

Correction – Devoir surveillé n°4

Calculatrice autorisée – La qualité de la rédaction est prise en compte dans la notation

Exercice 1 : 5 points

Les questions suivantes peuvent être traitées dans n'importe quel ordre.

1. En détaillant vos calculs (c'est-à-dire sans calculatrice), calculer $\binom{8}{3}$.

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \times 5!} = \frac{1 \times 2 \times \dots \times 5 \times 6 \times 7 \times 8}{1 \times 2 \times 3 \times 1 \times 2 \times \dots \times 5} = \frac{6 \times 7 \times 8}{2 \times 3} = 7 \times 8 = 56$$

0,75 pt

2. Un numéro de téléphone mobile commence par 06 ou 07, puis est suivi de huit chiffres tous compris entre 0 et 9. Combien de numéros de téléphone peut-on former ?

Il s'agit d'une situation « ordonnée et avec remise ».

Il a tout d'abord 2 choix au début du numéro de téléphone : 06 ou 07.

Puis, il y a 10 choix pour chaque chiffre choisi.

Comme il faut choisir 8 chiffres, il y a donc $2 \times 10^8 = 200\,000\,000$ numéros possibles.

0,75 pt

3. Sept amis, quatre garçons et trois filles, se rendent à un concert. Ils s'assoient les uns à côté des autres dans la même rangée.

a. Combien y a-t-il de configurations avec les garçons d'un côté et les filles de l'autre ?

Il s'agit d'une situation « ordonnée et sans remise ».

Il faut d'abord décider si les garçons sont à gauche ou à droite des filles : il y a 2 possibilités.

Puis, il y a 4! façons de placer les garçons (car 4 choix pour le 1^{er} garçon, puis 3 choix pour le 2^e garçon, etc.).

Enfin, il y a 3! façons de placer les filles.

Il y a donc $2 \times 4! \times 3! = 288$ placements possibles.

0,75 pt

b. Combien y en a-t-il avec les filles et les garçons intercalés ?

Comme il y a 4 garçons et 3 filles, la seule configuration avoir un garçon (une fille) sur deux est d'avoir un garçon par extrémité : G F G F G F G.

Il y a 4 choix pour le 1^{er} garçon, puis 3 choix pour la 1^{ère} fille, puis 3 choix pour le 3^e garçon, etc.

Ainsi, il y a $4 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 4! \times 3! = 144$ dispositions possibles.

0,75 pt

4. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot WILLIAM ?

Il y a 7! façons d'ordonner les 7 lettres si l'on considère que toutes les lettres sont différentes.

Cependant, chaque mot ordonné de cette façon peut s'écrire de deux façons en échangeant la place des « L ».

Donc chaque mot a été compté 2 fois de trop. Il faut donc diviser 7! par 2.

De même, on peut échanger de place les « I ». Il faut donc à nouveau diviser par 2.

Ainsi, il y a $\frac{7!}{2 \times 2} = 1260$ anagrammes du mot WILLIAM.

0,75 pt

5. On considère un jeu de 32 cartes classiques c'est-à-dire constitué des valeurs 7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi et As, et ce dans chacune des quatre couleurs (Trèfle, Pique, Carreau et Cœur).

Combien y a-t-il de mains de 5 cartes comportant le Valet de Pique et au moins 3 Cœurs ?

Il s'agit d'une situation « non ordonnée et sans remise ».

- Avec exactement 3 Cœurs :

On choisit le Valet de Pique (1 seule façon de le faire),

puis on choisit 3 Cœurs parmi les 8 Cœurs possibles.

On pioche enfin 1 carte parmi les cartes restantes qui ne sont pas des Cœurs

c'est-à-dire 1 carte parmi 23 (n'oublions pas qu'on a déjà pris le valet de Pique avant).

Il y a donc : $1 \times \binom{8}{3} \times \binom{23}{1} = 1288$ mains possibles.

- Avec exactement 4 Cœurs :

De même, on obtient $1 \times \binom{8}{4} = 70$ mains possibles (il n'y a pas de dernière carte à piocher).

Finalement, il y a $1288 + 70 = 1358$ mains répondant à la question. 1,25 pt

Exercice 2 : 2,5 points

Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.

- Affirmation 1 :**

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \cos\left(e^{-x} + \frac{\pi}{4}\right)$.

La droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ est une asymptote horizontale à la courbe de g au voisinage de $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \quad (\text{ou procéder par composition}) \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{-x} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Par continuité de la fonction cosinus sur $\mathbb{R}$, donc en particulier en $\frac{\pi}{4}$, on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(e^{-x} + \frac{\pi}{4}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \cos(X) \downarrow = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{On peut aussi écrire : } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(e^{-x} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{-x} + \frac{\pi}{4}\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Autrement dit, la droite d'équation $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ est une asymptote horizontale à $\mathcal{C}_g$ au voisinage de $+\infty$.

L'affirmation est donc fausse. **1,25 pt**

- Affirmation 2 :**

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{e^x - x^3 + x}{x^2 + 1}$. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$.

$$\text{Pour tout } x \neq 0 : h(x) = \frac{e^x - x^3 + x}{x^2 + 1} = \frac{e^x \left(1 - \frac{x^3}{e^x} + \frac{x}{e^x}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{e^x}{x^2} \times \frac{1 - \frac{x^3}{e^x} + \frac{x}{e^x}}{1 + \frac{1}{x^2}}$$

$$\text{D'une part, par croissance comparée : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$$

$$\text{D'autre part, par croissance comparée : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

$$\text{donc par somme, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{x^3}{e^x} + \frac{x}{e^x}\right) = 1. \quad \text{On obtient aussi } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1$$

$$\text{donc par quotient, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{x^3}{e^x} + \frac{x}{e^x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 1$$

Ainsi, par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$. L'affirmation est donc vraie. **1,25 pt**

Exercice 3 : 6,25 points

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 0,1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1,9u_n(1 - u_n)$.

- On considère la fonction f définie sur $[0 ; 1]$ par $f(x) = 1,9x(1 - x)$.

Etudier les variations de f sur $[0 ; 1]$.

$f(x) = 1,9x - 1,9x^2 = -1,9x^2 + 1,9x$ est un polynôme de degré deux, avec $a = -1,9$ $b = 1,9$ et $c = 0$.

On calcule :

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{1,9}{2 \times (-1,9)} = \frac{1}{2} \quad \text{puis} \quad \beta = f(\alpha) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 1,9 \times \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1,9 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{19}{40}$$

Comme $a = -1,9$ est négatif, la parabole est concave (« tournée vers le bas ») et on a :

x	0	$\frac{1}{2}$	1
Variations de f	0	$\frac{19}{40}$	0

$$f(0) = 1,9 \times 0(1 - 0) = 0$$

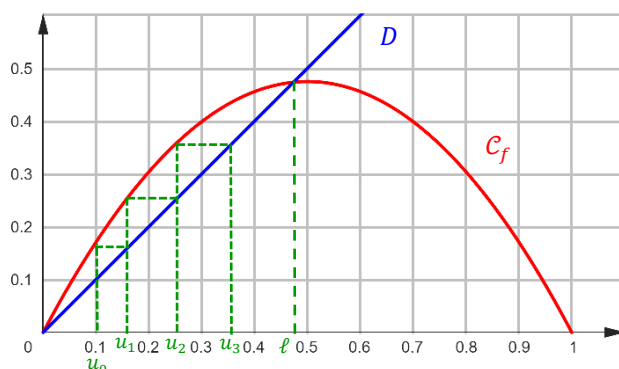
$$f(1) = 1,9 \times 1(1 - 1) = 1,9 \times 0 = 0$$

1 pt

Alternative : on aurait pu étudier le signe de $f'(x)$.

2. On remarquera que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

La courbe représentative de f et la droite D d'équation $y = x$ sont représentées dans le repère ci-dessous.



- a. Construire u_0, u_1, u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses. **0,5 pt**

- b. Conjecturer le sens de variations de la suite (u_n) et sa limite éventuelle.

On conjecture que la suite (u_n) est strictement croissante et converge vers $\ell \approx 0,47$. **0,5 pt**

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $0,1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_n$ la proposition $0,1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$.

