

Correction – Devoir surveillé n°3

Calculatrice autorisée – La qualité de la rédaction et la propreté de la copie sont pris en compte

Exercice 1 : 4 points

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\frac{-2x+6}{-x^2-x+2} \leq 0$

- Etudions le signe de $-2x+6$:

$$-2x+6 \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq -6 \Leftrightarrow x \leq 3$$

- Etudions $-x^2-x+2$:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times (-1) \times 2 = 1 + 8 = 9$$

$\Delta > 0$ donc ce polynôme admet deux racines :

$$\begin{array}{l|l} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} & x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ = \frac{-(-1) - \sqrt{9}}{2 \times (-1)} & = \frac{1+3}{-2} \\ = \frac{1-3}{-2} & = -2 \\ = 1 & \end{array}$$

1,5

- On a donc le tableau de signes :

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$
$-2x+6$	+	+	+	0	-
$-x^2-x+2$	-	0	+	0	-
$\frac{1-2x}{x^2-4x-21}$	-	+	-	0	+

1

car $a = -1$ est négatif

0,5

0,5

Ainsi, l'ensemble de solutions de l'inéquation $\frac{-2x+6}{-x^2-x+2} \leq 0$ est $S =]-\infty; -2[\cup]1; 3]$. 0,5

Exercice 2 : 11 points

1. a. A partir du cercle trigonométrique ci-contre, donner

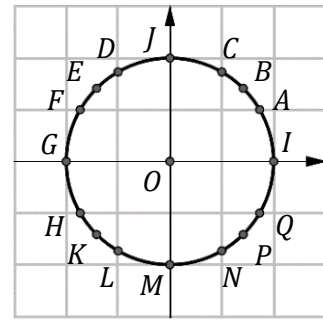
le point-image de $\frac{4\pi}{3}$, $-\frac{9\pi}{4}$ et $\frac{1253\pi}{6}$.

Le point image de $\frac{4\pi}{3}$ est L . 0,25

Le point image de $-\frac{9\pi}{4} = -2\pi - \frac{\pi}{4}$ est P . 0,25

$$\frac{1253\pi}{6} = \frac{1248\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = 208\pi + \frac{5\pi}{6} = 104 \times 2\pi + \frac{5\pi}{6}$$

Le point image de $\frac{1253\pi}{6}$ est F . 0,75



- b. Citer deux réels dont le point-image est le point J .

$\frac{\pi}{2}$ et $\frac{5\pi}{2}$ sont, par exemple, deux réels ayant J pour point-image. 0,5

2. En détaillant les calculs, déterminer la valeur exacte de :

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{2} \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \sqrt{3} \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\cos(25\pi)} \\ &= \sqrt{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{0}{-1} \\ &= -\frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}{2} + 0 \\ &= -\frac{2}{2} - \frac{3}{2} \\ &= -\frac{5}{2} \end{aligned} \quad \text{1}$$

3. a. Sachant que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, déterminer la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1$$

$$\text{donc } \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 - \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{2+\sqrt{2}}{4} = \frac{4-2-\sqrt{2}}{4} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{donc } \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \quad \text{ou bien } \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = -\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\text{Or, } \frac{\pi}{8} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \text{ donc } \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \geq 0. \quad \text{Ainsi, } \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

1,75

- b. A l'aide du cercle trigonométrique, en déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{9\pi}{8}\right)$ et de $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$.

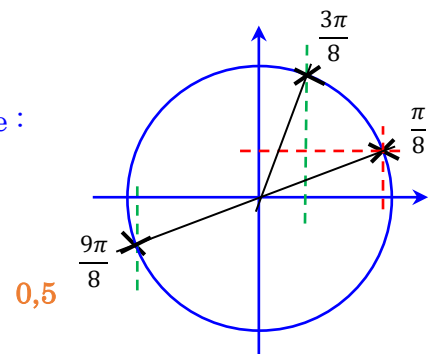
On remarque que :

$$\frac{9\pi}{8} = \frac{8\pi}{8} + \frac{\pi}{8} = \pi + \frac{\pi}{8} \quad \text{et} \quad \frac{3\pi}{8} = \frac{4\pi}{8} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$$

On a donc la figure ci-contre. On lit alors graphiquement que :

$$\cos\left(\frac{9\pi}{8}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \quad \text{0,5}$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \quad \text{0,5}$$

