

Exercices supplémentaires : Trigonométrie

Partie A : Cercle trigonométrique, cosinus et sinus

Exercice 1

Convertir en radians les mesures d'angles exprimées en degrés : 60° ; 150° ; 10° ; 12° ; 198° ; 15°

Exercice 2

Dans chacun des cas suivant, donner trois autres réels associés au même point sur le cercle trigonométrique :

- 1) $-\pi$
- 2) $\frac{3\pi}{2}$
- 3) 10π
- 4) $-\frac{\pi}{4}$

Exercice 3

Parmi les mesures suivantes, indiquer celles qui sont associées au même point que $-\frac{\pi}{12}$ sur le cercle trigonométrique.

$$\frac{47\pi}{12} ; -\frac{49\pi}{12} ; \frac{11\pi}{12} ; -\frac{241\pi}{12} ; -\frac{37\pi}{12} ; -\frac{313\pi}{12}$$

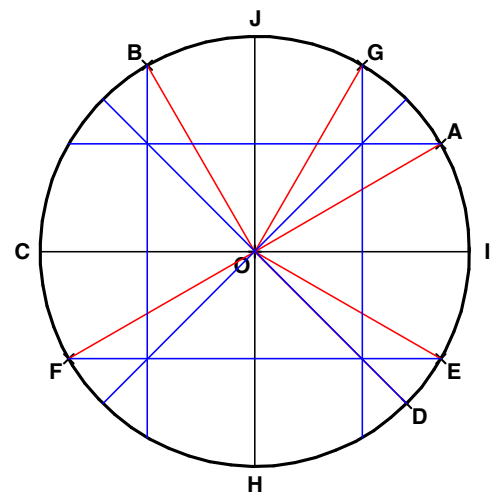
Exercice 4

Dans chacun des cas suivants, déterminer si x et y sont des mesures d'un même angle orienté.

- 1) $x = \frac{\pi}{2}$; $y = \frac{3\pi}{2}$
- 2) $x = \frac{5\pi}{3}$; $y = -\frac{21\pi}{4}$
- 3) $x = \frac{29\pi}{3}$; $y = -\frac{2\pi}{3}$
- 4) $x = \frac{43\pi}{12}$; $y = -\frac{5\pi}{12}$

Exercice 5

Sur le cercle trigonométrique ci-contre, déterminer les réels associés aux points $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ et J .



Exercice 6

Placer sur le cercle trigonométrique les points A, B, C, D, E et F repérés par $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{4}$; $-\frac{\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{6}$; $-\frac{5\pi}{4}$ et $-\frac{2\pi}{3}$

Exercice 7

On considère un réel $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

- 1) Déterminer la valeur exacte de $\cos(x)$.
- 2) On sait que $x \in \left\{\frac{\pi}{12}; \frac{5\pi}{12}; -\frac{\pi}{12}; -\frac{5\pi}{12}\right\}$. Déterminer la valeur exacte de x .

Exercice 8

- 1) Sachant que $\cos\left(\frac{9\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$, calculer la valeur de $\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right)$.
- 2) En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$

Exercice 9

Dans chacun des cas suivants, déterminer $\cos(x)$

- 1) $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ et $\sin(x) = \frac{1}{4}$
- 2) $x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$ et $\sin(x) = -0,6$
- 3) $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ et $\sin(x) = -\frac{2}{3}$

Partie B : Angle orienté, mesure principale d'un angle

Exercice 1

Déterminer la mesure principale des angles dont les mesures en radians sont :

$$-\frac{7\pi}{3}; -\pi; \frac{13\pi}{6}; \frac{47\pi}{12}; -\frac{49\pi}{6}; \frac{11\pi}{3}; -\frac{241\pi}{4}; -\frac{37\pi}{12}; 3,14; 2013$$

Exercice 2

Donner une mesure en radian des angles orientés suivants :

$$(\vec{OI}; \vec{OM}); (\vec{OI}; \vec{ON}); (\vec{OI}; \vec{OP}); (\vec{OJ}; \vec{OP}); (\vec{OM}; \vec{ON}); (\vec{OP}; \vec{OM})$$

Exercice 3

- 1) Construire un triangle direct ABC rectangle en A tel que $BC = 2AC$.
- 2) Construire deux triangles équilatéraux direct ACD et ABE .
- 3) Donner une mesure en radian des angles $(\vec{CA}; \vec{CB})$;
 $(\vec{AD}; \vec{AE})$; $(\vec{AD}; \vec{CB})$ et $(\vec{AE}; \vec{CB})$.

