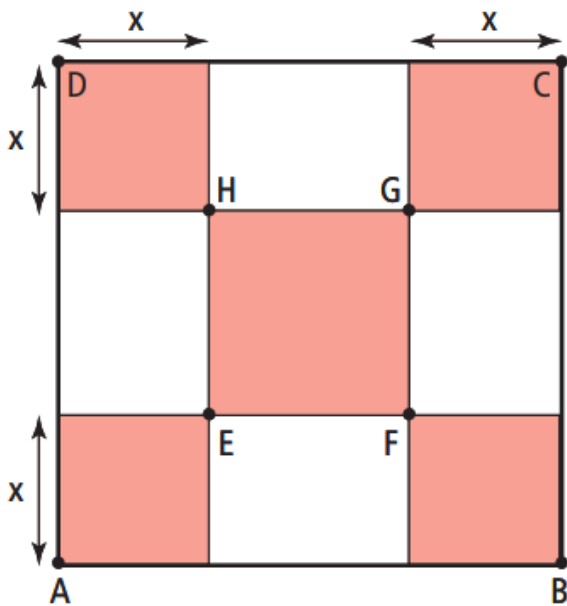


Exercice 1



Soit ABCD un carré de côté 5. On dessine aux quatre coins des carrés de côté x et on s'intéresse à l'aire coloriée $A(x)$ formée de la réunion de ces quatre carrés et du carré intérieur EFGH.

1) Montrer par un raisonnement géométrique que $A(x)$ peut s'écrire sous l'une des formes suivantes :

$$A(x) = 4x^2 + (5 - 2x)^2 \text{ ou } A(x) = 25 - 4x(5 - 2x)$$

2) Montrer que l'on a aussi : $A(x) = 8x^2 - 20x + 25$

3) En utilisant la forme la plus adaptée, calculer $A(2,5)$.

4) a) Montrer que $A(x) = 8\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + 12,5$

b) En déduire que l'aire minimale est obtenue pour $x = \frac{5}{4}$ et donner cette aire minimale.

5) a) Montrer que $A(x) = (2x - 1)(4x - 8) + 17$

b) Déterminer les valeurs de x telles que $A(x) = 17$

Exercice 2

Soit $f(x) = (x - 2)^2 - 3(x - 2)$ pour tout nombre réel x

1) Montrer que, pour tout nombre x , $f(x) = x^2 - 7x + 10$

2) Montrer que, pour tout nombre x , $f(x) = (x - 2)(x - 5)$

On dispose maintenant de trois formes pour $f(x)$:

Forme initiale	Forme développée	Forme factorisée
$f(x) = (x - 2)^2 - 3(x - 2)$	$f(x) = x^2 - 7x + 10$	$f(x) = (x - 2)(x - 5)$

3) Répondre à chacune des questions suivantes, sans calculatrice, en veillant à choisir judicieusement à chaque fois la forme de $f(x)$ que vous utiliserez :

a) Calculer $f(0)$ et $f(2)$

b) Calculer $f(5)$

c) Résoudre l'équation $f(x) = 0$

d) Résoudre l'équation $f(x) = 10$

Exercice 3**En autonomie**

Développer puis réduire les expressions suivantes :

$$A = 6x - 3(x + 1)^2$$

$$B = -3x(x - 4)^2$$

$$C = (-x - 7)(3 - 5x)$$

$$D = (-8x - 1)^2 - (4x + 3)^2$$

$$E = \left(x - \frac{1}{5}\right)\left(3x + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{15}$$

$$F = \left(3 - \frac{x}{6}\right)^2$$

Exercice 4**En autonomie**

Factoriser les expressions suivantes :

