

Dérivation : Fonctions & Tangentes

1

EXERCICE N° 1 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$,
et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm).

1. Étudier les variations de f et dresser le tableau complet des variations de f .
2. Calculer $f(1)$. En déduire une factorisation de $f(x)$ sous forme d'un produit de facteurs du premier degré. Étudier le signe de $f(x)$.
3. On désigne par A et B les points d'intersection de $(\mathcal{C})$ avec l'axe des abscisses (A étant le point d'abscisse positive). Déterminer les tangentes à $(\mathcal{C})$ en A et B .
4. Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ et ses tangentes en A et B .
5. Tracer dans le même repère la courbe $(\mathcal{C}')$ représentant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = |f(x)|$. On justifiera la construction de $(\mathcal{C}')$ et, en particulier, on précisera les tangentes à $(\mathcal{C}')$ au point A .

EXERCICE N° 2 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 2}$.

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal du plan.

1. Définir le domaine de définition de f .
2. Déterminer les réels a , b et c tels que, pour tout réel du domaine de définition, on ait :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 2}.$$

3. Démontrer que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation : $y = ax + b$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ au voisinage des branches infinies.
4. Étudier la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à $(\mathcal{D})$.
5. Démontrer que le point Ω d'intersection entre les deux asymptotes de $(\mathcal{C})$ est centre de symétrie à la courbe représentative de f .
6. Dresser le tableau complet des variations de f .
7. Tracer $(\mathcal{C})$ et ses asymptotes.

EXERCICE N° 3 : Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - 1 + \frac{2x}{x^2 + 1} \text{ et on désigne par } (\mathcal{C}) \text{ la courbe représentative de } f \text{ dans un plan}$$

rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

1. Montrer que le point $I(0 ; -1)$ est centre de symétrie à la courbe $(\mathcal{C})$.
2. Montrer que la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$.
3. Dresser le tableau des variations de f .
4. Déterminer l'équation de la tangente $(\mathcal{T})$ à la courbe $(\mathcal{C})$ en I , puis préciser la position de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à $(\mathcal{T})$.
5. Déterminer les points A et B de la courbe $(\mathcal{C})$, où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x - 2$.
6. Montrer que, pour tout x réel : $x - 2 \leq f(x) \leq x$.
7. Tracer la courbe $(\mathcal{C})$, la tangente $(\mathcal{T})$, ainsi que les droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$: $y = x - 2$ et $y = x$.

EXERCICE N° 4 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{-x^3 + 5x}{x^2 + 3}$

et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité de longueur 1 cm.

1. a) Déterminer les réels a et b tels que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $f(x) = ax + \frac{bx}{x^2 + 3}$.

b) Montrer que f est impaire. Que peut-on en déduire pour la courbe $(\mathcal{C})$?

2. a) Montrer que $f'(x) = \frac{(x^2 + 15)(1 - x^2)}{(x^2 + 3)^2}$.

b) Dresser le tableau des variations de f .

3. Soit $(\mathcal{D})$ la droite d'équation $y = -x$.

a) Montrer que $(\mathcal{D})$ est asymptote à $(\mathcal{C})$.

b) Étudier la position relative de la courbe $(\mathcal{C})$ et la droite $(\mathcal{D})$.

4. Soit $(\mathcal{T})$ la tangente à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0.

a) Écrire l'équation réduite de $(\mathcal{T})$.

b) Étudier la position relative de la courbe $(\mathcal{C})$ et de la tangente $(\mathcal{T})$.

5. Construire $(\mathcal{D})$, $(\mathcal{T})$ et $(\mathcal{C})$. On précisera les coordonnées des points d'intersection de $(\mathcal{C})$ avec l'axe des abscisses.

EXERCICE N° 5 : Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2} \text{ et } (\mathcal{C}) \text{ la courbe d'équation } y = f(x).$$

1. Définir le domaine de définition de f .

2. Écrire $f(x)$ sous la forme : $f(x) = ax + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$, où a , b et c sont des réels à déterminer.

En déduire l'existence d'une asymptote oblique (Δ) pour $(\mathcal{C})$ dont on précisera une équation.

3. Étudier la fonction f et tracer la courbe $(\mathcal{C})$ dans un repère orthonormal (unité 2 cm).

On déterminera les points d'intersection de $(\mathcal{C})$ avec les axes et les tangentes en ces points.

4. Montrer qu'il existe un point de $(\mathcal{C})$ en lequel la tangente $(\mathcal{T})$ est parallèle à (Δ) .

Déterminer une équation de $(\mathcal{T})$ et la tracer.

5. Déterminer, suivant les valeurs du paramètre m , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = x + m$.

EXERCICE N° 6 : On considère la fonction f définie sur $[-2; 4]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{12}(3x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 60)$$

1. Étudier les variations de f .

2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ possède deux racines dont on donnera un encadrement à une unité près, puis à 10^{-1} près.

EXERCICE N° 7 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 \sqrt{x-3}$.

1. a) Montrer que f est continue en 3. Justifier que f est dérivable sur $]3; +\infty[$ (*3 est exclu*).

b) Sans calculer sa dérivée, montrer que f est strictement croissante sur $[3; +\infty[$.

c) Déterminer l'intervalle image par f de l'intervalle $[3; +\infty[$.