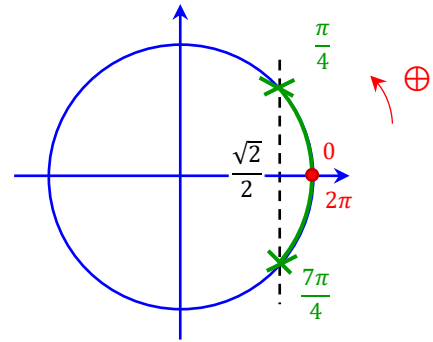


4. A l'aide du cercle trigonométrique, résoudre dans $[0; 2\pi[$ l'inéquation $\cos(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Dans $[0; 2\pi[$:

$$\cos(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}; 2\pi\right]$$

$1 + 0,5$



5. A l'aide du cercle trigonométrique, résoudre dans $]-\pi; \pi]$ l'équation $4 \cos^2(x) - 3 = 0$.

$$4 \cos^2(x) - 3 = 0$$

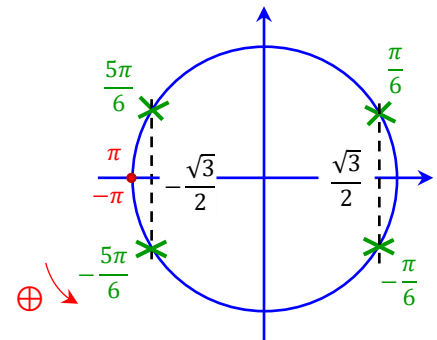
$$\Leftrightarrow \cos^2(x) = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \cos(x) = \sqrt{\frac{3}{4}} \quad \text{ou} \quad \cos(x) = -\sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ou} \quad \cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ainsi, l'ensemble de solutions dans $]-\pi; \pi]$ est : $1,25 + 0,5$

$$\mathcal{S} = \left\{-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right\}$$



6. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin^3(x) \cos(x)$.

- a. Montrer que f est impaire.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(-x) &= \sin^3(-x) \cos(-x) \\ &= \sin(-x) \times \sin(-x) \times \sin(-x) \times \cos(x) \\ &= (-\sin(x)) \times (-\sin(x)) \times (-\sin(x)) \times \cos(x) \\ &= -\sin^3(x) \cos(x) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

car la fonction cosinus est paire
car la fonction sinus est impaire

1

- a. Montrer que f est 2π - périodique.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x + 2\pi) &= \sin^3(x + 2\pi) \cos(x + 2\pi) \\ &= \sin^3(x + 2\pi) \times \cos(x) \\ &= \sin^3(x) \times \cos(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

car la fonction cosinus est 2π - périodique
car la fonction sinus est 2π - périodique

0,75

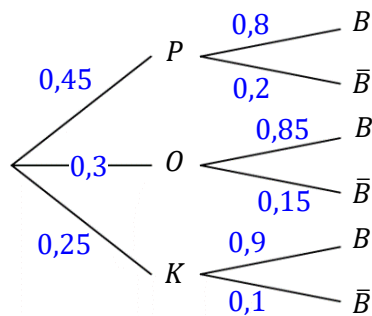
Exercice 3 : 5 points

Sur le marché de Rungis, un maraîcher propose 45 % de pommes dont 80 % classées bio et 30 % d'oranges dont 85 % classées bio. Le reste des fruits de ce maraîcher sont des kiwis dont 90 % sont classés bio. On choisit un fruit au hasard et on considère les événements :

- P : « Le fruit choisi est une pomme » ;
- O : « Le fruit choisi est une orange » ;
- K : « Le fruit choisi est un kiwi » ;
- B : « Le fruit choisi est classé bio ».

1. Construire un arbre pondéré traduisant la situation.

1



2. Montrer que la probabilité que le fruit choisi soit classé bio est égale à 0,84.

La probabilité que le fruit choisi soit classé bio est :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(P) \times \mathbb{P}_P(B) + \mathbb{P}(O) \times \mathbb{P}_O(B) + \mathbb{P}(K) \times \mathbb{P}_K(B) \\ &= 0,45 \times 0,8 + 0,3 \times 0,85 + 0,25 \times 0,9 \\ &= 0,36 + 0,255 + 0,225 \\ &= 0,84\end{aligned}$$

1

3. Calculer la probabilité que le fruit soit une orange sachant qu'il est bio (à 10^{-3} près).

$$\mathbb{P}_B(O) = \frac{\mathbb{P}(B \cap O)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(O) \times \mathbb{P}_O(B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{0,3 \times 0,85}{0,84} = \frac{0,255}{0,84} = \frac{17}{56} \simeq 0,304$$

La probabilité que le fruit soit une orange sachant qu'il est bio est d'environ de 0,304.

1

4. Compléter le tableau suivant (on travaillera en pourcentages).

Dans la q°2, on avait calculé : $\mathbb{P}(P \cap B) = 0,36$ $\mathbb{P}(O \cap B) = 0,255$ $\mathbb{P}(K \cap B) = 0,225$

	Pomme	Orange	Kiwi	Total
Classé bio	36	25,5	22,5	84
Non classé bio	9	4,5	2,5	16
Total	45	30	25	100

5. Les événements O et B sont-ils indépendants ? Justifier.

D'une part, $\mathbb{P}(B) = 0,84$ (q°2)

D'autre part, $\mathbb{P}_O(B) = 0,85$ (lecture de l'arbre q°1)

Donc $\mathbb{P}(B) \neq \mathbb{P}_O(B)$. Ainsi, les événements O et B ne sont pas indépendants.

1