$$A = (3x - 7)^2 - (3x - 7)(2x - 1)$$

$$B = 2x - 3 - (5x + 1)(2x - 3)$$

$$C = (x + 4)(3 - 5x) - (x + 4)^2$$

$$D = 9(x - 3)^2 + (4x + 3)^2$$

$$E = -(1 + 3x)^2 + 4x^2$$

$$F = \left(\frac{x - 3}{2}\right)^2 - \frac{x^2}{4}$$

$$G = (1 - 3x)^2 - 4$$

$$H = 9x^2 + 12x + 4$$

Exercice 5**En autonomie**

Réduire au même dénominateur chacune des expressions suivantes :

$$A = \frac{1}{x - 1} + \frac{2}{5}$$

$$B = \frac{2}{x - 3} + \frac{3}{x}$$

$$C = \frac{4x}{3} + \frac{1}{x}$$

Exercice 6**En autonomie**

Développer puis réduire les expressions suivantes :

$$A = (5x + 3)^2$$

$$B = 2(x - 1)^2 - 3$$

$$C = (4x + 3)(5x - 2)$$

$$D = (-6x + 2)^2 - (4x - 7)^2$$

$$E = \frac{1}{21} + \left(2x - \frac{1}{7}\right)\left(\frac{1}{3} - 5x\right)$$

$$F = \left(\frac{x}{5} - 2\right)^2$$

Exercice 7**En autonomie**

Factoriser les expressions suivantes :

$$A = (2x - 5)^2 - (6x - 7)(2x - 5)$$

$$B = 3x + 7 - (3x + 7)(4x - 1)$$

$$C = (2x - 3)(x + 1) + (2x - 3)^2$$

$$D = (x - 5)^2 - 49$$

Exercice 8

1) Développer et réduire : $A = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

2) En déduire un moyen simple pour calculer la somme : $S = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81}$

Exercice 9**En autonomie**

Résoudre les équations suivantes :

1) $3x + 9 = x + 2$

2) $-5x + 7 = 9 + 6x$

3) $2(x - 1) = 2x + 3$

4) $4x^2 - 25 = 0$

5) $x(x + 4) = x^2 + 1$

6) $(5x + 3)(2x - 7) = 0$

7) $(2x - 5)(3x + 8) = 0$

Exercice 10**En autonomie**

Résoudre les équations suivantes :

1) $\frac{x-5}{x+1} = 0$

2) $\frac{3x+4}{x+1} = 0$

3) $\frac{2}{x} = \frac{3}{x+5}$

4) $\frac{6}{3x} = \frac{5}{2x+1}$

5) $-\frac{2}{1+x} = 3$

**Exercice 11****En autonomie**

Résoudre les équations suivantes :

1) $5x + 4 = -3x + 2$

2) $-8x - 3 = 3x + 5$

3) $4(x + 7) = 5x - 3$

4) $5x(x - 3) = 5x^2 + 4$

5) $(6x + 7)(-3x + 2) = 0$

6) $(4x - 5)(x - 2) = 0$



Exercice 12**En autonomie**

Résoudre les équations suivantes :

1) $(2x + 3)^2 = (x - 4)^2$

2) $(2x - 1)^2 = 4x - 2$

3) $4x^2 + 12x + 9 = 0$

4) $7x^2 - 14x + 7 = 0$

Exercice 13

Trouver 5 entiers consécutifs tels que la somme des carrés des deux plus grands d'entre eux soit égale à la somme des carrés des trois nombres restants.

