculatrice, on obtient que $u_9 \approx 499,7$ et $u_{10} \approx 559,7$

donc le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geq 500$ est $n=10$.

0,5

Autrement dit, Chihiro aura au moins 50000 yens sur ce compte à partir de (février) 2011.

b. Compléter le code Python pour qu'il puisse afficher l'année à partir de laquelle Chihiro disposera d'au moins 1 000 000 de yens sur son compte.

4*0,25

```
u = 10
n = 0
while u < 1000:
    u = 1,02 * u + 50
    n = n + 1
print(2001 + n)
```

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n + 2500$.

a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 1,02.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $v_n = u_n + 2500$ alors $u_n = v_n - 2500$

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 2500$$

$$= 1,02 u_n + 50 + 2500$$

$$= 1,02 (v_n - 2500) + 2550$$

$$= 1,02 v_n - 1,02 \times 2500 + 2550$$

1,5

$$= 1,02 v_n.$$

Ainsi, la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1,02$.

b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2510 \times 1,02^n - 2500$.

(v_n) étant une suite géométrique de raison $q = 1,02$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = v_0 \times q^n = (u_0 + 2500) \times 1,02^n = 2510 \times 1,02^n$$

0,5

$$\text{puis } u_n = v_n - 2500 = 2510 \times 1,02^n - 2500.$$

Exercice 2 : 4,5 points

Dans chaque cas, déterminer (en justifiant) la limite de la suite (u_n) définie par :

a. $u_n = \left(3 - \frac{1}{n}\right) \left(\frac{2}{n^2} - 1\right)$

0,75

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 = 3$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n^2} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -1 = -1$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 = 3 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n^2} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} -1 = -1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{donc par somme, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{1}{n}\right) = 3 \\ \text{donc par somme, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{n^2} - 1\right) = -1 \end{array}$$

Ainsi, par produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -3$

b. $u_n = n^3 - \sqrt{n}$

On remarque qu'il s'agit d'une forme indéterminée.

$$u_n = n^3 \left(1 - \frac{\sqrt{n}}{n^3}\right) = n^3 \left(1 - \frac{\sqrt{n}}{n^2 \times \sqrt{n}}\right) = n^3 \left(1 - \frac{1}{n^2 \sqrt{n}}\right)$$

• $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty$

• Par produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \sqrt{n} = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2 \sqrt{n}} = 0$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2 \sqrt{n}}\right) = 1$

1,25 Ainsi, par produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

c. $u_n = \frac{10n^4 + n^2 - 5}{2n^4 - 4n}$

$$u_n = \frac{n^4 \left(10 + \frac{n^2}{n^4} - \frac{5}{n^4}\right)}{n^4 \left(2 - \frac{4n}{n^4}\right)} = \frac{10 + \frac{1}{n^2} - \frac{5}{n^4}}{2 - \frac{4}{n^3}}$$

• Par somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(10 + \frac{1}{n^2} - \frac{5}{n^4}\right) = 10$

1,25 • Par somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{4}{n^3}\right) = 2$

} Ainsi, par quotient, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{10}{2} = 5$

d. $u_n = \frac{\sqrt{n} - 1}{2n + 3}$

car $n = \sqrt{n} \times \sqrt{n}$

$$u_n = \frac{\sqrt{n} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{n \left(2 + \frac{3}{n}\right)} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} \times \sqrt{n}} \times \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{n}}}{2 + \frac{3}{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{n}}}{2 + \frac{3}{n}}$$

• $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

• Par somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1$

Par somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{3}{n}\right) = 2$

} donc, par quotient, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{n}}}{2 + \frac{3}{n}} = \frac{1}{2}$

1,25 Ainsi, par produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

Exercice 3 : 5 points

Les parties A et B sont indépendantes.

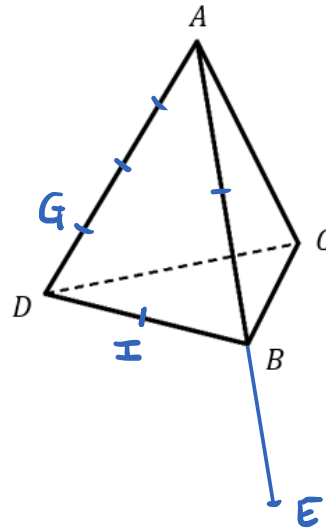
Partie A :

$ABCD$ est un tétraèdre de l'espace.

