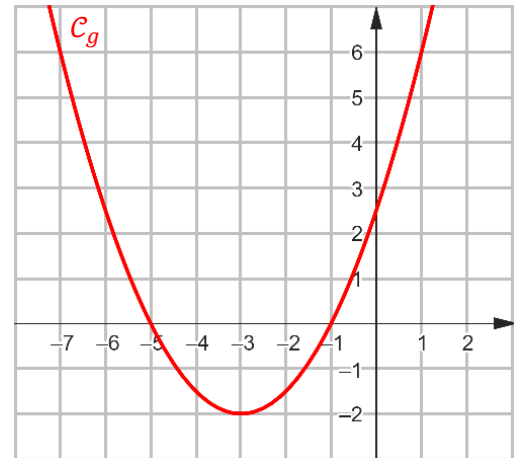


Correction – Devoir surveillé n°1

Calculatrice autorisée mais les calculs doivent rester détaillés
La qualité de la rédaction et la propreté de la copie seront prises en compte

Exercice 1 : 5 points

Soit g une fonction polynôme du second degré dont la courbe représentative est donnée ci-contre.



1. A partir du graphique, déterminer la valeur de α , β et des éventuelles racines x_1 et x_2 (si elles existent) de g .

On lit graphiquement que :

$$\alpha = -3 \quad \beta = -2 \quad x_1 = -5 \quad x_2 = -1$$

2 points

2. Après avoir déterminé la valeur de a , montrer que :

$$g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{5}{2} \quad \text{où } x \in \mathbb{R}.$$

Méthode n°1 : En utilisant la forme canonique

D'après la question précédente, $g(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta = a(x + 3)^2 - 2$

On lit graphiquement que $A(1; 6) \in C_g$.

(On pourrait choisir n'importe quel autre point visible sauf le sommet).

Donc : $g(1) = 6$

$$\Leftrightarrow a(1 + 3)^2 - 2 = 6$$

$$\Leftrightarrow a \times 4^2 = 6 + 2$$

$$\Leftrightarrow 16a = 8$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

1,5 point

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) = \frac{1}{2}(x + 3)^2 - 2$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 + 6x + 9) - 2 \quad (\text{c'est une identité remarquable})$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{6x}{2} + \frac{9}{2} - 2$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{9}{2} - \frac{4}{2}$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{5}{2} \quad 1,5 \text{ points}$$

Méthode n°2 : En utilisant la forme factorisée

D'après la question précédente, $g(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = a(x + 5)(x + 1)$

On lit graphiquement que $A(1; 6) \in C_g$.

(On pourrait choisir n'importe quel autre point visible sauf les points d'intersection avec l'axe des abscisses).

Donc : $g(1) = 6$

$$\Leftrightarrow a(1 + 5)(1 + 1) = 6$$

$$\Leftrightarrow a \times 6 \times 2 = 6$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{6}{6 \times 2}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}(x+5)(x+1) \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + x + 5x + 5) \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + 6x + 5) \\ &= \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Exercice 2 : 7 points

Une entreprise fabrique et vend entre 0 et 9 000 produits.

- On note $C(x)$ le coût de production (en millions d'euros) de x milliers de produits ;
- On note $R(x)$ la recette (en millions d'euros) de x milliers de produits ;
- On note $B(x)$ le bénéfice (en millions d'euros) généré après la vente de x milliers de produits.

On admet que pour tout $x \in [0; 9]$:

$$C(x) = \frac{x+14}{-x+10} \qquad R(x) = x$$

1. Montrer que pour tout $x \in [0; 9]$:

$$B(x) = \frac{-x^2 + 9x - 14}{-x + 10}$$

Tout d'abord, *Benefice = Recette - Cout*. Donc pour tout $x \in [0; 9]$:

$$\begin{aligned} B(x) &= R(x) - C(x) \\ &= x - \frac{x+14}{-x+10} \\ &= \frac{x(-x+10)}{-x+10} - \frac{x+14}{-x+10} \\ &= \frac{-x^2 + 10x - x - 14}{-x+10} \\ &= \frac{-x^2 + 9x - 14}{-x+10} \end{aligned}$$

1,75 point

2. Dresser le tableau de signes de B sur $[0; 9]$.

- Etudions $-x^2 + 9x - 14$:
 $\Delta = b^2 - 4ac = 9^2 - 4 \times (-1) \times (-14) = 81 - 56 = 25$
 $\Delta > 0$ donc ce polynôme admet deux racines :

$$\begin{array}{l|l} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} & x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ = \frac{-9 - \sqrt{25}}{2 \times (-1)} & = \frac{-9 + 5}{-2} \\ = \frac{-9 - 5}{-2} & = 2 \\ = 7 & \end{array}$$

2,5 points

- Etudions le signe de $-x + 10$:
 $-x + 10 \geq 0 \iff -x \geq -10 \iff x \leq 10$

On a donc le tableau de signes :

x	0	2	7	9	
Signe de $-x^2 + 2x + 3$	−	0	+	0	−
Signe de $-x + 10$	+		+		+
Signe de $B(x)$	−	0	+	0	−

car $a = -1$ est négatif

1,75 point

3. En déduire quand cette entreprise est rentable.

Cette entreprise est rentable quand $B(x) \geq 0$ (ou bien lorsque $B(x) > 0$)