Exercice 4

ABC est un triangle rectangle en A , direct, tel que $(\vec{BA}; \vec{BC}) = -\frac{\pi}{6} [2\pi]$ et ACD est un triangle équilatéral direct.

- 1) Faire une figure.
- 2) Déterminer la mesure principale des angles suivant : $(\vec{AD}; \vec{AB})$; $(\vec{DC}; \vec{AC})$; $(\vec{DC}; \vec{BA})$; $(\vec{CA}; \vec{CB})$

Exercice 5

ABC est un triangle rectangle en A direct tel que $BC = 2AC$. ACD est un triangle rectangle isocèle en C direct et BAE est un triangle équilatéral direct.

- 1) Faire une figure.
- 2) Déterminer la mesure principale des angles suivants : $(\vec{AD}; \vec{AE})$; $(\vec{CB}; \vec{AD})$ et $(\vec{EA}; \vec{BC})$.

Exercice 6

Sachant que $(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{3\pi}{4} [2\pi]$, déterminer la mesure principale de $(2\vec{u}; \vec{v})$; $(-\vec{v}; 2\vec{u})$; $(3\vec{v}; -2\vec{u})$

Exercice 7

Sachant que $(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{\pi}{7} [2\pi]$ et $(\vec{u}; \vec{w}) = -\frac{\pi}{4} [2\pi]$, déterminer la mesure principale de $(\vec{v}; \vec{w})$; $(-\vec{u}; \vec{v})$ et $(-\vec{w}; \vec{v})$.

Exercice 8

A, B, C et D sont quatre points du plan. Démontrer l'égalité :

$$(\vec{AB}; \vec{AD}) + (\vec{DA}; \vec{DC}) + (\vec{CD}; \vec{CB}) + (\vec{BC}; \vec{BA}) = 0[2\pi]$$

Partie C : Angles associés

Exercice 1

On considère un entier relatif n (il peut être positif ou négatif).

Déterminer, éventuellement en fonction de n , le cosinus et le sinus des réels :

$$2n\pi; (2n+1)\pi; n\pi; -\frac{\pi}{2} + (2n+1)\pi$$

Exercice 2

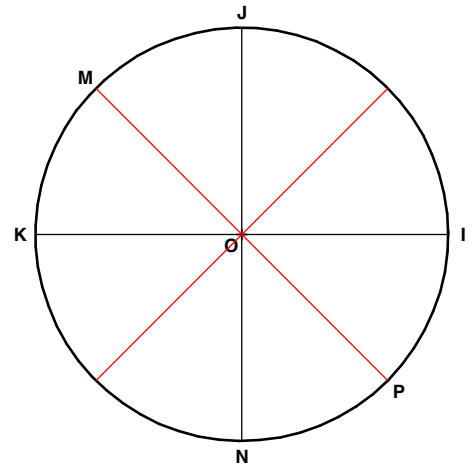
Simplifier les expressions suivantes :

- 1) $A = \cos(0) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos(\pi)$
- 2) $B = \cos(-\pi) + \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$
- 3) $C = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \sin(\pi)$

Exercice 3

Exprimer en fonction de $\cos(x)$ ou de $\sin(x)$ les réels suivants :