**Exercice 14**

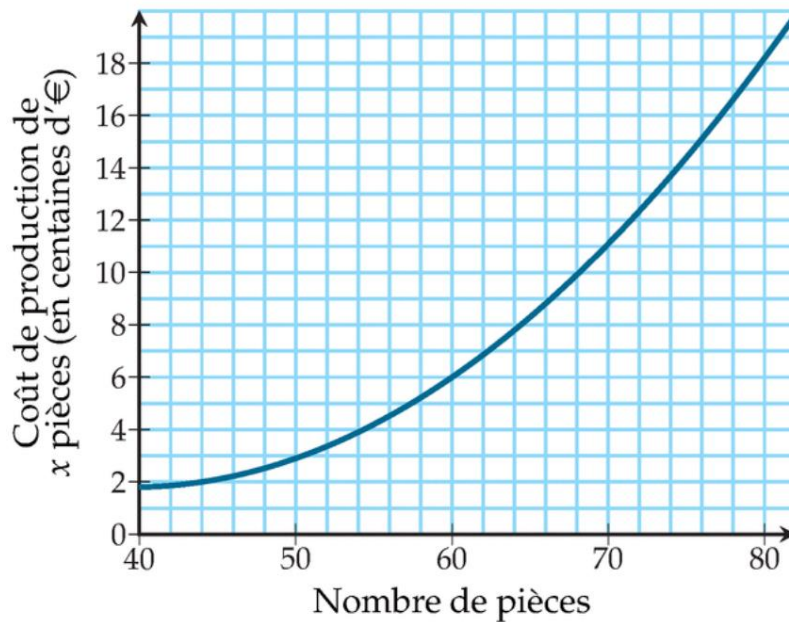
Un carré est tel que si l'on augmente son côté de 3 cm, alors son aire augmente de 21 cm^2 .

Calculer son côté.



Une entreprise fabrique des pièces détachées pour automobile.

On note x le nombre de pièces fabriquées au cours d'une journée. Le coût de production, en euros, de x pièces est noté $C(x)$. Ci-dessous est représentée la courbe représentative de la fonction C sur l'intervalle $[40 ; 80]$.



A l'aide du graphique, répondre aux questions suivantes 1) et 2)

1) Quel est le coût de production de 50 pièces ?

2) Pour un coût de production de 1 400 €, combien l'entreprise va-t-elle fabriquer de pièces ?

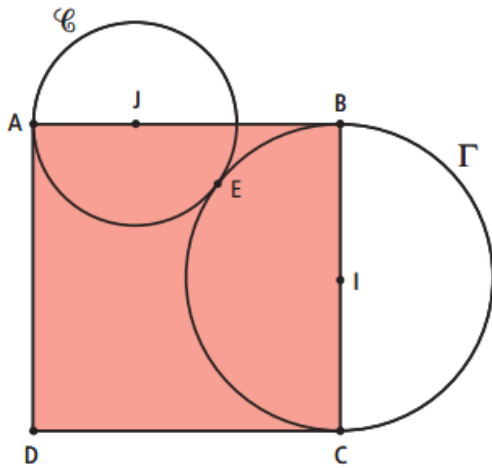
3) On suppose que, sur l'intervalle $[40 ; 80]$, la fonction C est définie par $C(x) = x^2 - 79x + 1740$

a) On appelle "recette" la somme brute reçue. Chaque pièce est vendue 20 €. Déterminer la recette $R(x)$ de l'entreprise pour x pièces fabriquées.

b) Le bénéfice réalisé par l'entreprise, en fonction du nombre x de pièces vendues, est la différence entre la recette et le coût de production.

Déterminer le bénéfice $B(x)$ de l'entreprise pour x pièces fabriquées.

Exercice 16



ABCD est un carré de côté 4 cm et I est le milieu de [BC].

J est un point quelconque du segment [AB]. On pose $AJ = x$ (en cm).

$\mathcal{C}$ est le cercle de centre J qui passe par A.

Γ est le cercle de diamètre [BC].

L'objet de cet exercice est de déterminer s'il existe un point J tel que $\mathcal{C}$ et Γ soient tangents en un point E.

1) Exprimer JI^2 en fonction de x puis vérifier que $\mathcal{C}$ et Γ sont tangents lorsque : $(x + 2)^2 = (4 - x)^2 + 2^2$

2) Résoudre cette équation

3) En déduire la position du point J sur [AB] pour que $\mathcal{C}$ et Γ soient tangents.

