

Exercices supplémentaires : Trigonométrie

Partie A : Cercle trigonométrique, cosinus et sinus

Exercice 1

Angle en °	60	150	10	12	198	15
Angle en radians	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{15}$	$\frac{11\pi}{10}$	$\frac{\pi}{12}$

Exercice 2

- 1) $-\pi : \pi; 3\pi; 5\pi$ et plus généralement $\pi + 2\pi k$ avec $k \in \mathbb{Z}$
- 2) $\frac{3\pi}{2} : -\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}; \frac{11\pi}{2}$ et plus généralement $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, soit $\frac{-\pi+4\pi k}{2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$
- 3) $10\pi : 0; 2\pi; 4\pi$ et plus généralement $2\pi k$ avec $k \in \mathbb{Z}$
- 4) $-\frac{\pi}{4} : \frac{7\pi}{4}; \frac{15\pi}{4}; \frac{23\pi}{4}$ et plus généralement $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k$ soit $\frac{(-\pi+8\pi k)}{4}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Exercice 3

$$\frac{47\pi}{12} - \left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{48\pi}{12} = 4\pi \text{ ce qui correspond à un écart de deux tours.}$$

$$-\frac{49\pi}{12} - \left(-\frac{\pi}{12}\right) = -\frac{48\pi}{12} = -4\pi \text{ ce qui correspond à un écart de deux tours.}$$

$$\frac{11\pi}{12} - \left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{12\pi}{12} = \pi \text{ ce qui correspond à un demi-tour.}$$

$$-\frac{241\pi}{12} - \left(-\frac{\pi}{12}\right) = -\frac{240\pi}{12} = -20\pi \text{ ce qui correspond à un écart de 10 tours.}$$

$$-\frac{37\pi}{12} - \left(-\frac{\pi}{12}\right) = -\frac{36\pi}{12} = -3\pi \text{ ce qui correspond à un tour et demi.}$$

$$-\frac{313\pi}{12} - \left(-\frac{\pi}{12}\right) = -\frac{312\pi}{12} = -26\pi \text{ ce qui correspond à un écart de 13 tours.}$$

Finalement, $\frac{47\pi}{12}; -\frac{49\pi}{12}; -\frac{241\pi}{12}$ et $-\frac{313\pi}{12}$ sont associés au même point que $-\frac{\pi}{12}$.

Exercice 4

- 1) $x - y = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} = -\pi$ donc x et y ne sont pas des mesures d'un même angle orienté.
- 2) $x - y = \frac{5\pi}{3} + \frac{21\pi}{12} = \frac{20\pi+63\pi}{12} = \frac{83\pi}{12}$ donc x et y ne sont pas des mesures d'un même angle orienté.
- 3) $x - y = \frac{29\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \frac{31\pi}{3}$ donc x et y ne sont pas des mesures d'un même angle orienté.
- 4) $x - y = \frac{43\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} = \frac{48\pi}{12} = 4\pi$ donc x et y sont des mesures d'un même angle orienté.

Exercice 5

$$A : \frac{\pi}{6}; B : \frac{2\pi}{3}; C : \pi; D : -\frac{\pi}{4}; E : -\frac{\pi}{6}; F : -\frac{5\pi}{6}; G : \frac{\pi}{3};$$

$$H : -\frac{\pi}{2}; I : 0; J : \frac{\pi}{2}$$

Exercice 6

Voir le cercle ci-contre.

Exercice 7

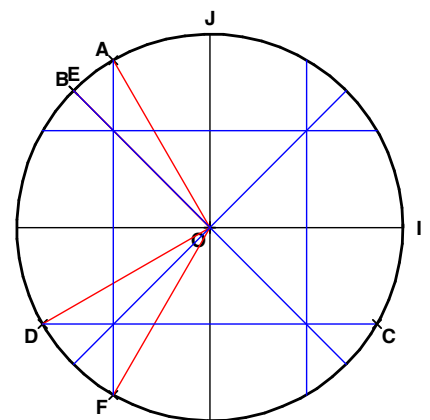
- 1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ donc

$$\begin{aligned} \cos^2(x) &= 1 - \sin^2(x) = 1 - \left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}\right)^2 = 1 - \frac{2 - 2\sqrt{12} + 6}{16} \\ &= \frac{16 - (8 - 2\sqrt{12})}{16} = \frac{8 + 2\sqrt{12}}{16} = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{6})^2}{16} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \cos(x) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \text{ ou } -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

Or, comme $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(x)$ est positif donc $\boxed{\cos(x) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$