- 1) $A = \cos\left(\frac{5\pi}{2} - x\right)$



- 2) $B = \sin(x + 100\pi)$
- 3) $C = \cos\left(\frac{2012\pi}{2} + x\right)$
- 4) $D = \sin\left(\frac{2013\pi}{2} + x\right)$
- 5) $E = \sin(x - 78\pi)$
- 6) $F = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 4 \sin\left(-x - \frac{\pi}{2}\right) - 5 \sin(\pi + x)$
- 7) $G = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 2 \cos(-x - \pi) + 5 \sin(-x)$

Exercice 4

Calculer les valeurs exactes de : $\cos\left(\frac{8\pi}{3}\right)$; $\sin\left(-\frac{18\pi}{4}\right)$; $\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(-\frac{35\pi}{4}\right)$

Partie D : Equations et inéquations trigonométriques

Exercice 1

A l'aide d'un cercle trigonométrique, donner toutes les valeurs possibles de x vérifiant les conditions données.

- 1) $\cos(x) = \frac{1}{2}$ et $\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ avec $x \in [-\pi; \pi]$
- 2) $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ avec $x \in [-\pi; \pi]$
- 3) $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(x) = -\frac{1}{2}$ avec $x \in [-\pi; 3\pi]$
- 4) $\cos(x) = 0$ et $\sin(x) = -1$ avec $x \in [-2\pi; 3\pi]$

Exercice 2

Résoudre les équations ci-dessous dans $\mathbb{R}$

- 1) $\cos(x) = \frac{1}{2}$
- 2) $\sin(x) = \frac{1}{2}$
- 3) $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- 4) $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 3

Placer sur le cercle trigonométrique les points repérés par les équations suivantes :

- 1) $2x = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$
- 2) $4x = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$
- 3) $3x = \frac{3\pi}{2} \quad [2\pi]$

Exercice 4

Résoudre les équations trigonométriques suivantes.

- 1) $\cos(2x) = \cos\left(\frac{8\pi}{2}\right)$ dans $\mathbb{R}$ puis dans $[\pi; 5\pi]$
- 2) $\sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ dans $\mathbb{R}$ puis dans $[-2\pi; 2\pi]$
- 3) $\cos(3x) = -\cos(x)$ dans $\mathbb{R}$ puis dans $[-2\pi; \pi]$
- 4) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin(x)$ dans $\mathbb{R}$ puis dans $[4\pi; 6\pi]$
- 5) $\sin(3x) = \cos(2x)$ dans $\mathbb{R}$

Exercice 5

Représenter sur un cercle trigonométrique l'ensemble des points M du cercle associés aux réels x vérifiant :

- 1) $0 \leq \cos(x) \leq 1$
- 2) $\cos(x) \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$
- 3) $-1 < \sin(x) < 0$
- 4) $-\frac{1}{2} \leq \sin(x) \leq 1$
- 5) $\sin(x) \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right]$
- 6) $\cos(x) \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

Exercice 6

Résoudre à l'aide du cercle trigonométrique les inéquations suivantes :

- 1) $\sin(x) < \frac{1}{2}$ dans $]-\pi; \pi]$
- 2) $\cos(x) \geq \frac{1}{2}$ dans $[0; 2\pi]$
- 3) $\cos(x) > \frac{1}{\sqrt{2}}$ dans $[-\pi; 3\pi]$
- 4) $\sin(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ dans $[-\pi; 2\pi]$

Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

- 1) $2 \cos^2(x) + 9 \cos(x) + 4 = 0$
- 2) $4 \sin^2(x) - 2(1 + \sqrt{3}) \sin(x) + \sqrt{3} = 0$

Exercice 8

- 1) Déterminer les racines éventuelles du trinôme t défini par $t(x) = -4x^2 + (2\sqrt{3} - 2)x + \sqrt{3}$.
- 2) Factoriser $t(x)$
- 3) Etablir dans $[0; 2\pi]$ le signe de $2 \cos(x) + 1$ et de $-2 \cos(x) + \sqrt{3}$
- 4) En déduire le signe sur $[0; 2\pi]$ de $-4 \cos^2(x) + (2\sqrt{3} - 2) \cos(x) + \sqrt{3}$.