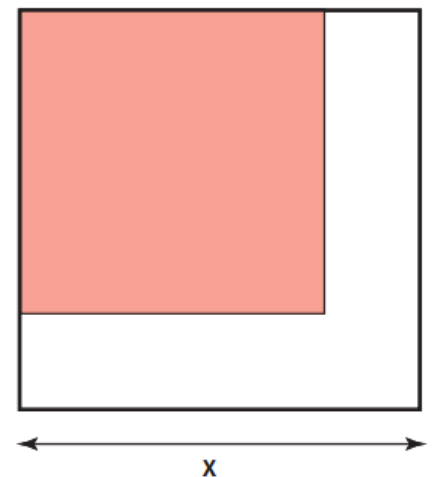
Exercice 17

Dans un jardin carré de côté x (en m), on réalise un parterre carré en laissant sur deux des côtés une bordure de largeur 1,5 m.

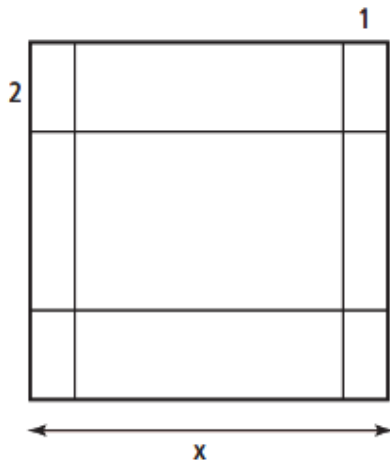
1) Parmi les expressions suivantes, indiquer celle(s) qui donnent l'aire de la bordure :

- a) $(x + 1,5)^2 - x^2$ b) $3x$ c) $3x - 2,25$ d) $x^2 - (x - 1,5)^2$
 e) $x(x - 1,5)$

2) Pour quelle valeur de x l'aire du parterre est-elle égale à 16 m^2 ?



Exercice 18



Dans cet exercice, les longueurs sont exprimées en cm.

On désire imprimer une carte carrée de côté x avec x compris entre 5 cm et 10 cm. On souhaite cependant laisser une marge de 2 cm en haut et en bas de la carte et de 1 cm à gauche et à droite.

- 1) On appelle $f(x)$, l'aire en cm^2 de la surface imprimable. En calculant cette aire de deux façons différentes, montrer que $f(x) = x^2 - 6x + 8$ et $f(x) = (x - 2)(x - 4)$
- 2) Déterminer les dimensions de la feuille telles que l'aire de la surface imprimable soit égale à 8 cm^2 .

Exercice 19

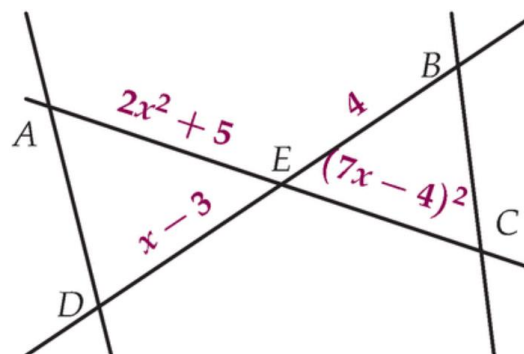
Soit la fonction f définie pour tout nombre x par $f(x) = x^2 - 8x + 7$

- 1) Montrer que : $f(x) = (x - 4)^2 - 9$
- 2) En déduire une forme factorisée de $f(x)$
- 3) Utiliser la forme la plus adaptée de $f(x)$ pour répondre aux questions suivantes :
 - a) Calculer $f(\sqrt{3})$
 - b) Résoudre l'équation $f(x) = 0$
 - c) Calculer $f(4)$ et montrer que, pour tout nombre x , $f(x) \geq -9$

En déduire que la fonction f admet un minimum.

Exercice 20

Donner une approximation des valeurs de x pour lesquelles les droites (AD) et (BC) sont parallèles. Donner une valeur approchée de la (ou des) solution(s).