- 2) $\sin(x) < 0$ donc $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ et de plus $|\cos(x)| > |\sin(x)|$ donc $x \in \left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$ et finalement $\boxed{x = -\frac{\pi}{12}}$



Exercice 8

1)

$$\sin^2\left(\frac{9\pi}{5}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{9\pi}{5}\right) = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2 = 1 - \frac{5+2\sqrt{5}+1}{16} = \frac{10-2\sqrt{5}}{16}$$

De plus $\frac{9\pi}{5} \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ donc $\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right) < 0$ et donc $\boxed{\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right) = -\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}$

2) $\cos\left(\frac{9\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{10\pi}{5} - \frac{5\pi}{5}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ donc $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}}$

$\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{5}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ donc $\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}$

Exercice 9

1) $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$ donc $\cos(x) = \frac{\sqrt{15}}{4}$ ou $-\frac{\sqrt{15}}{4}$

Or $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ donc $\cos(x) \leq 0$ et donc $\boxed{\cos(x) = -\frac{\sqrt{15}}{4}}$

2) $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) = 1 - (-0,6)^2 = 1 - 0,36 = 0,64$ donc $\cos(x) = 0,8$ ou $-0,8$.

Or $x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right] \subset \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ donc $\cos(x) \geq 0$ et $\boxed{\cos(x) = 0,8}$

3) $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) = 1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$ donc $\cos(x) = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ou $-\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Or $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ donc $\cos(x) \geq 0$ et $\boxed{\cos(x) = \frac{\sqrt{5}}{3}}$

Partie B : Angle orienté, mesure principale d'un angle

Exercice 1

Pour $-\frac{7\pi}{3}$:

$$-3 < -\frac{7\pi}{3} < -2 \Leftrightarrow -3\pi < -\frac{7\pi}{3} < -2\pi \Leftrightarrow -\pi < -\frac{7\pi}{3} + 2\pi < 0 \Leftrightarrow -\pi < -\frac{\pi}{3} < 0$$

La mesure principale de $-\frac{7\pi}{3}$ est $\boxed{-\frac{\pi}{3}}$

Pour $-\pi$: la mesure principale de $-\pi$ est $\boxed{\pi}$

Pour $\frac{13\pi}{6}$:

$$2 < \frac{13}{6} < 3 \Leftrightarrow 2\pi < \frac{13\pi}{6} < 3\pi \Leftrightarrow 0 < \frac{13\pi}{6} - 2\pi < \pi \Leftrightarrow 0 < \frac{\pi}{6} < \pi$$

Donc la mesure principale de $\frac{13\pi}{6}$ est $\boxed{\frac{\pi}{6}}$

Pour $\frac{47\pi}{12}$

$$3 < \frac{47}{12} < 4 \Leftrightarrow 3\pi < \frac{47\pi}{12} < 4\pi \Leftrightarrow -\pi < \frac{47\pi}{12} - 4\pi < 0 \Leftrightarrow -\pi < -\frac{\pi}{12} < 0$$

Donc la mesure principale de $\frac{47\pi}{12}$ est $\boxed{-\frac{\pi}{12}}$

Pour $-\frac{49\pi}{6}$

$$-9 < -\frac{49}{6} < -8 \Leftrightarrow -9\pi < -\frac{49\pi}{6} < -8\pi \Leftrightarrow -\pi < -\frac{49\pi}{6} + 8\pi < 0 \Leftrightarrow -\pi < -\frac{\pi}{6} < 0$$

Donc la mesure principale de $-\frac{49\pi}{6}$ est $\boxed{-\frac{\pi}{6}}$

Pour $\frac{11\pi}{3}$

$$3 < \frac{11}{3} < 4 \Leftrightarrow 3\pi < \frac{11\pi}{3} < 4\pi \Leftrightarrow -\pi < \frac{11\pi}{3} - 4\pi < 0 \Leftrightarrow -\pi < -\frac{\pi}{3} < 0$$

Donc la mesure principale de $\frac{11\pi}{3}$ est $\boxed{-\frac{\pi}{3}}$

Pour $-\frac{241\pi}{4}$

$$-61\pi < -\frac{241\pi}{4} < -60\pi \Leftrightarrow -\pi < -\frac{241\pi}{4} + 60\pi < 0 \Leftrightarrow -\pi < -\frac{\pi}{4} < 0$$

Donc la mesure principale de $-\frac{241\pi}{4}$ est $\boxed{-\frac{\pi}{4}}$

Pour $-\frac{37\pi}{12}$
 $-4 < -\frac{37}{12} < -3 \Leftrightarrow -4\pi < -\frac{37\pi}{12} < -3\pi \Leftrightarrow 0 < -\frac{37\pi}{12} + 4\pi < \pi \Leftrightarrow 0 < \frac{11\pi}{12} < \pi$

