

Corrigé bac blanc

Exercice 1

1. $u_1 = f(u_0) = \frac{2+9}{4+3} = \frac{11}{7}$.

2. (a) Construction en annexe.

(b) Conjectures : La suite (u_n) semble décroissante et converger vers 1.

3. Démonstration par récurrence :

Initialisation

On a d'après la première question : $1 \leq u_1 \leq u_0 \leq 3$: l'encadrement est vrai au rang 0 ;

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3$; par croissance de la fonction f sur $[0 ; 4]$, on

$$f(1) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq f(3) \text{ ou car } f(1) = \frac{5}{5} = 1 \text{ et } f(3) = \frac{11}{7} \leq 3,$$

$1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 3$: la relation est donc vraie au rang $n+1$.

Conclusion : l'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai à un rang quelconque n il est vrai au rang suivant $n+1$: d'après le principe de récurrence pour tout entier naturel n , $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3$.

4. (a) D'après la question précédente la suite (u_n) est décroissante, minorée par 1 : elle converge donc vers une limite $\ell \geq 1$.

(b) On sait que $\ell + 4 \neq 0$, donc $f(\ell) = \ell \iff \ell(4 + \ell) = 2 + 3\ell \iff \ell^2 + \ell - 2 = 0$

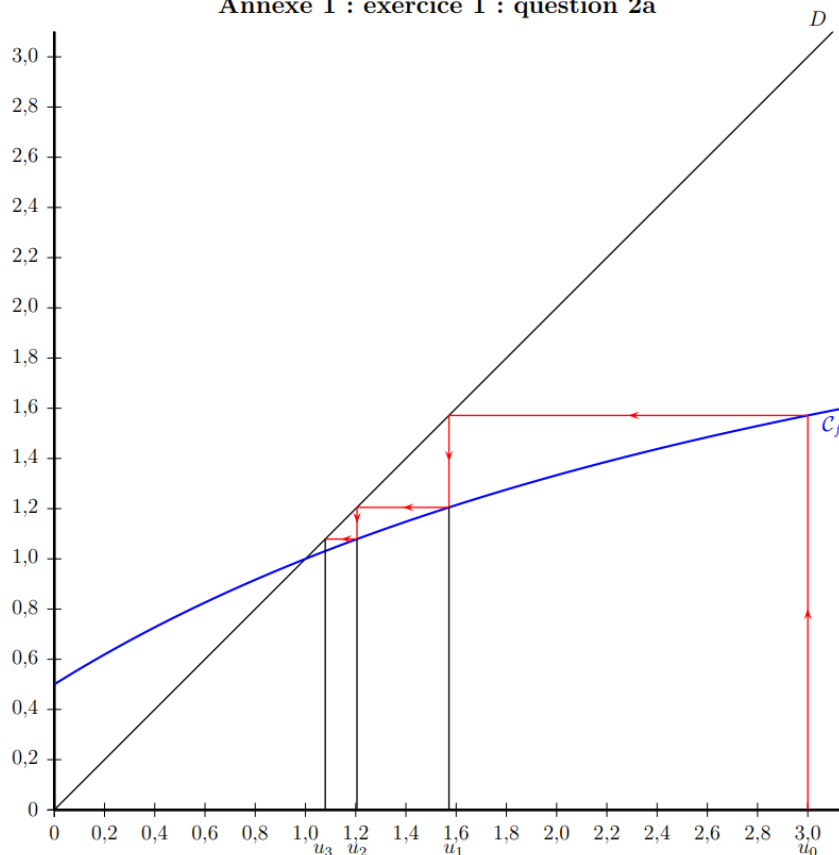
1 est solution évidente de cette équation ; l'autre solution est alors -2 (le produit des racines devant être égal à $\frac{c}{a}$).

Comme $\ell \in [1 ; 3]$, la seule solution est $\ell = 1$.

5. (a) L'algorithme va s'arrêter car la suite est minorée par 1 et qu'elle converge vers 1. Il existe donc bien un entier naturel n tel que : $u_n - 1 \leq 0,001$.