Exercice 21**En autonomie**

Résoudre les inéquations suivantes puis représenter les solutions sur un axe gradué :

a) $-2x + 3 > -x + \frac{1}{2}$

b) $\frac{2x+7}{3} \leq \frac{x-9}{4}$

c) $5x - 2(x + 1) \geq 3x + 1$

d) $\frac{2x-5}{3} \leq \frac{2x-3}{7}$

Exercice 22

Un particulier a des marchandises à faire transporter. Un premier transporteur lui demande 460 € au départ et 3,5 € par km. Un second transporteur lui demande 1 000 € au départ et 2 € par kilomètre.

Pour quelle distance à parcourir est-il plus avantageux se s'adresser au second transporteur ?

**Exercice 23****En autonomie**

Résoudre les inéquations suivantes puis représenter les solutions sur un axe gradué :

a) $-2x + 3 > x + 4$

b) $3x - 2(x - 4) < x$

c) $\frac{2}{3}x + 8 < 0$

Exercice 24

Pour quelles valeurs de x l'aire d'un carré, de côté x , est-elle inférieure à l'aire d'un trapèze de hauteur x et dont les deux bases ont pour longueurs respectives x et 3 ?

Exercice 25

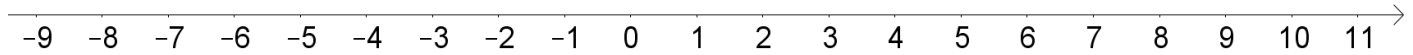
Quels sont les nombres réels dont le double est strictement supérieur au cube ?

Exercice 26

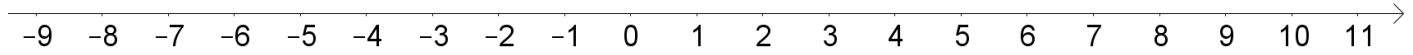


Sur chacun des axes suivants, représenter l'intervalle demandé :

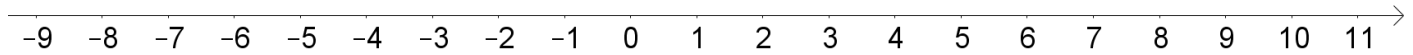
a) $[-5; 7]$



b) $[5; +\infty[$



c) $] - \infty; 2[$



Exercice 27

Pour chacune des questions suivantes, une seule réponse est correcte.

1) L'ensemble des nombres réels x tels que $x \geq 3$ est :	$] - \infty; 3]$	$]3; +\infty[$	$[3; +\infty[$
2) L'ensemble des nombres réels x tels que $-2 \leq x < 7$ est :	$[-2; 7]$	$] - 2; 7]$	$[-2; 7[$
3) L'ensemble des réels x tels que $5 \geq x > 1$ est :	$[5; 1[$	$]1; 5]$	$[1; 5[$

Exercice 28

Voici une liste d'intervalles :

$$I_1 =] - \infty; -2[\quad I_2 = \left] -3; \frac{12}{5} \right] \quad I_3 = [3; +\infty[$$

Préciser pour chacun des nombres suivants s'il appartient ou pas aux intervalles précédents :

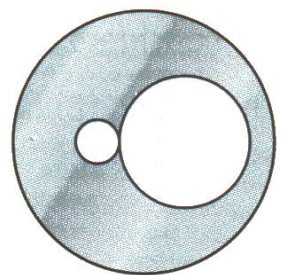
$$1 \quad ; \quad -4 \quad ; \quad -2 \quad ; \quad \pi \quad ; \quad \sqrt{2} \quad ; \quad 1,999999 \quad ; \quad 2,4 \quad ; \quad \frac{30}{7}$$

Exercice 29

Sur une pièce circulaire en acier de rayon 12 cm, on perce deux trous circulaires, le grand ayant un rayon trois fois plus grand que le petit.

Le petit trou doit avoir un rayon strictement supérieur à 0,5 cm.