Donc la mesure principale de $-\frac{37\pi}{12}$ est $\boxed{\frac{11\pi}{12}}$

Pour 3,14

$0 < \frac{3,14}{\pi} < 1 \Leftrightarrow 0 < 3,14 < \pi$ donc la mesure principale de 3,14 est $\boxed{3,14}$

Pour 2013 :

$640 < \frac{2013}{\pi} < 641 \Leftrightarrow 640\pi < 2013 < 641\pi \Leftrightarrow 0 < 2013 - 640\pi < \pi$

Donc la mesure principale de 2013 est $\boxed{2013 - 640\pi}$

Exercice 2

$(\vec{OI}; \vec{OM}) = \boxed{\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}}$

$(\vec{OI}; \vec{ON}) = \boxed{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}}$

$(\vec{OI}; \vec{OP}) = \boxed{-\frac{\pi}{4} + 2\pi k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}}$

$(\vec{OJ}; \vec{OP}) = \boxed{-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}}$

$(\vec{OM}; \vec{ON}) = \boxed{\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}}$

$(\vec{OP}; \vec{OM}) = \boxed{\pi + 2\pi k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}}$

Exercice 3

1) Voir la figure

2) Voir la figure

3) Dans le triangle ABC,

$\cos(\widehat{ACB}) = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{2}$ donc $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{3}$. Donc, vue

l'orientation,

$(\vec{CA}; \vec{CB}) = \boxed{\frac{\pi}{3} + 2\pi k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}}$

$(\vec{AD}; \vec{AE}) = (\vec{AD}; \vec{AC}) + (\vec{AC}; \vec{AB}) + (\vec{AB}; \vec{AE}) \quad [2\pi]$
 $= -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$

$= \boxed{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}}$

$(\vec{AD}; \vec{CB}) = (\vec{AD}; \vec{AC}) + (\vec{AC}; \vec{CB}) \quad [2\pi]$

$= -\frac{\pi}{3} + \pi + (\vec{CA}; \vec{CB}) \quad [2\pi]$

$= \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$

$= \boxed{\pi + 2\pi k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}}$

$(\vec{AE}; \vec{CB}) = (\vec{AE}; \vec{AD}) + (\vec{AD}; \vec{CB}) \quad [2\pi]$

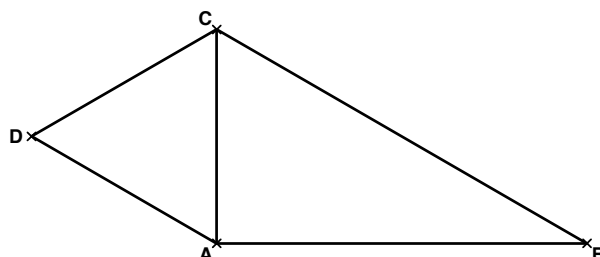
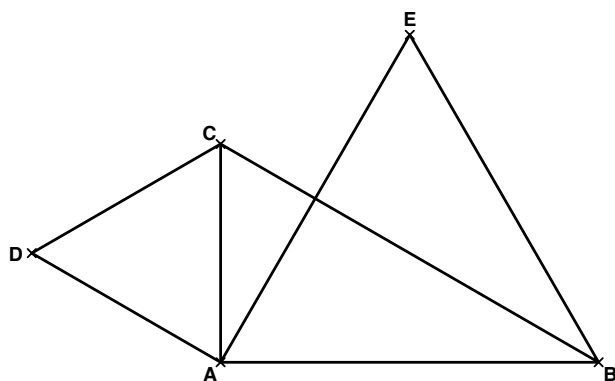
$= \frac{\pi}{2} + \pi \quad [2\pi]$

$= \boxed{\frac{3\pi}{2} + 2\pi k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}}$

Exercice 4

1) Voir la figure

2)



$$\begin{aligned}
 (\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AB}) &= (\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}) \quad [2\pi] \\
 &= -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \\
 &= \boxed{-\frac{5\pi}{6} \quad [2\pi]}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{AC}) &= (\overrightarrow{CD}; \overrightarrow{CA}) \quad [2\pi] \\
 &= \boxed{\frac{\pi}{3} \quad [2\pi]}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{BA}) &= (\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{CA}) \\
 &\quad + (\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{BA}) \quad [2\pi] \\
 &= \pi + (\overrightarrow{CD}; \overrightarrow{CA}) \\
 &\quad + (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}) \quad [2\pi] \\
 &= \pi + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \\
 &= \boxed{\frac{5\pi}{6} \quad [2\pi]}
 \end{aligned}$$