- Initialisation : Pour $n = 0$:
D'une part, $u_0 = 0,1$. D'autre part, $u_1 = f(u_0) = f(0,1) = 1,9 \times 0,1(1 - 0,1) = 0,171$.
On a bien $0,1 \leq u_0 \leq u_1 \leq \frac{1}{2}$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_k$ est vraie i.e. $0,1 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq \frac{1}{2}$.
Montrons alors que $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie i.e. $0,1 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq \frac{1}{2}$.
On a par hypothèse de récurrence :

$$0,1 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq \frac{1}{2}$$

Comme f est croissante sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ donc en particulier sur $\left[0,1; \frac{1}{2}\right]$ alors :

$$\begin{aligned} f(0,1) &\leq f(u_k) \leq f(u_{k+1}) \leq f\left(\frac{1}{2}\right) \\ \text{donc } 0,1 &\leq 0,171 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq \frac{19}{40} \leq \frac{1}{2} \\ \text{donc } 0,1 &\leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

- Conclusion : La proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie au rang $n = 0$ et est héréditaire.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0,1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$. **1,5 pt**

4. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite exacte.

D'après la question précédente, la suite (u_n) est croissante majorée donc elle converge vers un réel ℓ .

De plus, l'encadrement de u_n permet d'affirmer que $\ell \in [0,1; 0,5]$. **0,5 pt**

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$
- (u_n) converge vers $\ell \in [0,1; 0,5]$.
- f est continue sur $\mathbb{R}$ (donc continue en ℓ) car c'est une fonction polynômiale.

Ainsi, $f(\ell) = \ell$ i.e. $1,9\ell(1 - \ell) = \ell$

$$\Leftrightarrow 1,9\ell - 1,9\ell^2 - \ell = 0 \quad \text{On aurait pu aussi poursuivre avec } 1,9(1 - \ell) = 1 \text{ car } \ell \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 0,9\ell - 1,9\ell^2 = 0$$

On peut poursuivre avec $\Delta = \dots = 0,81$ puis $\ell_1 = \dots = 0$ et $\ell_2 = \frac{9}{19}$ mais il y a mieux :

$$\Leftrightarrow \ell(0,9 - 1,9\ell) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ell = 0 \quad \text{ou} \quad 0,9 - 1,9\ell = 0$$

$$\Leftrightarrow \ell = 0 \quad \text{ou} \quad \ell = \frac{0,9}{1,9} = \frac{9}{19}$$

Or $\ell \in [0,1; 0,5]$ donc $\ell = \frac{9}{19}$. Autrement dit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{9}{19}$. **1,25 pt**

5. On considère la fonction Python ci-dessous.

L'objectif est de déterminer la plus petite valeur de l'entier n telle que $u_n \geq 0,4736$.

```
def recherche():
    u = 0.1
    n = 0
    while u < 0.4736 :
        u = 1.9*u*(1-u)
        n = n + 1
    return n
```

a. Compléter l'algorithme pour qu'il réponde au problème. **0,5 pt**

b. A l'aide de la calculatrice, donner la valeur renvoyée lors de l'appel de la fonction `recherche()`.

A l'aide de la calculatrice, on obtient $n = 7$. **0,5 pt**

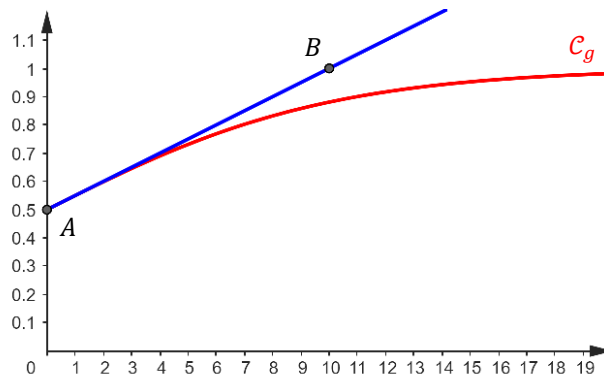
Exercice 4 : 6,25 points

Partie A

Soient a et b des nombres réels. On considère une fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = \frac{a}{1 + e^{-bx}}$

La courbe $\mathcal{C}_g$, représentant la fonction g dans le repère orthogonal ci-dessous, passe par le point $A(0 ; 0,5)$.

La tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point A passe par le point $B(10 ; 1)$.



1. Justifier que $a = 1$. On obtient alors, pour tout réel $x \geq 0$, $g(x) = \frac{1}{1 + e^{-bx}}$.

D'une part, $A(0 ; 0,5) \in \mathcal{C}_f$ donc $g(0) = 0,5$

D'autre part, $g(0) = \frac{a}{1 + e^{-b \times 0}} = \frac{a}{1 + e^0} = \frac{a}{2}$

Donc $\frac{a}{2} = 0,5$ d'où $a = 1$.