Comment choisir le rayon du petit trou pour que l'aire de la pièce en acier obtenue dépasse la moitié de l'aire de la pièce initiale ?



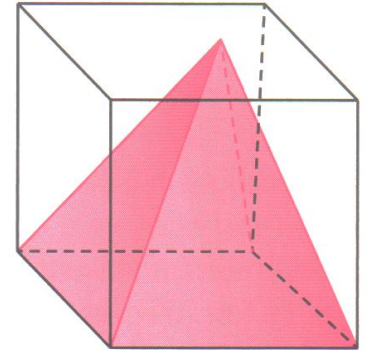
Exercice 30

L'élève racontera sur sa feuille les différentes étapes de sa recherche (il peut minuter, joindre ses brouillons, ...), les observations qu'il a pu faire et qui l'ont fait progresser ou changer de méthode, ainsi que la façon dont il expliquerait sa solution à un camarade qu'il devrait convaincre.

Dans un aquarium cubique de côté 10 cm, il y a une décoration pyramidale. Cette pyramide est pleine, sa base est le fond de l'aquarium et son sommet est un point de la face supérieure.

L'aquarium a pour côté 10 cm.

Quelle hauteur d'eau faut-il mettre pour que le volume d'eau soit égal à la moitié du volume du cube ?



Exercice 31

Déterminer dans chacun des cas l'intersection des deux intervalles I et J.

Conseil : Pour tous les exercices concernant les intervalles de $\mathbb{R}$, on fera un axe gradué, qu'il soit demandé ou pas.

- a. $[-3 ; 5] \cap [-2 ; 8]$
- b. $[-5 ; 2] \cap [3 ; 5]$
- c. $[-5 ; 4[\cap]3 ; 7]$

Exercice 32

Déterminer dans chacun des cas la réunion des deux intervalles I et J.

Conseil : Pour tous les exercices concernant les intervalles de $\mathbb{R}$, on fera un axe gradué, qu'il soit demandé ou pas.

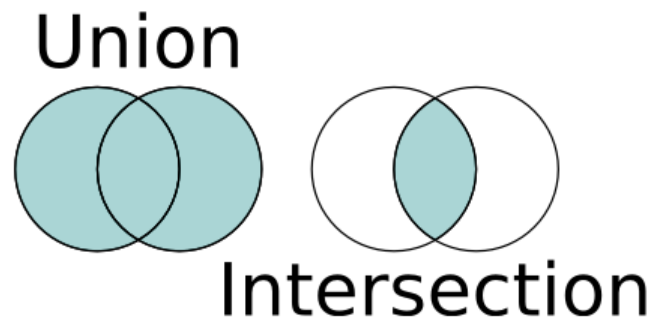
- a. $[-3 ; 5] \cup [-2 ; 8]$
- b. $[-5 ; 7] \cup [-3 ; 2]$
- c. $[-5 ; 4[\cup]5 ; 7]$
- d. $[-5 ; 2] \cup [3 ; 5]$

Exercice 33

Déterminer dans chacun des cas l'intersection ou la réunion des deux intervalles I et J.

Conseil : Pour tous les exercices concernant les intervalles de $\mathbb{R}$, on fera un axe gradué, qu'il soit demandé ou pas.

- a. $[-8; 7] \cap [-2; 9]$
- b. $[-4; 3] \cap [2; 5]$
- c. $[-5; 2[\cup]1; 7]$
- d. $] - 3; 5[\cup]4; 6]$
- e. $] - 3; 5[\cap]6; 9]$



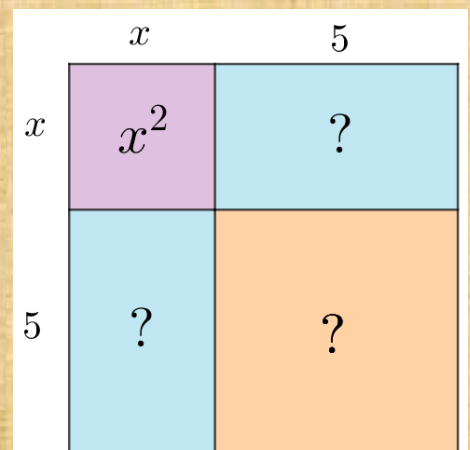
Exercice 34

Al-Khwarizmi utilisait une méthode à support géométrique pour résoudre des équations du type $x^2 + ax = b$