Dans le triangle ABC , $\widehat{ABC} + \widehat{BAC} + \widehat{ACB} = \pi$ donc $\widehat{ACB} = \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$. Donc, vue l'orientation,

$$(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) = \boxed{\frac{\pi}{3} \quad [2\pi]}$$

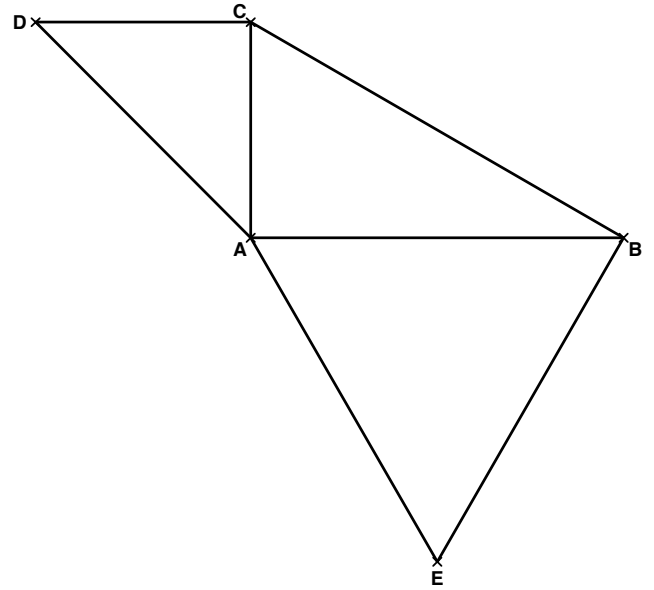
Exercice 5

1) Voir la figure

2) Dans le triangle ABC ,

$$\cos(\widehat{ACB}) = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypothénuse}} = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{2} \text{ donc } \widehat{ACB} = \frac{\pi}{3}.$$

$$\begin{aligned}
 (\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE}) &= (\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AE}) \quad [2\pi] \\
 &= -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \quad [2\pi] \\
 &= -\frac{13\pi}{12} \quad [2\pi] \\
 &= \boxed{\frac{11\pi}{12} \quad [2\pi]}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 (\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{AD}) &= (\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{AD}) \quad [2\pi] \\
 &= -\frac{\pi}{3} + \pi + (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD}) \quad [2\pi] \\
 &= \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \quad [2\pi] \\
 &= \boxed{\frac{11\pi}{12} \quad [2\pi]}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\overrightarrow{EA}; \overrightarrow{BC}) &= (\overrightarrow{EA}; \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{BC}) \quad [2\pi] \\
 &= \pi + (\overrightarrow{AE}; \overrightarrow{AD}) + \pi + (\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{CB}) \quad [2\pi] \\
 &= 2\pi - (\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE}) - (\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{AD}) \quad [2\pi] \\
 &= 2\pi - \frac{11\pi}{12} - \frac{11\pi}{12} \quad [2\pi] \\
 &= \frac{2\pi}{12} \quad [2\pi] \\
 &= \boxed{\frac{\pi}{6} \quad [2\pi]}
 \end{aligned}$$

Exercice 6

$$\begin{aligned}
 (2\vec{u}; \vec{v}) &= (\vec{u}; \vec{v}) \\
 &= \boxed{-\frac{3\pi}{4} \quad [2\pi]}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (-\vec{v}; 2\vec{u}) &= (-v; \vec{u}) \quad [2\pi] \\
 &= \pi + (v; \vec{u}) \quad [2\pi] \\
 &= \pi - (\vec{u}; \vec{v}) \quad [2\pi] \\
 &= \pi + \frac{3\pi}{4} \quad [2\pi] \\
 &= \frac{7\pi}{4} \quad [2\pi] \\
 &= \boxed{-\frac{\pi}{4} \quad [2\pi]}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3\vec{v}; -2\vec{u}) &= (\vec{v}; -\vec{u}) \quad [2\pi] \\
 &= -(-\vec{u}; \vec{v}) \quad [2\pi] \\
 &= -(\pi + (\vec{u}; \vec{v})) \quad [2\pi] \\
 &= -\left(\pi - \frac{3\pi}{4}\right) \quad [2\pi] \\
 &= \boxed{-\frac{\pi}{4} \quad [2\pi]}
 \end{aligned}$$

