

## Suites

## Exercice 1

## Récurrence

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 3$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$ .  
Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2$ .

## Correction exercice 1

Démontrons par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $P(n)$  la proposition : «  $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2$  »

**Initialisation** : D'une part,  $u_0 = 3$  et d'autre part,  $\left(\frac{1}{2}\right)^0 + 2 = 3$

donc  $u_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 + 2$

donc  $P(0)$  est vraie.

**Hérédité** : On suppose  $P(n)$  vraie pour un  $n \in \mathbb{N}$  fixé.

Montrons que  $P(n+1)$  est vraie, c'est à dire  $u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 2$ .

Méthode 1 : D'après l'énoncé  $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$ .

Or, par hypothèse de récurrence,  $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2$  donc  $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left( \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 \right) + 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 1 + 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 2$ .

Méthode 2 : Par hypothèse de récurrence  $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2$  donc  $\frac{1}{2}u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 1$  donc  $\frac{1}{2}u_n + 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 2$

Or, d'après l'énoncé,  $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$  donc  $u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 2$ . Donc  $P(n+1)$  est vraie.

**Conclusion** : La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire donc : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2$

## Exercice 2

## Sens de variation

1. Étudier le sens de variation des suites ci dessous :

a.  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $u_n = \frac{n}{n+1}$ .

b.  $(w_n)$  définie sur  $\mathbb{N}^*$  par :  $w_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$

2. On considère la suite  $(v_n)$  définie par  $v_0 = 10$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_{n+1} = \frac{2v_n+5}{7}$

Démontrer par récurrence que la suite  $(v_n)$  est décroissante.

3. On considère la suite  $(t_n)$  définie par  $t_0 = 2$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $t_{n+1} = -\frac{7}{6}t_n + 3$

a. Calculer  $t_1$  et  $t_2$ .

b. La suite  $(t_n)$  est-elle monotone ?

## Correction exercice 2

1. Étudier le sens de variation des suites ci dessous :

a.  $u_n = \frac{n}{n+1} = f(n)$  avec  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$  par  $f(x) = \frac{x}{x+1}$   $f$  est dérivable sur son ensemble de définition  $\mathbb{R}_+$  comme fonction rationnelle.

$\forall x \in \mathbb{R}_+, f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$   $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+$   
donc la suite  $(u_n)$  est croissante.

b.

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*, w_{n+1} - w_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \\ &= \left( \frac{1}{n+1} \right)^2 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \\ &= \left( \frac{1}{n+1} \right)^2 \\ &\geq 0\end{aligned}$$

donc  $(w_n)$  est croissante.

2. Démontrons par récurrence que la suite  $(v_n)$  est décroissante c'est à dire, pour tout  $n \in \mathbb{N}, v_{n+1} \leq v_n$ .  
Pour  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $P(n)$  la proposition : «  $v_{n+1} \leq v_n$  »

**Initialisation** :  $v_0 = 10$  et  $v_1 = \frac{25}{7}$  donc  $v_1 \leq v_0$  donc  $P(0)$  est vraie.

**Hérédité** : On suppose  $P(n)$  vraie pour un  $n \in \mathbb{N}$  fixé.

Montrons que  $P(n+1)$  est vraie c'est à dire  $v_{n+2} \leq v_{n+1}$ .

D'après l'hypothèse de récurrence,  $v_{n+1} \leq v_n$

donc  $2v_{n+1} \leq 2v_n$

donc  $2v_{n+1} + 5 \leq 2v_n + 5$

donc  $\frac{2v_{n+1} + 5}{7} \leq \frac{2v_n + 5}{7}$

donc  $v_{n+2} \leq v_{n+1}$

Donc  $P(n+1)$  est vraie

**Conclusion** : La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire donc :

Pour tout  $n \in \mathbb{N}, v_{n+1} \leq v_n$

Donc la suite  $(v_n)$  est décroissante.

3. On considère la suite  $(t_n)$  définie par  $t_0 = 2$  et, pour tout entier naturel  $n, t_{n+1} = -\frac{7}{6}t_n + 3$

a.  $t_1 = \frac{2}{3} \approx 0,666$  et  $t_2 = \frac{20}{9} \approx 2,222$

b. Comme  $t_1 < t_0$  alors la suite  $(t_n)$  n'est pas croissante.