I est le milieu de l'arête $[BD]$, G est le point tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$

et E est le point tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

1. Construire les points I , G et E sur la figure ci-contre.



0,5

2. a. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{GE}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GE} &= \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AE} \\ &= -\overrightarrow{AG} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

0,75

$$= -\frac{3}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$$

- b. Montrer que $\overrightarrow{GI} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{GI} = \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DI}$$

$$\text{Or } \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AD} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$$

$$\text{et } \overrightarrow{DI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{GI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$= -\frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

car $\frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{2}{4} = -\frac{1}{4}$

1

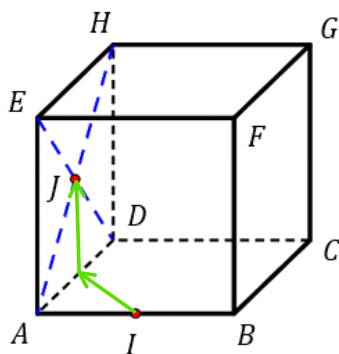
- c. Dédurre des deux questions précédentes que les points G , E et I sont alignés.

$$\text{On remarque que } 3\overrightarrow{GI} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GE}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{GI}$ et $\overrightarrow{GE}$ sont donc colinéaires.

0,75 Ainsi, les points G , I et E sont alignés.

Partie B :



On considère le cube $ABCDEFGH$ ci-contre.

J est le milieu de la face $ADHE$ et I le milieu du segment $[AB]$.

- Déterminer l'expression du vecteur $\vec{IJ}$ en fonction des vecteurs $\vec{DB}$ et $\vec{CG}$.

$$\vec{IJ} = \vec{IA} + \vec{AJ} = \frac{1}{2}\vec{BA} + \frac{1}{2}\vec{AH} = \frac{1}{2}(\vec{BA} + \vec{AH}) = \frac{1}{2}\vec{BH}$$

$$\text{Or, } \vec{BH} = \vec{BD} + \vec{DH} = -\vec{DB} + \vec{CG}$$

car $DCGH$ est un parallélogramme (c'est un carré).

$$1,5 \text{ Ainsi, } \vec{IJ} = -\frac{1}{2}\vec{DB} + \frac{1}{2}\vec{CG}$$

- Que peut-on en déduire concernant les vecteurs $\vec{IJ}$, $\vec{DB}$ et $\vec{CG}$?

0,5 On en déduit que les vecteurs $\vec{IJ}$, $\vec{DB}$ et $\vec{CG}$ sont coplanaires.

Exercice 4 : 4 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-x}$.

- Dériver la fonction f .

$$f(x) = xe^{-x} = u(x) \times v(x)$$

$$\text{où } u(x) = x \text{ et } v(x) = e^{-x} = e^{w(x)} \text{ avec } w(x) = -x$$

$$u'(x) = 1 \text{ et } v'(x) = e^{w(x)} \times w'(x) = e^{-x} \times (-1) = -e^{-x}$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$$

$$= 1 \times e^{-x} - e^{-x} \times x$$

$$1,5 \quad = e^{-x}(1 - x)$$

2. En déduire son tableau de variations.

$$f'(x) = e^{-x} (1-x)$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du même signe que $1-x$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
signe de $f'(x)$	+	0	-
Variations de f		$\frac{1}{e}$	

$$\begin{aligned} \text{car } 1-x > 0 \\ \Leftrightarrow x < 1 \end{aligned}$$

$$f(1) = 1e^{-1} = \frac{1}{e}$$

1,5

3. Montrer que l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 2 est :

$$y = -\frac{x}{e^2} + \frac{4}{e^2}$$

la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 2 a pour équation :

$$y = f'(2)(x-2) + f(2)$$

$$\text{Or } f'(2) = e^{-2}(1-2) = -e^{-2} = -\frac{1}{e^2}$$

$$\text{et } f(2) = 2e^{-2} = \frac{2}{e^2}$$

Ainsi, l'équation de cette tangente est :

$$y = -\frac{1}{e^2}(x-2) + \frac{2}{e^2}$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{x}{e^2} + \frac{2}{e^2} + \frac{2}{e^2}$$

1 $\Leftrightarrow y = -\frac{x}{e^2} + \frac{4}{e^2}$

Bonus :

On définit la suite (v_n) pour tout entier naturel n par $v_{n+1} = v_n + 2n$ avec $v_0 = 1$.

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = n^2 - n + 1$.

Initialisation: Pour $n=0$:

$$v_0 = 1 \quad \text{et} \quad 1^2 - 1 + 1 = 1 \quad \text{donc} \quad v_0 = 1^2 - 1 + 1$$

Hérédité: Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $v_k = k^2 - k + 1$. (H.R.)

Montrons alors que $v_{k+1} = (k+1)^2 - (k+1) + 1$.

$$\begin{aligned} \cdot \text{ D'une part: } (k+1)^2 - (k+1) + 1 &= k^2 + 2k + 1 - k - 1 + 1 \\ &= k^2 + k + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot \text{ D'autre part: } v_{k+1} &= v_k + 2k \quad (\text{d'après l'énoncé}) \\ &= k^2 - k + 1 + 2k \quad (\text{d'après l'H.R.}) \\ &= k^2 + k + 1 \end{aligned}$$

+ 0,5

$$\text{Ainsi, } v_{k+1} = (k+1)^2 - (k+1) + 1$$

Conclusion: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = n^2 - n + 1$.