Exercice 7

$$\begin{aligned}
 (\vec{v}; \vec{w}) &= (\vec{v}; \vec{u}) + (\vec{u}; \vec{w}) \quad [2\pi] \\
 &= -(\vec{u}; \vec{v}) + (\vec{u}; \vec{w}) \quad [2\pi] \\
 &= \frac{\pi}{7} - \frac{\pi}{4} \quad [2\pi]
 \end{aligned}$$

$$= \boxed{-\frac{3\pi}{28} \quad [2\pi]}$$

$$\begin{aligned}
 (-\vec{u}; \vec{v}) &= \pi + (\vec{u}; \vec{v}) \quad [2\pi] \\
 &= \pi - \frac{\pi}{7} \quad [2\pi]
 \end{aligned}$$

$$= \boxed{\frac{6\pi}{7} [2\pi]} \quad \left| \quad \begin{aligned} (-\vec{w}; \vec{v}) &= \pi + (\vec{w}; \vec{v}) [2\pi] \\ &= \pi - (\vec{v}; \vec{w}) [2\pi] \\ &= \pi + \frac{\pi}{4} [2\pi] \end{aligned} \quad \right| \quad \begin{aligned} &= \frac{5\pi}{4} [2\pi] \\ &= \boxed{-\frac{3\pi}{4} [2\pi]} \end{aligned}$$

Exercice 8

$$\begin{aligned} &(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{CD}; \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}) \\ &= (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{CD}; \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{AB}) [2\pi] \quad \text{car } (-\vec{u}; -\vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v}) [2\pi] \\ &= (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AB}) [2\pi] \quad \text{grâce à la relation de Chasles} \\ &= 0 [2\pi] \end{aligned}$$

Partie C : Angles associés

Exercice 1

$$\begin{aligned} \cos(2n\pi) &= \cos(2\pi \times n) = \cos(0) = \boxed{1} \quad \text{et} \quad \sin(2n\pi) = \sin(2\pi \times n) = \sin(0) = \boxed{0} \\ \cos((2n+1)\pi) &= \cos(2\pi \times n + \pi) = \cos(\pi) = \boxed{-1} \quad \text{et} \quad \sin((2n+1)\pi) = \sin(2\pi \times n + \pi) = \sin(\pi) = \boxed{0} \\ \cos(n\pi) &= \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \quad \text{à l'aide des deux calculs précédents et} \quad \sin(n\pi) = \boxed{0} \\ \cos\left(-\frac{\pi}{2} + (2n+1)\pi\right) &= \cos\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi \times n + \pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \boxed{0} \quad \text{et} \\ \sin\left(-\frac{\pi}{2} + (2n+1)\pi\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \boxed{1} \end{aligned}$$

Exercice 2

$$\begin{aligned} 1) \quad A &= \cos(0) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos(\pi) \\ &= 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 - \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \boxed{0} \\ 2) \quad B &= \cos(-\pi) + \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ &= -1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{-1} \\ 3) \quad C &= \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \sin(\pi) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + 0 = \boxed{2 + \sqrt{3}} \end{aligned}$$

Exercice 3

$$\begin{aligned} 1) \quad A &= \cos\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\pi + \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \boxed{-\sin(x)} \\ 2) \quad B &= \sin(x + 100\pi) = \sin(x + 2\pi \times 50) = \boxed{\sin(x)} \\ 3) \quad C &= \cos\left(\frac{2012\pi}{2} + x\right) = \cos(1006\pi + x) = \cos(2\pi \times 503 + x) = \boxed{\cos(x)} \\ 4) \quad D &= \sin\left(\frac{2013\pi}{2} + x\right) = \sin\left(1006\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(2\pi \times 503 + \frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (-x)\right) \\ &= \cos(-x) = \boxed{\cos(x)} \\ 5) \quad E &= \sin(x - 78\pi) = \sin(x - 2\pi \times 39) = \boxed{\sin(x)} \\ 6) \quad F &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 4\sin\left(-x - \frac{\pi}{2}\right) - 5\sin(\pi + x) = \sin(x) - 4\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 5 \times (-\sin(x)) \\ &= \sin(x) - 4\cos(x) + 5\sin(x) = \boxed{6\sin(x) - 4\cos(x)} \\ 7) \quad G &= \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 2\cos(-x - \pi) + 5\sin(-x) = \cos(x) + 2\cos(x) - 5\sin(x) = \boxed{3\cos(x) - 5\sin(x)} \end{aligned}$$

Exercice 4

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{8\pi}{3}\right) &= \cos\left(\frac{6\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(2\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \boxed{-\frac{1}{2}} \\ \sin\left(-\frac{18\pi}{4}\right) &= \sin\left(-\frac{9\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{8\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-4\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \boxed{-1} \end{aligned}$$

$$\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\sin\left(-\frac{35\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{32\pi}{4} - \frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(-8\pi - \frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Partie D : Equations et inéquations trigonométriques