Par exemple, pour l'équation $x^2 + 10x = 39$, il propose de tracer un carré de côté x et de compléter par deux rectangles de dimensions x et la moitié de 10 (c'est-à-dire 5) pour obtenir un grand carré.

Ce grand carré a pour aire $(x^2 + 10x) + 5^2$, c'est-à-dire $39 + 25$, soit 64.

Donc il a pour côté 8. Il suffit de retirer 5 pour obtenir le côté x cherché, soit $x = 3$.



Résoudre, en utilisant la méthode d'Al-Khwarizmi, les équations suivantes (on pourra s'aider d'un croquis) :

- a. $x^2 + 12x = 45$
- b. $x^2 + 2x = 8$
- c. $x^2 + 20x = 21$

Exercice 35

Montrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel.

Exercice 36 *Le symbole Σ . Sommes et sommes télescopiques*

Préambule :

La somme des nombres réels $a_1, \dots, a_n$ est notée :

$$a_1 + \dots + a_n$$

ou, d'une manière plus compacte et dénuée de toute ambiguïté :

$$\sum_{k=1}^n a_k$$

On définit plus généralement, pour m entier de $\{1; \dots; n\}$:

$$\sum_{k=m}^n a_k = a_m + \dots + a_n$$

Dans ces expressions, la lettre k , appelée *indice*, est une *variable muette*, ce qui signifie que l'on peut changer son nom sans changer la somme.

On a ainsi :

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{i=1}^n a_i$$

Exercice :

1. Soit deux nombres réels a et b tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}, \quad \frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} - \frac{b}{x+1}$$

Déterminer ces deux nombres a et b .

2. En déduire, pour tout entier naturel $n \geq 1$, la valeur de

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$$

Exercice 37 *Somme des premiers carrés par télescope*

1. Trouver trois réels a, b et c tels que, si :

$$P: x \in \mathbb{R} \mapsto ax^3 + bx^2 + cx,$$

On ait

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) - P(x-1) = x^2$$

2. En déduire, pour tout entier naturel $n \geq 1$, une expression simple de

$$\sum_{k=1}^n k^2$$

Aide, changement d'indice : On pourra remarquer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$\sum_{i=1}^n (i-1) = \sum_{i=0}^{n-1} i$$

3. Adopter cette méthode pour calculer pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^n k^3$$

Exercice 38 *Le symbole $\prod$*

Préambule :

Le produit des nombres réels $a_1, \dots, a_n$ est noté soit :

$$a_1 \times \dots \times a_n = a_1 \dots a_n$$

Soit de manière plus compacte :

$$\prod_{k=1}^n a_k$$

Ici encore, la lettre k est appelé indice et est une variable muette. Les commentaires relatifs à la somme s'adaptent immédiatement.

Exemple 1

Pour tout entier naturel $n \geq 3$, on a :

$$\prod_{k=3}^n (-5) = (-5)^{n-2}$$

On effectue le produit de $n - 2$ facteurs tous égaux à -5 .

Utiliser le calcul littéral

Exemple 2

Pour tout entier naturel n non-nul, on a :

$$\prod_{k=1}^n 2^k = 2^{1+2+\dots+n} = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

Exercice

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier :

$$A_n = \prod_{k=1}^n 4^{k^2+1}$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier :

$$B_n = \prod_{k=0}^n \frac{k+4}{k+3}$$

Exercice 39 Produits télescopiques

Pour $n \geq 2$, donner une expression simple de

$$C_n = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$$