0,75 pt

2. On admet que la fonction g est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.

Montrer que, pour tout réel $x \geq 0$, $g'(x) = \frac{be^{-bx}}{(1 + e^{-bx})^2}$

$g(x) = \frac{1}{v(x)}$ ou dire que $g(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 1$

où $\begin{cases} v(x) = 1 + e^{-bx} \\ v'(x) = -be^{-bx} \end{cases}$

g est donc dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et pour tout $x \in [0 ; +\infty[$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{v'(x)}{v(x)^2} \\ &= -\frac{-be^{-bx}}{(1 + e^{-bx})^2} \\ &= \frac{be^{-bx}}{(1 + e^{-bx})^2} \end{aligned}$$

0,75 pt

3. En utilisant les données de l'énoncé, démontrer que $b = 0,2$.

- D'une part : $g'(0)$ correspond au coefficient directeur de la tangente à C_g au point $A(0 ; 0,5)$.
Or $B(10 ; 1)$ appartient aussi à cette tangente.
Ainsi, $g'(0) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1 - 0,5}{10 - 0} = \frac{0,5}{10} = 0,05$
- D'autre part :
$$g'(0) = \frac{be^{-b \times 0}}{(1 + e^{-b \times 0})^2} = \frac{b \times 1}{(1 + 1)^2} = \frac{b}{4}$$
- Ainsi, $0,05 = \frac{b}{4}$ donc $b = 4 \times 0,05 = 0,2$. **1 pt**

Partie B

La proportion d'individus qui possèdent un certain type d'équipement dans une population est modélisée par la fonction g de la partie A, c'est-à-dire la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{1 + e^{-0,2x}}$.

Le réel x représente le temps écoulé, en année, depuis le 1er janvier 2000. Le nombre $g(x)$ modélise la proportion d'individus équipés après x années. Ainsi, pour ce modèle, $g(0)$ est la proportion d'individus équipés au 1er janvier 2000 et $g(3,5)$ est la proportion d'individus équipés au milieu de l'année 2003.

Lorsque la proportion d'individus équipés dépasse 95 %, on dira que le marché est saturé.

1. Quelle est, pour ce modèle, la proportion d'individus équipés au 1er janvier 2010 ? Arrondir au centième.

$$g(10) = \frac{1}{1 + e^{-0,2 \times 10}} = \frac{1}{1 + e^{-2}} \simeq 0,88$$

Environ 88 % des individus seront équipés au 1^{er} janvier 2010. **0,25 pt**

2. a. Calculer la limite de la fonction g en $+\infty$. Interpréter ce résultat graphiquement, puis dans son contexte.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} -0,2x = -\infty$
donc par composition $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-0,2x} = 0$ puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + e^{-0,2x}) = 1$
Ainsi, par quotient, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$. **0,5 pt**
- La droite d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale à C_g en $+\infty$. **0,25 pt**
- Autrement dit, l'intégralité de la population tend à être équipée :
Après un grand nombre d'années, la quasi-totalité de la population sera équipée. **0,25 pt**

- b. Dresser le tableau de variations de la fonction g sur $[0 ; +\infty[$.

En utilisant les questions 2 et 3 de la partie A :

$$g'(x) = \frac{0,2e^{-0,2x}}{(1 + e^{-0,2x})^2}$$

Or, pour tout $x \in [0 ; +\infty[$, $e^{-0,2x} > 0$

Donc $0,2e^{-0,2x} > 0$ et $(1 + e^{-0,2x})^2 > 0$.

Ainsi, pour tout $x \geq 0$, $g'(x) > 0$.

En utilisant également la question précédente, on obtient :

1 pt

x	0	α	$+\infty$
Variations de g	0,5	0,95	1

3. Justifier qu'il existe une unique valeur $\alpha \in [0 ; +\infty[$ telle que $g(\alpha) = 0,95$.

Donner ensuite un encadrement décimal de α à 10^{-1} près. Interpréter ce résultat dans son contexte.

- La fonction g est continue et strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.
- $g(0) = 0,5$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$ et $0,95 \in [0,5 ; 1]$

Ainsi, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha \in [0 ; +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0,95$. **1 pt**

A l'aide de la calculatrice, on obtient que $14,7 < \alpha < 14,8$. **0,25 pt**

On en déduit que le marché sera saturé courant 2014 (vers août-septembre). **0,25 pt**