(b) La valeur renvoyée par l'algorithme est 8 car la suite (u_n) est décroissante et on a $u_7 - 1 \approx 0,0019 > 0,001$ et $u_8 - 1 \approx 0,0007 < 0,001$. Cela signifie que à partir du rang 8, on a $u_n - 1 < 0,001$

Annexe 1 : exercice 1 : question 2a



Exercice 2 sur les fonctions :

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = xe^{1-x^2}$.

1. a- Soit $x \neq 0$, $f(x) = \frac{x^2}{x} \times \frac{e^1}{e^{x^2}} = \frac{e^1}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}} = \frac{e}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}}$

b- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ par produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ } par composition $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{x^2} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ par croissance comparée

Par passage à l'inverse $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = 0$

Par somme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

c- Graphiquement, on en déduit que la droite d'équation $y = 0$, donc l'axe des abscisses, est asymptote horizontale à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$.

2. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa dérivée.

a- f est de la forme $u \times v$ où $u : x \rightarrow x$ et $v : x \rightarrow e^{1-x^2}$.

f' est donc de la forme $u'v + v'u$

Pour tout réel x , $f'(x) = 1 \times e^{1-x^2} + x \times (-2xe^{1-x^2})$

$$f'(x) = e^{1-x^2}(1 - 2x^2) = (1 - 2x^2)e^{1-x^2}$$

b- Pour tout réel x , $e^{1-x^2} > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $1 - 2x^2$

$$1 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ainsi :

	x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$a < 0$	$1 - 2x^2$		-	+	-
	$f'(x)$		-	+	-
	Variations de f	0	$-\frac{\sqrt{2}e}{2}$	$\frac{\sqrt{2}e}{2}$	0

3. On admet que f est concave sur $[0 ; 1,2]$.

a. L'équation réduite de la tangente T à C_f au point d'abscisse 1 a pour équation : $y = f'(x)(x-1) + f(1)$

$$f'(1) = (1 - 2 \times 1^2)e^{1-1^2} = -1 \times e^0 = -1$$

$$f(1) = 1e^{1-1^2} = 1 \times e^0 = 1$$

Donc T a pour équation : $y = -1(x-1) + 1 = -x + 2$

b. f est concave sur $[0 ; 1,2]$ donc sur cet intervalle, la courbe C_f se situe en dessous de ses tangentes. Donc C_f se situe en dessous de T sur $[0 ; 1,2]$. $1 \in [0 ; 1,2]$, ainsi, pour tout réel $x \in [0 ; 1,2]$, $f(x) \leq -x + 2$.

c- Voir annexe.

4. On considère la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = e^{1-x}$.

a. L'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 1 à la représentation graphique C_g de la fonction g est :

$$y = g'(1)(x-1) + g(1)$$

g est de la forme e^u où $u : x \rightarrow 1-x$.

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction affine et l'exponentielle est également dérivable sur $\mathbb{R}$. Ainsi, par composition, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour réel x , $g'(x) = -e^{1-x}$ donc $g'(1) = -e^{1-1} = -e^0 = -1$

$$g(1) = e^{1-1} = e^0 = 1$$

Ainsi la tangente a pour équation : $y = -1(x-1) + 1 = -x + 2$

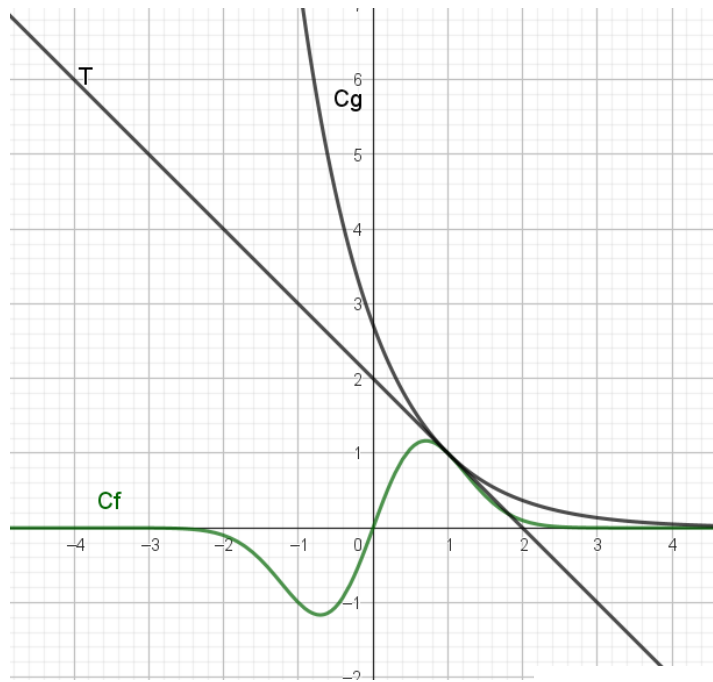
Il s'agit bien de la droite T .

