

Bac blanc n°1 de Mathématiques Tle spécialité Mathématiques
--

Année scolaire 2023-2024

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le sujet comporte cinq pages, numérotées de 1 à 5. Il est composé de quatre exercices, que le candidat pourra traiter dans l'ordre de son choix.

La page 5 est une feuille annexe, à rendre avec la copie.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il sera tenu compte dans l'appréciation des copies de la clarté des raisonnements et de la qualité de la rédaction.

Le barème, sur 20 points, est donné à titre indicatif et pourra être modifié.

Exercice 1 (5 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 4]$ par : $f(x) = \frac{2+3x}{4+x}$.

On admet que la fonction f est croissante sur $[0; 4]$.

On donne en annexe 1, à rendre avec la copie, la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f et la droite D' d'équation $y = x$.

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$. On admet que cette suite est bien définie.

1. Calculer u_1 .
2. a. Sur la feuille annexe 1, à rendre avec la copie, construire sur l'axe des abscisses les termes u_1 , u_2 et u_3 .
b. Quelles conjectures peut-on formuler sur le sens de variation et le comportement de la suite (u_n) quand n tend vers l'infini ?
3. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3$.
4. a. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
b. On appelle l la limite de la suite (u_n) et on admet que l vérifie l'égalité $f(l) = l$. Déterminer la valeur de la limite l .
5. On donne ci-contre la fonction **seuil**, écrite en langage Python.
a. Pourquoi est-on sûr que l'algorithme va s'arrêter si on saisit **seuil(0,001)** ?
b. Déterminer la valeur renvoyée par la saisie de **seuil(0,001)**.

Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice

```
def seuil(p):  
    n=0  
    u=3  
    while u-1>p:  
        n=n+1  
        u=(2+3*u)/(4+u)  
    return n
```

Exercice 2 (5,5 points)

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = xe^{1-x^2}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère du plan. En annexe 2, on a tracé cette représentation graphique, ainsi que quelques points qui seront définis dans la question 4.

1. a. Vérifier que, pour tout réel x différent de 0, $f(x) = \frac{e}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}}$.
b. En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.
c. Interpréter graphiquement ce résultat.

On admet que la limite de la fonction f en $-\infty$ est égale à 0.

2. a. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa dérivée. Démontrer que pour tout réel x :

$$f'(x) = (1 - 2x^2)e^{1-x^2}$$

- b. En déduire le tableau de variations de la fonction f .
3. On admet que f est concave sur $[0; 1,2]$.
a. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.
b. En déduire que, pour tout réel $x \in [0; 1,2]$, $f(x) \leq -x + 2$.
c. Tracer la tangente T sur le graphique fourni en annexe 2.
4. On considère la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = e^{1-x}$. On note $\mathcal{C}_g$ sa représentation graphique dans un repère du plan.
a. Vérifier que la droite T est tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 1.
b. Démontrer que, pour tout réel x , $g(x) \geq -x + 2$.
c. Dans le graphique fourni en annexe 2, on a placé les points de coordonnées $(0; g(0))$, $(2; g(2))$ et $(3; g(3))$. Tracer une allure de la représentation graphique de la fonction g sur le repère fourni en annexe 2.

Exercice 3 (5,5 points)

Dans une école de statistique, après l'étude des dossiers des candidats, le recrutement se fait de deux façons :

- 10 % des candidats sont sélectionnés sur dossier. Ces candidats doivent ensuite passer un oral à l'issue duquel 60 % d'entre eux sont finalement admis dans l'école.
- Les candidats n'ayant pas été sélectionnés sur dossier passent une épreuve écrite à l'issue de laquelle 20 % d'entre eux sont admis dans l'école.

Partie 1

On choisit au hasard un candidat à ce concours de recrutement. On notera :

- D l'évènement « le candidat a été sélectionné sur dossier » ;
- A l'évènement « le candidat a été admis à l'école » ;
- $\bar{D}$ et $\bar{A}$, les évènements contraires des évènements D et A respectivement.

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que le candidat soit sélectionné sur dossier et admis dans l'école.
3. Montrer que la probabilité de l'évènement A est égale à 0,24.
4. On choisit au hasard un candidat admis à l'école. Quelle est la probabilité que son dossier n'ait pas été sélectionné ?

Partie 2

On rappelle que la probabilité pour un candidat d'être admis à l'école est égale à 0,24.

On considère un échantillon de dix candidats choisis au hasard, en assimilant ce choix à un tirage au sort avec remise. On désigne par X la variable aléatoire dénombrant les candidats admis à l'école parmi les dix tirés au sort.

1. a. Quelle loi suit la variable aléatoire X ? Justifier soigneusement la réponse. On précisera les paramètres de cette loi.
b. Calculer la probabilité que trois des dix candidats tirés au sort soit admis dans l'école. On donnera une réponse arrondie au millième.
c. Calculer la probabilité qu'au moins deux des dix candidats tirés au sort soient admis à cette école. On donnera une réponse arrondie au millième.
2. a. Calculer $E(X)$.
b. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
3. Un lycée présente n candidats au recrutement dans cette école, où n est un entier naturel non nul. On admet que la probabilité qu'un candidat quelconque du lycée soit admis dans l'école est égale à 0,24 et que les résultats des candidats sont indépendants les uns des autres.
a. Exprimer, en fonction de n , la probabilité qu'aucun candidat issu de ce lycée ne soit admis à l'école.
b. A partir de quelle valeur de l'entier n la probabilité qu'au moins un élève de ce lycée soit admis à l'école est-elle supérieure ou égale à 0,99 ? On expliquera la démarche suivie.

Exercice 4 : (4 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, déterminer si elle est vraie ou fausse en justifiant. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

1. Dans l'espace muni d'un repère, on considère :

le plan (P) passant par le point $K(-1; 3; 1)$ et dont un couple de vecteurs directeurs est $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

la droite D dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 9t \\ y = 1 + 6t \\ z = -5 - t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$

les points $A(1; 1; 0)$, $B(3; 0; -1)$ et $C(7; 1; -2)$.

Affirmation 1 : Une représentation paramétrique de la (AB) est : $\begin{cases} x = 5 - 2k \\ y = -1 + k \\ z = -2 + k \end{cases}$ où $k \in \mathbb{R}$.

Affirmation 2 : Les droites D et (AB) sont coplanaires.

Affirmation 3 : La droite D et le plan (P) sont sécants.

2. On considère un cube $ABCDEFGH$

Affirmation 4 : les plans (FCH) et (BDE) sont parallèles.

3. On considère une urne opaque contenant quatre boules jaunes et cinq boules vertes indiscernables au toucher. On tire simultanément trois boules de cette urne.

Affirmation 5 : Le nombre de tirages composés de trois boules de la même couleur est 14.

4. On considère les sept notes : do-ré-mi-fa-sol-la-si, comprises dans une gamme musicale donnée. On appelle **phrase musicale** un ensemble ordonné de notes.

Affirmation 6 : On peut construire 35 phrases musicales constituée de quatre notes toutes distinctes.

Affirmation 7 : On peut construire plus de 1000 phrases musicales constituées de quatre notes non nécessairement distinctes.