Exercice 1

$$1) \quad x = \boxed{-\frac{\pi}{3}}$$

$$2) \quad x = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

$$3) \quad x \in \boxed{\left\{-\frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right\}}$$

$$4) \quad x \in \boxed{\left\{-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right\}}$$

Exercice 2

$$1) \quad \cos(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \text{ ou } -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc } S = \boxed{\left\{\frac{\pi}{3} + 2\pi k; -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

$$2) \quad \sin(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \text{ ou } \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc } S = \boxed{\left\{\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

$$3) \quad \cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos(x) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \text{ ou } -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc } S = \boxed{\left\{\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

$$4) \quad \sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \text{ ou } \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc } S = \boxed{\left\{\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

Exercice 3

$$1) \quad 2x = \frac{\pi}{2} [2\pi] \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

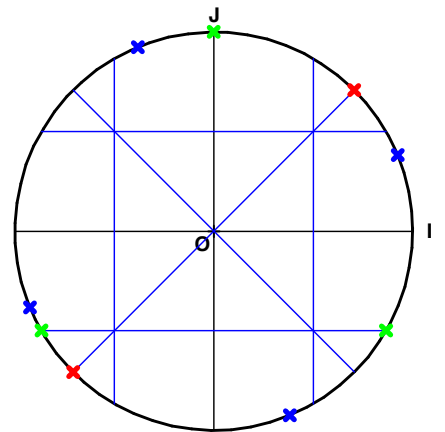
Cela donne donc deux points en rouges sur la figure.

$$2) \quad 4x = \frac{\pi}{2} [2\pi] \Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

Cela donne donc quatre points en bleu sur la figure.

$$3) \quad 3x = \frac{3\pi}{2} [2\pi] \Leftrightarrow 3x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

Cela donne donc trois points en vert sur la figure.



Exercice 4

$$1) \quad \cos(2x) = \cos\left(\frac{8\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \cos(2x) = \cos(4\pi) \Leftrightarrow \cos(2x) =$$

$$\cos(0) \Leftrightarrow 2x = 0 + 2\pi k \Leftrightarrow x = \pi k$$

$$\text{Donc } S = \{\pi k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\} \text{ pour la résolution dans } \mathbb{R} \text{ et } S = \{\pi; 2\pi; 3\pi; 4\pi; 5\pi\} \text{ dans } [\pi; 5\pi]$$

En effet : $\pi \leq \pi k \leq 5\pi \Leftrightarrow 1 \leq k \leq 5$ donc $k \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

$$2) \quad \sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \Leftrightarrow x - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{5} + 2\pi k \text{ ou } x - \frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{5} + 2\pi k$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{13\pi}{15} + 2\pi k \text{ ou } x = \frac{22\pi}{15} + 2\pi k$$

$$\text{Donc } S = \left\{\frac{13\pi}{15} + 2\pi k; \frac{22\pi}{15} + 2\pi k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\} \text{ dans } \mathbb{R}$$

De plus : $-2\pi \leq \frac{13\pi}{15} + 2\pi k \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{43\pi}{15} \leq 2\pi k \leq \frac{17\pi}{15} \Leftrightarrow -\frac{43}{30} \leq k \leq \frac{17}{30} \Rightarrow -1 \leq k \leq 0$ donc $k \in \{-1; 0\}$ ce qui donne $\frac{13\pi}{15} - 2\pi$, soit $-\frac{17\pi}{15}$ et $\frac{13\pi}{15}$.

D'autre part, $-2\pi \leq \frac{22\pi}{15} + 2\pi k \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{52}{30} \leq k \leq \frac{8}{30} \Rightarrow -1 \leq k \leq 0$ donc $k \in \{-1; 0\}$ ce qui donne $\frac{22\pi}{15} - 2\pi$, soit $-\frac{8\pi}{15}$ et $\frac{22\pi}{15}$. Finalement, $S = \left\{ -\frac{17\pi}{15}; \frac{13\pi}{15}; -\frac{8\pi}{15}; \frac{22\pi}{15} \right\}$ dans $[-2\pi; 2\pi]$

$$3) \cos(3x) = -\cos(x) \Leftrightarrow \cos(3x) = \cos(\pi - x) \Leftrightarrow 3x = \pi - x + 2\pi k \text{ ou } 3x = -(\pi - x) + 2\pi k \\ \Leftrightarrow 4x = \pi + 2\pi k \text{ ou } 2x = -\pi + 2\pi k \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k \text{ ou } x = -\frac{\pi}{2} + \pi k$$