b. Montrons que g est convexe sur $\mathbb{R}$.

g' est dérivable sur $\mathbb{R}$ car $g' = -g$ et g est dérivable sur $\mathbb{R}$

Pour tout réel x , $g''(x) = -(-e^{1-x}) = e^{1-x} = g(x)$

Pour tout réel x , $g''(x) \geq 0$ donc g est convexe sur $\mathbb{R}$. Sa courbe représentative C_g se situe donc au-dessus de toutes ses tangentes. Ainsi C_g se situe au-dessus de T sur $\mathbb{R}$ ce qui signifie que, pour tout réel x , $g(x) \geq -x + 2$.
c. Voir annexe



Exercice 3

Partie 1

1) Voir arbre ci-contre :

2) Il s'agit de calculer $P(D \cap A)$

$$P(D \cap A) = P(D) \times P_D(A) = 0,1 \times 0,6 = 0,06$$

La probabilité que le candidat soit sélectionné sur dossier et admis dans l'école est égale à 6%

3) D et $\bar{D}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales on a :

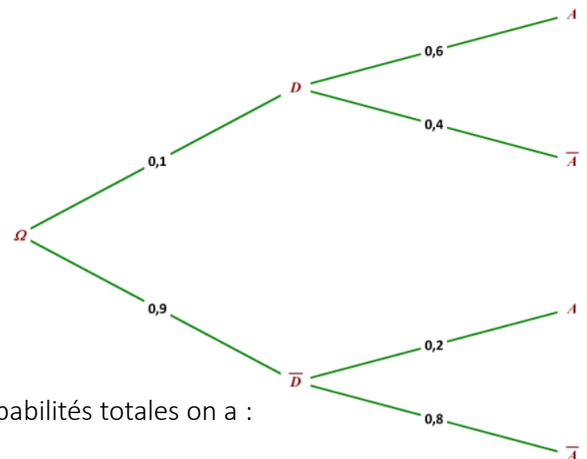
$$P(A) = P(D \cap A) + P(\bar{D} \cap A) = 0,06 + P(\bar{D}) \times P_{\bar{D}}(A)$$

$$P(A) = 0,06 + 0,9 \times 0,2 = 0,24$$

4) Il s'agit de calculer $P_A(D)$

$$P_A(D) = \frac{P(D \cap A)}{P(A)} = \frac{0,06}{0,24} = \frac{1}{4}$$

La probabilité que le dossier d'un candidat n'ait pas été sélectionné, sachant qu'il soit admis à l'école est égale à 75%



Partie 2

1) a) Il s'agit de la répétition de 10 épreuves de Bernoulli dont le succès est « le candidat est admis à l'école » de probabilité 0,24. Ces expériences sont identiques et indépendantes. X compte le nombre de succès. Elle suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,24$

$$b) P(X = 3) = \binom{10}{3} \times 0,24^3 \times (1 - 0,24)^7 \approx 0,243$$

La probabilité que trois des dix candidats tirés au sort soit admis dans l'école est environ égale à 0,243

c) Il s'agit de calculer $P(X \geq 2)$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \leq 1) \approx 0,733$$

$$\text{Ou alors } P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - 0,76^{10} - 10 \times 0,24 \times 0,76^9$$

La probabilité qu'au moins deux des dix candidats tirés au sort soient admis à cette école est environ égale à 0,733.

2) a) $E(X) = n \times p = 10 \times 0,24 = 2,4$

b) Si on considère des groupes de 10 candidats, il y a en moyenne 2,4 candidats par groupe qui sont admis dans l'école

3) a) Dans cette situation, le nombre de candidats est égal à n .