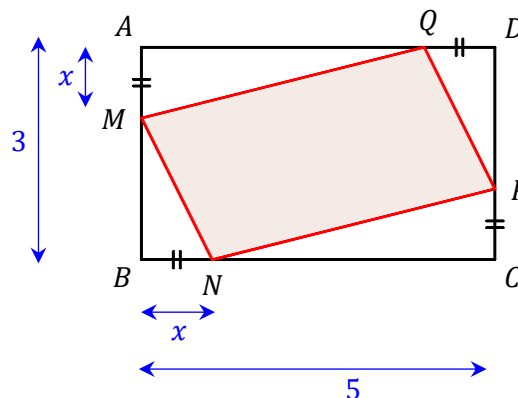
D'après la question précédente, cette entreprise est rentable lorsqu'elle fabrique et vend entre 2 000 et 7 000 produits (ou bien 2001 et 6999 produits). 1 point

Exercice 3 : 8 points

Sur la figure ci-contre, $ABCD$ est rectangle tel que $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm.

Les points M , N , P et Q appartiennent aux côtés du rectangle, et $AM = BN = CP = DQ$.

On note $x = AM$ (en cm) et $\mathcal{A}(x)$ l'aire de $MNPQ$ (en cm^2).



1. A quel intervalle appartient la variable x ?

- x est une longueur donc $x \geq 0$.
- $\begin{cases} x \leq 5 \\ x \leq 3 \end{cases}$ donc $x \leq 3$.

Ainsi, $x \in [0; 3]$.

0,5 point

2. Démontrer que $\mathcal{A}(x) = 2x^2 - 8x + 15$.

Tout d'abord, on remarque que :

$$\mathcal{A}(x) = \text{Aire}_{ABCD} - \text{Aire}_{AQM} - \text{Aire}_{MBN} - \text{Aire}_{NCP} - \text{Aire}_{PDQ}$$

L'aire du rectangle $ABCD$ vaut $AB \times BC = 3 \times 5 = 15 \text{ cm}^2$.

L'aire d'un triangle est : $\frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$

Comme le triangle AQM est rectangle en A , on obtient :

$$\text{Aire}_{AQM} = \frac{AM \times AQ}{2} = \frac{x(5-x)}{2} = \frac{5x - x^2}{2}$$

De même, on obtient que l'aire du triangle MBN :

$$Aire_{MBN} = \frac{MB \times BN}{2} = \frac{(3-x)x}{2} = \frac{3x - x^2}{2}$$

De la même façon, on obtient que :

$$Aire_{NCP} = \frac{5x - x^2}{2} \quad \text{et} \quad Aire_{PDQ} = \frac{3x - x^2}{2}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x) &= 15 - \frac{3x - x^2}{2} - \frac{5x - x^2}{2} - \frac{3x - x^2}{2} - \frac{5x - x^2}{2} \\ &= 15 - 2 \times \frac{3x - x^2}{2} - 2 \times \frac{5x - x^2}{2} \quad (\text{c'est une façon de faire}) \\ &= 15 - (3x - x^2) - (5x - x^2) \\ &= 15 - 3x + x^2 - 5x + x^2 \\ &= 2x^2 - 8x + 15 \end{aligned}$$

2 points

3. Déterminer la position du point M de sorte que le quadrilatère $MNPQ$ ait une aire de $11,5 \text{ cm}^2$.

On cherche $x \in [0; 3]$ tel que $\mathcal{A}(x) = 11,5$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x) &= 11,5 \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 15 &= 11,5 \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 3,5 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \times 2 \times 3,5 = 64 - 28 = 36$$

$\Delta > 0$ donc cette équation admet à priori deux solutions :

$$\begin{array}{l|l} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} & x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ = \frac{-(-8) - \sqrt{36}}{2 \times 2} & = \frac{8 + 6}{4} \\ = \frac{8 - 6}{4} & = \frac{7}{2} \\ = \frac{1}{2} & \end{array}$$

Or, $\frac{7}{2} \notin [0; 3]$.

Ainsi, il faut et il suffit que $x = \frac{1}{2}$ pour que l'aire de $MNPQ$ soit égale à $11,5 \text{ cm}^2$.

2,5 points

4. a. Dresser le tableau de variations de la fonction $\mathcal{A}$.

On pose :

$$\begin{array}{l|l} \alpha = -\frac{b}{2a} & \text{et } \beta = \mathcal{A}(\alpha) \\ = -\frac{-8}{2 \times 2} & = \mathcal{A}(2) \\ = 2 & = 2 \times 2^2 - 8 \times 2 + 15 \\ & = 7 \end{array}$$

x	0	2	3
Variations de $\mathcal{A}$	15	7	9

car $a = 2$ est positif

2 points

- b. En déduire l'aire minimale de $MNPQ$ et pour quelle valeur elle est atteinte.

De même pour l'aire maximale.

D'après la question précédente, l'aire minimale est de 7 cm^2 , atteinte quand $x = 2 \text{ cm}$, et l'aire maximale est de 15 cm^2 , atteinte quand $x = 0 \text{ cm}$.

1 point