Donc $S = \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k; -\frac{\pi}{2} + \pi k \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \right\}$ dans $\mathbb{R}$

$$-2\pi \leq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k \leq \pi \Leftrightarrow -\frac{9\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2}k \leq \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{9}{2} \leq k \leq \frac{3}{2} \Rightarrow -4 \leq k \leq 1 \text{ donc } k \in \{-4; -3; -2; -1; 0; 1\} \text{ ce qui donne } -\frac{7\pi}{4}; -\frac{5\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \text{ et } \frac{3\pi}{4}.$$

D'autre part, $-2\pi \leq -\frac{\pi}{2} + k\pi \leq \pi \Leftrightarrow -\frac{3\pi}{2} \leq k\pi \leq \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq k \leq \frac{3}{2} \Rightarrow -1 \leq k \leq 1$ donc $k \in \{-1; 0; 1\}$ ce qui donne $-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. Finalement, $S = \left\{ -\frac{7\pi}{4}; -\frac{5\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; -\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\}$

$$4) \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin(x) \Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin(-x) \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{4} = -x + 2\pi k \text{ ou } 2x + \frac{\pi}{4} = \pi - (-x) + 2\pi k \\ \Leftrightarrow 3x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}k \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$$

Donc $S = \left\{ -\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \right\}$ dans $\mathbb{R}$

De plus $4\pi \leq -\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}k \leq 6\pi \Leftrightarrow \frac{49\pi}{12} \leq \frac{2\pi}{3}k \leq \frac{73\pi}{12} \Leftrightarrow \frac{49}{8} \leq k \leq \frac{73}{8} \Rightarrow 7 \leq k \leq 9$ donc $k \in \{7; 8; 9\}$ ce qui donne $\frac{55\pi}{12}; \frac{63\pi}{12}$ et $\frac{71\pi}{12}$.

Et d'autre part, $4\pi \leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \leq 6\pi \Leftrightarrow \frac{13\pi}{4} \leq 2\pi k \leq \frac{21\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{13}{8} \leq k \leq \frac{21}{8} \Rightarrow k = 2$ ce qui donne $\frac{19\pi}{4}$

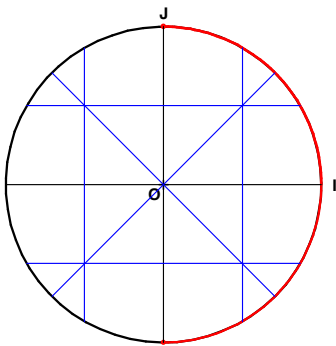
On a donc $S = \left\{ \frac{55\pi}{12}; \frac{63\pi}{12}; \frac{71\pi}{12}; \frac{19\pi}{4} \right\}$ dans $[4\pi; 6\pi]$

$$5) \sin(3x) = \cos(2x) \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = \cos(2x) \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - 3x = 2x + 2\pi k \text{ ou } \frac{\pi}{2} - 3x = -2x + 2\pi k \\ \Leftrightarrow 5x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5}k \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

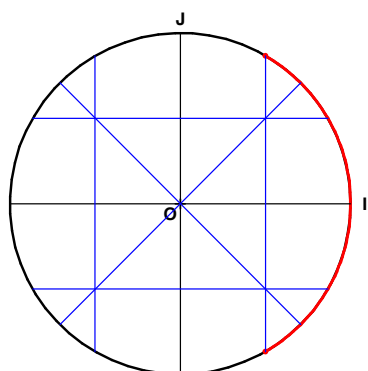
Donc $S = \left\{ \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5}k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \right\}$

Exercice 5

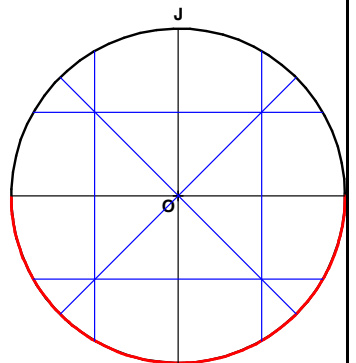
1) $0 \leq \cos(x) \leq 1$



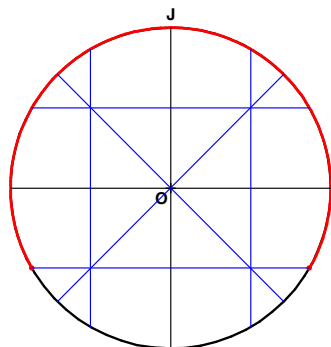
2) $\cos(x) \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$