Comme  $t_2 > t_1$  alors la suite  $(t_n)$  n'est pas décroissante.

Donc la suite  $(t_n)$  n'est pas monotone.

### Exercice 3

#### Majoration et minoration

1. Soit la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_n = \frac{n+2}{n+1}$ . On veut montrer que  $(u_n)$  est majorée par 2.

Méthode 1 : directe

- a. Vérifier que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2 - \frac{n}{n+1}$   
b. En déduire que la suite  $(u_n)$  est majorée par 2 .

Méthode 2 : avec la fonction associée

- a. Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^+$  par  $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$ . Étudier les variations de  $f$ .  
b. En déduire que la suite  $(u_n)$  est majorée par 2 .

2. Soit la suite  $(v_n)$  définie par  $v_0 = 10$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_{n+1} = \frac{3v_n + 5}{7}$  .

Montrer par récurrence qu'elle est minorée par  $\frac{5}{4}$ .

#### Correction exercice 3

1. Soit la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_n = \frac{n+2}{n+1}$ . On veut montrer que  $(u_n)$  est majorée par 2.

Méthode 1 : directe

- a.  $\forall n \in \mathbb{N}, 2 - \frac{n}{n+1} = \frac{2n+2}{n+1} - \frac{n}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} = u_n$   
b.  $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n}{n+1} > 0$   
donc, en multipliant par  $-1$ ,  $-\frac{n}{n+1} < 0$   
donc, en ajoutant 2,  $2 - \frac{n}{n+1} < 2$   
donc  $u_n \leq 2$

Méthode 2 : avec la fonction associée

- a. a)  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas et  $\forall x \in \mathbb{R}_+, f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$ .  
 $\forall x \in \mathbb{R}_+, f'(x) \leq 0$  donc  $f$  est décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ .  
b.  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 0$  donc, par décroissance de  $f$  sur  $\mathbb{R}_+, f(n) \leq f(0)$ .  
Or  $f(0) = 2$  donc,  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 2$   
donc la suite  $(u_n)$  est majorée par 2 .

2. Démontrons par récurrence que la suite  $(v_n)$  est minorée par  $\frac{5}{4}$  c'est à dire, pour tout  $n \in \mathbb{N}, v_n \geq \frac{5}{4}$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $P(n)$  la proposition : «  $v_n \geq \frac{5}{4}$  » .

**Initialisation** :  $v_0 = 10$  donc  $v_0 \geq \frac{5}{4}$  donc  $P(0)$  est vraie.

**Hérédité** : On suppose  $P(n)$  vraie pour un  $n \in \mathbb{N}$  fixé.

Montrons que  $P(n+1)$  est vraie c'est à dire  $v_{n+1} \geq \frac{5}{4}$

D'après l'hypothèse de récurrence  $v_n \geq \frac{5}{4}$

$$\text{donc } \frac{3}{7}v_n \geq \frac{3}{7} \times \frac{5}{4}$$

$$\text{donc } \frac{3}{7}v_n + \frac{5}{7} \geq \frac{15}{28} + \frac{5}{7}$$

donc  $v_{n+1} \geq \frac{5}{4}$

Donc  $P(n+1)$  est vraie.

**Conclusion** : La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire donc :

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n \geq \frac{5}{4}$  donc la suite  $(v_n)$  est minorée par  $\frac{5}{4}$ .

#### Exercice 4

##### Limites

Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .

- |                                        |  |                                                                 |
|----------------------------------------|--|-----------------------------------------------------------------|
| 1. $u_n = n^2 + \frac{1}{n}$           |  | 4. $u_n = n^3 - 3n + 5$                                         |
| 2. $u_n = (3n + 5)(-2n + 3)$           |  | 5. $u_n = \frac{n+3}{n^2+5}$                                    |
| 3. $u_n = \frac{3+\frac{1}{n}}{n^2+1}$ |  | 6. $u_n = (n^2 + n) \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3} \right)$ |

##### Correction exercice 4

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$   
et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$   
donc, par limite de somme,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3n + 5) = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-2n + 3) = -\infty$   
donc, par limite de produit,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ .
- Par limite de somme,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 3 + \frac{1}{n} \right) = 3$   
et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 + 1) = +\infty$   
donc, par limite de quotient,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .
- On a une forme indéterminée du type «  $\infty - \infty$  »  
Pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $u_n = n^3 - 3n + 5 = n^3 \left( 1 - \frac{3}{n^2} + \frac{5}{n^3} \right)$ .  
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty$   
et par limite de somme,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{3}{n^2} + \frac{5}{n^3} \right) = 1$   
donc, par limite de produit,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .
- On a une forme indéterminée du type " $\frac{\infty}{\infty}$ "  
Pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $u_n = \frac{n+3}{n^2+5} = \frac{n(1+\frac{3}{n})}{n^2(1+\frac{5}{n^2})} = \frac{1+\frac{3}{n}}{n(1+\frac{5}{n^2})}$   
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{5}{n^2} \right) = 1$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$   
donc, par limite de produit,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left( 1 + \frac{5}{n^2} \right) = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{3}{n} \right) = 1$   
donc par limite de quotient,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .
- On a une forme indéterminée du type «  $0 \times \infty$  »  
Pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $u_n = (n^2 + n) \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3} \right) = n + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + 1$   
Par limite de somme,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

## Exercice 5

### Convergence

Soit la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 0$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$ .  
Le but de cet exercice est d'étudier la convergence de la suite  $(u_n)$  de deux manières.

#### Méthode 1

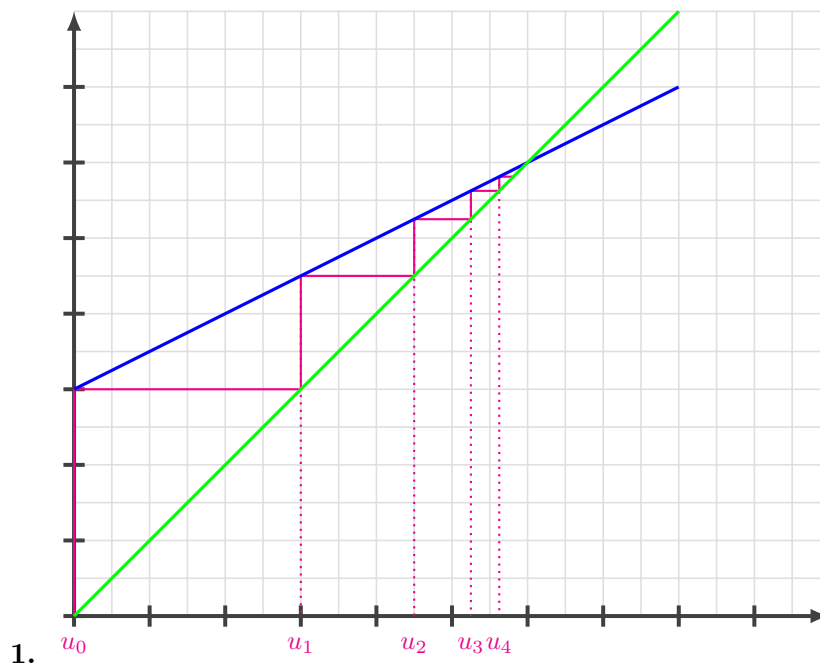
1. Conjecturer graphiquement la limite de cette suite.
2.
  - a. Montrer que la suite  $(u_n)$  est majorée par 6.
  - b. Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.
  - c. En déduire que la suite  $(u_n)$  converge et déterminer sa limite.

**Méthode 2** On considère la suite  $(v_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $v_n = u_n - 6$

1. Démontrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
2. Exprimer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$ .
3. En déduire que la suite  $(u_n)$  converge et déterminer sa limite.

### Correction exercice 5

#### Méthode 1



Traçons :

$D_1$  la droite d'équation  $y = x$

$D_2$  la droite d'équation  $y = \frac{1}{2}x + 3$

$u_n$  semble converger vers 6.