2. a) Montrer que l'équation : $\sqrt{x-3} = \frac{4}{x^2}$ possède une solution réelle.

b) Donner un encadrement à 10^{-2} près de cette solution.

EXERCICE N° 8 : Soit la fonction f définie sur $] -3; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{-x^3}{x+3}$.

1. Étudier les variations de f et déterminer les limites de f aux bornes de l'ensemble d'étude.

2. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ possède une unique solution β dans $] -3; +\infty[$.

3. À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement de β à 10^{-3} près.

EXERCICE N° 9 : La figure ci-dessous comporte une courbe (Γ) sur $[-3; 3]$ qui passe par les points A, B, C, D. Son allure est exacte et les droites tracées sont les tangentes respectives en A, B, C et D à la courbe.

1. Donner le tableau des variations de la fonction f dont (Γ) est la représentation graphique.

2. Évaluer le coefficient directeur des tangentes en A et en C à la courbe (Γ) .

3. Résoudre graphiquement sur $[-3; 3]$:

- les équations : $f(x) = 0$; $f(x) = 3$; $f(x) = 1,5$.

- les inéquations : $0 \leq f(x) \leq 1,5$;

$f(x) > -\frac{3}{2}(x-1)$.

4. En utilisant l'écriture de f , traduire mathématiquement pour exprimer que la courbe (Γ) contient les points A, B, C, D; de même, exprimer que les tangentes en ces points sont les droites tracées sur la figure.

5. La fonction f dont la courbe (Γ) a été tracée sur $[-3; 3]$ peut-elle être affine ?

Polynomiale de degré 2 ? Polynomiale de degré 3 ?

Justifier les réponses.

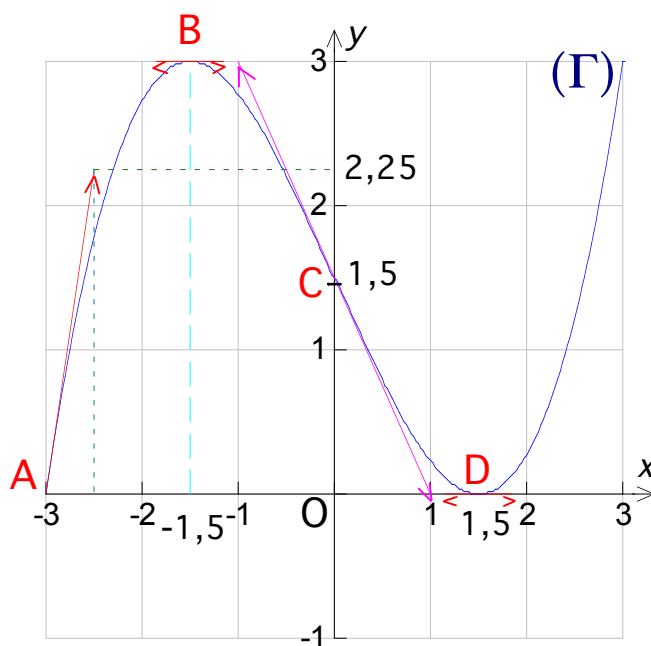
6. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \frac{2}{9}x^3 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$.

a) Étudier les variations de h sur $\mathbb{R}$.

b) Résoudre algébriquement sur $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

$h(x) = 0$; $h(x) = 3$; $h(x) = 1,5$; $0 \leq h(x) \leq 1,5$; $h(x) \geq 1,5(1-x)$.

7. En déduire que f et h coïncident sur $[-3; 3]$.



EXERCICE N° 10 :**1. Mise en Evidence du Problème**

On pose $I =]-1 ; +\infty[$. Soit f la fonction définie sur I par : $f(x) = \frac{1-x}{x^3+1}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

a) Justifier que f est dérivable sur I .

b) Soit f' la fonction dérivée de f . Montrer, que pour tout x de I , $f'(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 - 1}{(x^3 + 1)^2}$.

Nous ne savons pas résoudre l'équation du 3^{ème} degré $2x^3 - 3x^2 - 1 = 0$, car il n'y a pas de racine évidente et donc nous ne pouvons pas déterminer le signe du polynôme $2x^3 - 3x^2 - 1$. Nous allons donc étudier les variations de la fonction g définie sur I par : $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

2. Étude de la Fonction g

a) Dresser le tableau des variations de g .

b) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une et une seule solution notée β .

c) Déterminer l'unique nombre entier n tel que : $n \times 10^{-2} < \beta < (n+1) \times 10^{-2}$.

En déduire, suivant les valeurs de x , le signe de $g(x)$.

3. Étude des Variations de f et Courbe Représentative.

a) En utilisant les résultats précédents, dresser le tableau des variations de f .

b) Déduire que la courbe $(\mathcal{C})$ admet deux asymptotes dont vous donnerez des équations.

c) Soit A le point de $(\mathcal{C})$ d'abscisse 0. Écrire une équation de la droite (Δ) tangente en A à $(\mathcal{C})$. Étudier, pour tout x élément de $] -1 ; 1]$, la position de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à (Δ) .

d) Soit B le point de $(\mathcal{C})$ d'abscisse 1. Écrire une équation de la droite (Δ') tangente en B à $(\mathcal{C})$. Démontrer que la courbe $(\mathcal{C})$ est située au-dessus de (Δ') .

e) Vérifier la cohérence de vos résultats avec le graphique ci-dessous.