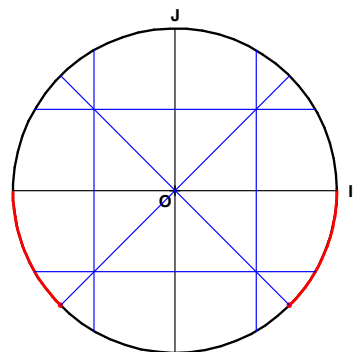
3) $-1 < \sin(x) < 0$



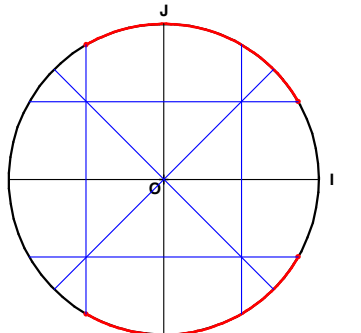
4) $-\frac{1}{2} \leq \sin(x) \leq 1$



5) $\sin(x) \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right]$



6) $\cos(x) \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$



Exercice 6

- 1) $S =]-\pi; \frac{\pi}{6}[\cup]\frac{5\pi}{6}; \pi]$
- 2) $S = [0; \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{5\pi}{3}; 2\pi]$
- 3) $S =]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}[\cup]\frac{7\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}[$
- 4) $S = [-\pi; \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{2\pi}{3}; 2\pi]$

Exercice 7

1) On pose $X = \cos(x)$ et alors $2X^2 + 9X + 4 = 0$. $\Delta = 9^2 - 4 \times 2 \times 4 = 49$ donc cette équation a deux solutions $X_1 = \frac{-9+7}{4} = -\frac{1}{2}$ et $X_2 = \frac{-9-7}{4} = -4$.

On a donc $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ ou $\cos(x) = -4$.

La dernière équation n'a pas de solution car un cosinus est toujours supérieur à -1 .

D'autre part, $\cos(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ ou $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$

$$S = \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2\pi k; -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

2) On pose $X = \sin(x)$ et alors $4X^2 - 2(1 + \sqrt{3})X + \sqrt{3} = 0$.

$$\begin{aligned} \Delta &= \left(-2(1 + \sqrt{3})\right)^2 - 4 \times 4 \times \sqrt{3} = 4(1 + \sqrt{3})^2 - 16\sqrt{3} = 4(1 + 2\sqrt{3} + 3) - 16\sqrt{3} \\ &= 4 - 8\sqrt{3} + 12 = (2 - 2\sqrt{3})^2 \text{ donc l'équation a deux solutions } X_1 = \frac{2(1+\sqrt{3})+(2-2\sqrt{3})}{8} = \frac{1}{2} \text{ et } \\ X_2 &= \frac{2(1+\sqrt{3})-(2-2\sqrt{3})}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

On a donc $\sin(x) = \frac{1}{2}$ ou $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\sin(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \text{ ou } \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$$

$$\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \text{ ou } \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$$

$$\text{Finalement } S = \left\{ \frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Exercice 8

1) $t(x) = -4x^2 + (2\sqrt{3} - 2)x + \sqrt{3}$:

$$\Delta = (2\sqrt{3} - 2)^2 - 4 \times (-4) \times \sqrt{3} = 12 - 8\sqrt{3} + 4 + 16\sqrt{3} = 12 + 8\sqrt{3} + 4 = (2\sqrt{3} + 2)^2$$

$$\text{Donc } t \text{ a deux racines } X_1 = \frac{-(2\sqrt{3}-2)+(2\sqrt{3}+2)}{-8} = \left[-\frac{1}{2}\right] \text{ et } X_2 = \frac{-(2\sqrt{3}-2)-(2\sqrt{3}+2)}{-8} = \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$2) \quad t(x) = \left[-4\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) = (-2x + \sqrt{3})(2x + 1)\right]$$

$$3) \quad 2 \cos(x) + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \cos(x) \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right]$$

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	2π
Signe de $2 \cos(x) + 1$	+	0	-	+

$$-2 \cos(x) + \sqrt{3} \leq 0 \Leftrightarrow \cos(x) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}; 2\pi\right]$$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Signe de $-2 \cos(x) + \sqrt{3}$	-	0	+	-

$$4) \quad A(x) = -4 \cos^2(x) + (2\sqrt{3} - 2) \cos(x) + \sqrt{3} = t(\cos(x)) = (-2 \cos(x) + \sqrt{3})(2 \cos(x) + 1)$$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$2 \cos(x) + 1$	+	+	0	−	+	+
$-2 \cos(x) + \sqrt{3}$	−	0	+	+	0	−
$A(x)$	−	0	+	0	+	−