On considère la variable aléatoire Y qui dénombre le nombre de candidats admis à l'école. Les résultats des candidats sont indépendants les uns des autres.

Il s'agit de la répétition de n épreuves de Bernoulli dont le succès est « le candidat est admis à l'école » de probabilité 0,24. Ces expériences sont identiques et indépendantes. Y compte le nombre de succès. Elle suit donc la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,24$

La probabilité qu'aucun candidat issu de ce lycée ne soit admis à l'école est égale $P(Y = 0) = 0,76^n$

b) On cherche le plus petit entier n tel que $P(Y \geq 1) \geq 0,99$

Or $P(Y \geq 1) \geq 1 = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0,76^n$

On cherche donc le plus petit entier n tel que : $1 - 0,76^n \geq 0,99 \Leftrightarrow 0,01 \geq 0,76^n$

La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 0,76^n$ est une suite géométrique de raison 0,76 et de premier terme 1. Elle est donc décroissante.

A l'aide de la calculatrice, on trouve que : $0,76^{16} \approx 0,012$ et $0,76^{17} \approx 0,009$

Donc à partir de 17 candidats, la probabilité qu'au moins un élève de ce lycée soit admis à l'école est supérieure ou égale à 0,99

Exercice 4 :

1. *Affirmation 1* : (AB) passe par $A(1; 1; 0)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{BA}(-2; 1; 1)$.

Soit $\Omega(5; -1; -2)$. Donc $\overrightarrow{A\Omega}(4; -2; -2)$ donc $\overrightarrow{A\Omega} = 2\overrightarrow{AB}$ donc $\Omega \in (AB)$.

(AB) passe par $\Omega(5; -1; -2)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{BA}(-2; 1; 1)$.

Donc l'affirmation 1 est vraie.

Affirmation 2 : D a pour vecteur directeur $\overrightarrow{w}(9; 6; -1)$; $\overrightarrow{AB}(2; -1; -1)$. $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles. Donc D et (AB) ne sont pas parallèles. Elles sont donc soit sécantes, soit non coplanaires. Étudions si elles sont sécantes. On résout le système suivant.

$$\begin{cases} 5 - 2k = 9t \\ -1 + k = 1 + 6t \\ -2 + k = -5 - t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - 2k = 9t \\ 1 = 6 + 7t \\ -13 + 7k = -29 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 + \frac{32}{7} = \frac{-45}{7} \\ t = \frac{-5}{7} \\ k = \frac{-16}{7} \end{cases}$$

Impossible. Donc D et (AB) ne sont pas sécantes; elles sont donc non coplanaires.

Donc l'affirmation 2 est fausse.

Affirmation 3 : On cherche si $\overrightarrow{w}(9; 6; -1)$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}(0; 3; 1)$ et $\overrightarrow{v}(-3; 0; 1)$

$$\overrightarrow{w} = \lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 = -3\mu \\ 6 = 3\lambda \\ -1 = \lambda + \mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = -3 \\ \lambda = 2 \\ -1 = -3 + 2 \end{cases}$$

Donc $\overrightarrow{w} = 2\overrightarrow{u} - 3\overrightarrow{v}$. Donc D est parallèle à P . Donc l'affirmation 3 est fausse.

2. *Affirmation 4* : $(FC) \parallel (ED)$ et $(FH) \parallel (BD)$; donc deux droites sécantes du plan (FCH) sont parallèles à deux droites sécantes du plan (BDE) . Donc les plans sont parallèles. Donc l'affirmation 4 est vraie.

3. *Affirmation 5* : L'ordre ne compte pas, il s'agit de combinaisons.

$$\binom{4}{3} + \binom{5}{3} = 4 + \frac{5!}{3!2!} = 4 + 10 = 14. \text{ Donc l'affirmation 5 est vraie.}$$

4. *Affirmation 6* : Il s'agit du nombre d'arrangements de quatre éléments dans un ensemble à sept éléments : $7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$. Donc l'affirmation 6 est fausse.

Affirmation 7 : Il s'agit du nombre de 4-uplets dans un ensemble à sept éléments : $7^4 = 2401$. Donc l'affirmation 7 est vraie.