2. a. Démontrons par récurrence que la suite  $(u_n)$  est majorée par 6 c'est à dire, pour tout  $n \in \mathbb{R}, u_n \leq 6$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $P(n)$  la proposition : «  $u_n \leq 6$  »

**Initialisation** :  $u_0 = 0$  donc  $u_0 \leq 6$  donc  $P(0)$  est vraie.

**Hérédité** : On suppose  $P(n)$  vraie pour un  $n \in \mathbb{N}$  fixé.

Montrons que  $P(n+1)$  est vraie c'est à dire  $u_{n+1} \leq 6$

D'après l'hypothèse de récurrence,  $u_n \leq 6$  donc  $\frac{1}{2}u_n \leq 3$  donc  $\frac{1}{2}u_n + 3 \leq 6$  donc  $u_{n+1} \leq 6$

Donc  $P(n+1)$  est vraie.

**Conclusion** : D'après le principe de récurrence, on a :

Pour tout  $n \in \mathbb{N}, u_n \leq 6$  donc la suite  $(u_n)$  est majorée par 6.

- b. On peut le faire par deux méthodes : Méthode 1 par récurrence ( voir exercice 2 question 2) ou directement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + 3 - u_n = -\frac{1}{2}u_n + 3$$

$$\text{Or } \forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq 6 \text{ donc } -\frac{1}{2}u_n \geq -3 \text{ donc } -\frac{1}{2}u_n + 3 \geq 0$$

D'où  $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - u_n \geq 0$  donc la suite  $(u_n)$  est croissante.

- c. La suite  $(u_n)$  est croissante et majorée par 6 donc, d'après le théorème de la limite monotone,  $(u_n)$  converge vers un réel  $L$ .

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$$

D'une part,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = L$ .

D'autre part  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  donc, par limite de somme et produit,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \frac{1}{2}L + 3$

Donc, par unicité de la limite,  $L = \frac{1}{2}L + 3 \Leftrightarrow L = 6$ .

Donc la suite  $(u_n)$  converge vers 6.

## Exercice 6

Soit  $u$  la suite définie par  $u_0 = 2$  et, pour tout entier naturel  $n$ , par

$$u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n$$

On considère également la suite  $v$  définie, pour tout entier naturel  $n$ , par

$$v_n = u_n + 2n^2 + 3n + 5$$

1. L'extrait, ci-dessous, d'une feuille de calcul réalisée avec un tableur présente les valeurs des premiers termes des suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ .

|    | A   | B   | C   |
|----|-----|-----|-----|
| 1  | $n$ | $u$ | $v$ |
| 2  | 0   | 2   | 7   |
| 3  | 1   | 4   | 14  |
| 4  | 2   | 9   | 28  |
| 5  | 3   | 24  | 56  |
| 6  | 4   | 63  |     |
| 7  |     |     |     |
| 8  |     |     |     |
| 9  |     |     |     |
| 10 |     |     |     |

Quelles formules, étirées ensuite vers le bas, peut-on écrire dans les cellules C2 et B3 pour obtenir les termes successifs des deux suites ?

2. Déterminer, en justifiant, une expression de  $v_n$  et de  $u_n$  en fonction de  $n$  uniquement.

### Correction exercice 6

1. Dans C2, on saisit «  $= B2 + 2 * A2^2 + 3 * A2 + 5$  » et dans B3, on saisit «  $= 2 * B2 + 2 * A2^2 - A2$  »
2. D'après les résultats du tableur, on conjecture que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme  $v_0 = 7$ .

Pour tout  $n$  entier naturel :

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= u_{n+1} + 2(n+1)^2 + 3(n+1) + 5 \\&= 2u_n + 2(n^2 + 2n + 1) + 3n + 3 + 5 \\&= 2u_n + 4n^2 + 6n + 10 \\&= 2(u_n + 2n^2 + 3n + 5) \\&= v_n\end{aligned}$$

On a bien vérifié que  $(v_n)$  est géométrique de raison 2.

Son premier terme est  $v_0 = u_0 + 5 = 7$

Donc  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n = 7 \times 2^n$ .

On en déduit que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = 7 \times 2^n - (2n^2 + 3n + 5)$ .